BURHAN

Les fonctions linéaires : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/fonctions-lineaires/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les fonctions linéaires	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Une fonction connue par une image

Soit f une fonction linéaire telle que $f(-6) = 21$. Le plan est muni d'un repère d'origine O, avec 1 cm pour unité sur chaque axe.

1 — 1 pts

Détermine le coefficient de f, puis écris $f(x)$.

INDICE

Outil : le coefficient est le quotient de l'image par le nombre.

CORRIGÉ

Comme f est linéaire, il existe un nombre a tel que, pour tout nombre x, $f(x) = ax$.

L'égalité $f(-6) = 21$ s'écrit $-6a = 21$. On divise les deux membres par -6 :

$$a = \frac{21}{-6} = -3{,}5.$$

Vérification. $-3{,}5 \times (-6) = 21$.

Conclusion. Le coefficient de f est $-3{,}5$: pour tout nombre x, $f(x) = -3{,}5x$.

2 — 1,25 pts

Calcule $f(2)$, puis l'image de $-\dfrac{4}{7}$ par f.

INDICE

Point délicat : écris $-3{,}5$ sous la forme $-\dfrac{7}{2}$ pour multiplier deux fractions.

CORRIGÉ

Image de 2. On remplace x par 2 :

$$f(2) = -3{,}5 \times 2 = -7.$$

Image d'une fraction. Pour multiplier deux fractions, on écrit le coefficient sous forme de fraction : $-3{,}5 = -\dfrac{7}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{4}{7}\right) &= -\frac{7}{2} \times \left(-\frac{4}{7}\right) \\ &= \frac{28}{14} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Les deux facteurs sont négatifs, donc le produit est positif.

Conclusion. On a $f(2) = -7$, et l'image de $-\dfrac{4}{7}$ par f est 2.

3 0,75 pts

Trouve le nombre dont l'image par f est 14.

INDICE

Outil : résous l'équation $-3{,}5x = 14$.

CORRIGÉ

On cherche x tel que $f(x) = 14$, c'est-à-dire $-3{,}5x = 14$. On divise les deux membres par $-3{,}5$:

$$x = \frac{14}{-3{,}5} = -4.$$

Vérification. $-3{,}5 \times (-4) = 14$.

Conclusion. Le nombre dont l'image par f est 14 est -4.

4 1 pts

Construis sur ta copie la représentation graphique (D) de f. Indique les points utilisés.

INDICE

Début : utilise l'origine et le point d'abscisse 2, calculé à la question 2.

CORRIGÉ

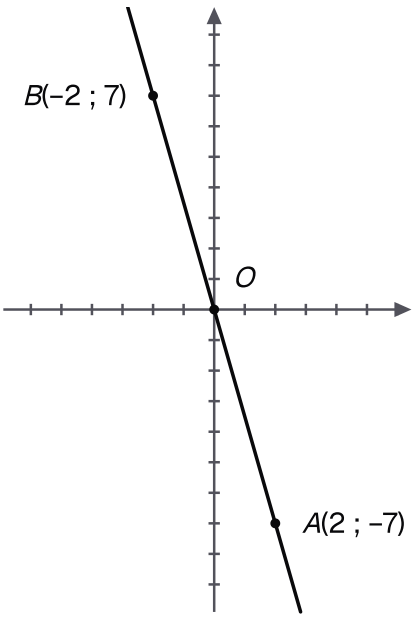
Points utilisés. Comme f est linéaire, sa représentation graphique (D) est une droite passant par l'origine. D'après la question 2, $f(2) = -7$: la droite (D) passe donc par $O(0;0)$ et par $A(2;-7)$.

Contrôle. On calcule l'image de -2 :

$$\begin{aligned} f(-2) &= -3{,}5 \times (-2) \\ &= 7. \end{aligned}$$

Le point $B(-2;7)$ doit donc être sur ta droite.

Conclusion. On trace la droite qui passe par $O(0;0)$ et par $A(2;-7)$; le point $B(-2;7)$ sert de contrôle.



La droite (D) qui représente f passe par O et par A(2 ; -7) ; le point B(-2 ; 7) sert de contrôle.

5 1 pts

Sur la copie d'un camarade, une droite (D') passe par O et par le point $P(-1{,}2;\,4{,}2)$. Détermine la fonction linéaire que représente (D'). En déduire que (D') et (D) sont la même droite.

INDICE

Point délicat : regarde d'abord l'abscisse de P : elle n'est pas nulle, donc (D') n'est pas l'axe des ordonnées, et tu peux diviser par cette abscisse.

CORRIGÉ

Une fonction linéaire. L'abscisse de P vaut $-1{,}2$: elle n'est pas nulle. Ainsi, P n'est pas sur l'axe des ordonnées, donc (D') n'est pas cet axe. Comme (D') est une droite qui passe par O, elle représente une fonction linéaire g.

Son coefficient. Le point P est distinct de O. Le coefficient de g est l'ordonnée de P divisée par son abscisse :

$$\frac{4{,}2}{-1{,}2} = -3{,}5.$$

Ainsi, pour tout nombre x, $g(x) = -3{,}5x$: la fonction g est la fonction f.

Conclusion. La droite (D') représente la fonction $x \mapsto -3{,}5x$. Les droites (D') et (D) représentent la même fonction, donc elles sont la même droite.

Exercice 2 — 5 pts

Deux imprimeries

Pour imprimer ses exposés, Nora compare deux imprimeries.

- Chez l'imprimerie A, chaque page coûte $0{,}40$ dirham.
- Chez l'imprimerie B, 30 pages coûtent $10{,}50$ dirhams, et le prix est proportionnel au nombre de pages.

On note x le nombre de pages.

1 — 0,75 pts

Écris la fonction linéaire p_A qui donne le prix, en dirhams, de x pages chez A.

INDICE

Outil : le coefficient est le prix d'une seule page.

CORRIGÉ

Chez A, chaque page coûte $0{,}4$ dirham. Le prix de x pages vaut donc $0{,}4 \times x$ dirhams : il est proportionnel au nombre de pages, avec le coefficient $0{,}4$.

Conclusion. La fonction cherchée est $p_A : x \mapsto 0{,}4x$.

2 — 1 pts

Calcule le prix d'une page chez B, puis écris la fonction linéaire p_B correspondante.

INDICE

Outil : divise le prix payé par le nombre de pages.

CORRIGÉ

Chez B, le prix est proportionnel au nombre de pages. Le prix d'une page est le coefficient : on divise le prix payé par le nombre de pages.

$$\frac{10{,}5}{30} = 0{,}35.$$

Conclusion. Une page coûte $0{,}35$ dirham chez B, et $p_B : x \mapsto 0{,}35x$.

3 1 pts

Nora veut imprimer 120 pages. Calcule le prix demandé par chaque imprimerie.

INDICE

Début : calcule les images de 120 par p_A et par p_B.

CORRIGÉ

On calcule l'image de 120 par chacune des deux fonctions.

Chez A.

$$\begin{aligned} p_A(120) &= 0{,}4 \times 120 \\ &= 48. \end{aligned}$$

Chez B.

$$\begin{aligned} p_B(120) &= 0{,}35 \times 120 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour 120 pages, Nora paie 48 dirhams chez A et 42 dirhams chez B.

4 1 pts

Avec 63 dirhams, combien de pages Nora peut-elle imprimer chez B ?

INDICE

Outil : cherche le nombre dont l'image par p_B est 63.

CORRIGÉ

On cherche le nombre de pages x tel que $p_B(x) = 63$, c'est-à-dire $0{,}35x = 63$. On divise les deux membres par $0{,}35$:

$$x = \frac{63}{0{,}35} = 180.$$

Vérification. $0{,}35 \times 180 = 63$.

Conclusion. Avec 63 dirhams, Nora peut imprimer 180 pages chez B.

5 1,25 pts

L'imprimerie A annonce une remise de 15 pour cent sur tous ses prix. Détermine l'imprimerie qui devient la moins chère, pour tout nombre de pages non nul.

INDICE

Début : calcule le nouveau prix d'une page chez A avec le coefficient $1 - \dfrac{15}{100}$.

CORRIGÉ

Nouveau prix chez A. Une remise de 15 pour cent correspond au coefficient $1 - \dfrac{15}{100} = 0{,}85$. Le prix d'une page chez A devient

$$0{,}4 \times 0{,}85 = 0{,}34.$$

Une page coûte alors $0{,}34$ dirham chez A.

Comparaison. Pour x pages, A demande $0{,}34x$ dirhams et B demande $0{,}35x$ dirhams. On part de $0{,}34 < 0{,}35$. Un nombre de pages x non nul est positif : on multiplie les deux membres de l'inégalité par x, et l'ordre ne change pas (ordre et multiplication par un nombre positif). Donc

$$0{,}34x < 0{,}35x.$$

Conclusion. Après la remise, l'imprimerie A devient la moins chère, pour tout nombre de pages non nul.

Exercice 3 — 5 pts

L'allongement d'un ressort

En sciences physiques, on suspend des masses à un ressort. L'allongement du ressort est proportionnel à la masse suspendue.

Avec une masse de $0{,}3$ kg, l'allongement vaut $2{,}4$ cm. On note x la masse, en kg, et $L(x)$ l'allongement, en cm.

1 — 1 pts

Calcule le coefficient de proportionnalité, puis écris $L(x)$.

INDICE

Outil : divise l'allongement par la masse.

CORRIGÉ

L'allongement est proportionnel à la masse. Le coefficient est l'allongement divisé par la masse :

$$\frac{2{,}4}{0{,}3} = 8.$$

Conclusion. Le coefficient de proportionnalité est 8 : pour tout nombre positif x, $L(x) = 8x$. Chaque kilogramme allonge le ressort de 8 cm.

2 1 pts

Sur ta feuille, prends 1 cm pour $0{,}25$ kg sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 2 cm d'allongement du ressort sur l'axe des ordonnées. Trace sur ta copie la représentation graphique de L pour des masses de 0 à $1{,}5$ kg : c'est la partie de la droite qui commence en O.

INDICE

Début : la représentation part de l'origine ; calcule l'allongement pour 1 kg.

CORRIGÉ

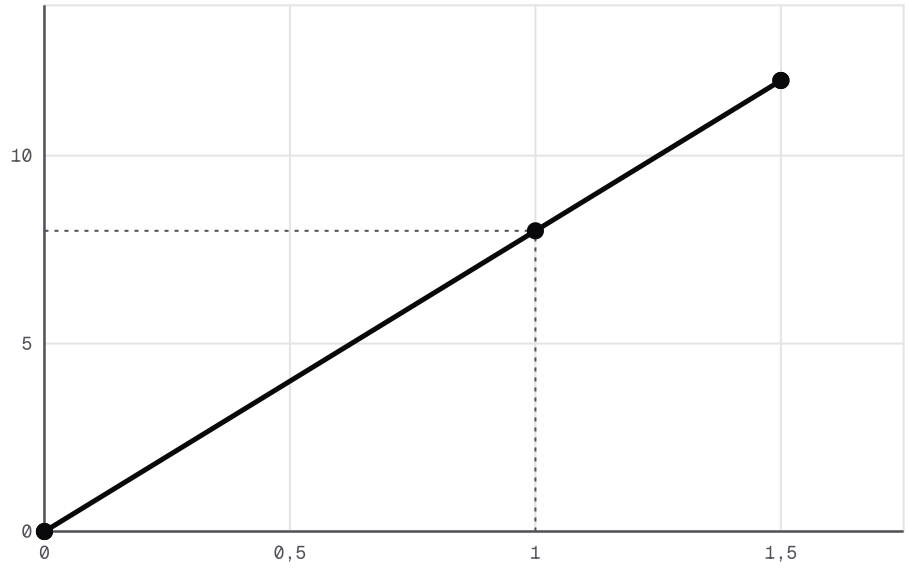
Points utilisés. La représentation de L est la partie de la droite d'équation $y = 8x$ qui commence en $O(0;0)$. Pour une masse de $1{,}5$ kg :

$$L(1{,}5) = 8 \times 1{,}5 = 12.$$

Le tracé s'arrête donc au point $B(1{,}5;12)$.

Contrôle. On a $L(1) = 8$, donc le point $A(1;8)$ doit être sur ton tracé.

Conclusion. On trace le segment qui va de $O(0;0)$ à $B(1{,}5;12)$; il passe par $A(1;8)$.



La représentation graphique de L pour des masses de 0 à 1,5 kg : la partie de la droite y = 8x qui va de O à B, avec le point de contrôle A.

3 1 pts

Lis sur ton graphique l'allongement obtenu avec $0{,}75$ kg, puis contrôle ta lecture par le calcul.

INDICE

Point délicat : la lecture est approchée ; le calcul la confirme.

CORRIGÉ

Lecture. On part de $0{,}75$ sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'au tracé, puis on rejoint l'axe des ordonnées. On lit un allongement d'environ 6 cm.

Calcul. On remplace x par $0{,}75$:

$$L(0{,}75) = 8 \times 0{,}75 = 6.$$

Conclusion. Avec $0{,}75$ kg, l'allongement est de 6 cm : la lecture est confirmée.

4 1 pts

Quelle masse faut-il suspendre pour obtenir un allongement de 10 cm ?

INDICE

Outil : résous l'équation $8x = 10$.

CORRIGÉ

On cherche la masse x telle que $L(x) = 10$, c'est-à-dire $8x = 10$. On divise les deux membres par 8 :

$$x = \frac{10}{8} = 1{,}25.$$

Vérification. $8 \times 1{,}25 = 10$.

Conclusion. Il faut suspendre une masse de $1{,}25$ kg.

5 1 pts

Le ressort s'abîme si son allongement dépasse 14 cm. Peut-on suspendre un sac de $1{,}6$ kg ? Détermine la plus grande masse que l'on peut suspendre sans abîmer le ressort.

INDICE

Début : calcule $L(1{,}6)$, puis traduis la condition « l'allongement ne dépasse pas 14 cm » par l'inéquation $8x \leq 14$.

CORRIGÉ

Le sac. On calcule l'allongement obtenu avec $1{,}6$ kg :

$$L(1{,}6) = 8 \times 1{,}6 = 12{,}8.$$

Or $12{,}8 \leq 14$: l'allongement ne dépasse pas 14 cm, donc on peut suspendre le sac.

La masse maximale. Le ressort ne s'abîme pas quand $L(x) \leq 14$, c'est-à-dire $8x \leq 14$. On multiplie les deux membres par $\frac{1}{8}$, qui est positif : l'ordre ne change pas (ordre et multiplication par un nombre positif). On obtient

$$x \leq \frac{14}{8}.$$

Or $\frac{14}{8} = 1{,}75$, donc $x \leq 1{,}75$.

Contrôle. Pour $x = 1{,}75$, l'allongement vaut $8 \times 1{,}75 = 14$ cm : il atteint 14 cm sans les dépasser.

Conclusion. On peut suspendre le sac de $1{,}6$ kg. La plus grande masse que l'on peut suspendre sans abîmer le ressort est $1{,}75$ kg.

Exercice 4 5 pts

La consommation d'une voiture

Pendant un voyage, la voiture de la famille de Karim consomme 8 litres d'essence pour 100 km parcourus. La quantité d'essence consommée est proportionnelle à la distance parcourue.

On note x la distance parcourue depuis le départ, en km, et $c(x)$ la quantité d'essence consommée, en litres.

1 0,75 pts

Montre que $c(x) = 0{,}08x$.

INDICE

Outil : le coefficient est la quantité d'essence consommée pour 1 km.

CORRIGÉ

La quantité d'essence est proportionnelle à la distance. Son coefficient est la quantité consommée pour 1 km : on divise les 8 litres par les 100 km.

$$\frac{8}{100} = 0{,}08.$$

Conclusion. La voiture consomme $0{,}08$ litre par kilomètre : pour tout nombre positif x, $c(x) = 0{,}08x$.

2 0,75 pts

Calcule $c(250)$, puis explique ce que représente ce nombre.

INDICE

Début : remplace x par 250.

CORRIGÉ

On remplace x par 250 :

$$\begin{aligned} c(250) &= 0{,}08 \times 250 \\ &= 20. \end{aligned}$$

Ce nombre est la quantité d'essence consommée depuis le départ, quand la voiture a parcouru 250 km.

Conclusion. On a $c(250) = 20$: pour parcourir les 250 premiers kilomètres, la voiture consomme 20 litres d'essence.

3 1 pts

Quelle distance la voiture a-t-elle parcourue depuis le départ quand elle a consommé 24 litres ?

INDICE

Outil : cherche le nombre dont l'image par c est 24.

CORRIGÉ

On cherche la distance x telle que $c(x) = 24$, c'est-à-dire $0{,}08x = 24$. On divise les deux membres par $0{,}08$:

$$x = \frac{24}{0{,}08} = 300.$$

Vérification. $0{,}08 \times 300 = 24$.

Conclusion. Quand elle a consommé 24 litres, la voiture a parcouru 300 km depuis le départ.

4 1,25 pts

Calcule $c(180)$ et $c(430)$. En déduire la quantité d'essence consommée entre le kilomètre 180 et le kilomètre 430 du voyage.

INDICE

Point délicat : l'essence consommée entre deux kilomètres est la différence des deux quantités consommées depuis le départ.

CORRIGÉ

Les deux images.

$$\begin{aligned} c(180) &= 0{,}08 \times 180 \\ &= 14{,}4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(430) &= 0{,}08 \times 430 \\ &= 34{,}4. \end{aligned}$$

Différence. L'essence consommée entre les deux kilomètres est la différence des quantités consommées depuis le départ :

$$\begin{aligned} &c(430) - c(180) \\ &= 34{,}4 - 14{,}4 \\ &= 20. \end{aligned}$$

Contrôle. Par la propriété des accroissements proportionnels, on retrouve ce résultat :

$$\begin{aligned} &0{,}08 \times (430 - 180) \\ &= 0{,}08 \times 250 \\ &= 20. \end{aligned}$$

Conclusion. Entre le kilomètre 180 et le kilomètre 430 du voyage, la voiture consomme 20 litres d'essence.

5 1,25 pts

Karim affirme : « Sur n'importe quel tronçon de 100 km de ce voyage, la voiture consomme 8 litres. » Justifie son affirmation.

INDICE

Début : appelle x le kilomètre où commence le tronçon ; il se termine au kilomètre $x + 100$.

CORRIGÉ

Le tronçon. Un tronçon de 100 km commence au kilomètre x et se termine au kilomètre $x + 100$. L'essence consommée sur ce tronçon vaut $c(x + 100) - c(x)$.

Calcul. On applique la propriété des accroissements proportionnels à la fonction linéaire c, de coefficient $0{,}08$, avec les nombres $x + 100$ et x :

$$\begin{aligned} & c(x + 100) - c(x) \\ &= 0{,}08 \times ((x + 100) - x) \\ &= 0{,}08 \times 100 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Le résultat ne dépend pas de x.

Conclusion. Sur n'importe quel tronçon de 100 km de ce voyage, la voiture consomme 8 litres : Karim a raison.

Exercice 5 — 5 pts

Une droite et une somme de coordonnées

On considère la fonction linéaire g définie par $g(x) = \dfrac{5}{4}x$. Le plan est muni d'un repère d'origine O, avec 1 cm pour unité sur chaque axe. On note (D) la représentation graphique de g.

1 — 1 pts

Calcule $g(4)$ et $g(-8)$.

INDICE

Outil : multiplie le nombre par 5, puis divise par 4.

CORRIGÉ

On multiplie chaque nombre par $\dfrac{5}{4}$:

$$g(4) = \frac{5}{4} \times 4 = 5.$$

$$g(-8) = \frac{5}{4} \times (-8) = -10.$$

Conclusion. L'image de 4 par g est 5, et l'image de -8 est -10.

2 1 pts

Trace sur ta copie la droite (D). Indique les points utilisés.

INDICE

Début : prends un multiple de 4 comme abscisse ; la question 1 t'en donne un.

CORRIGÉ

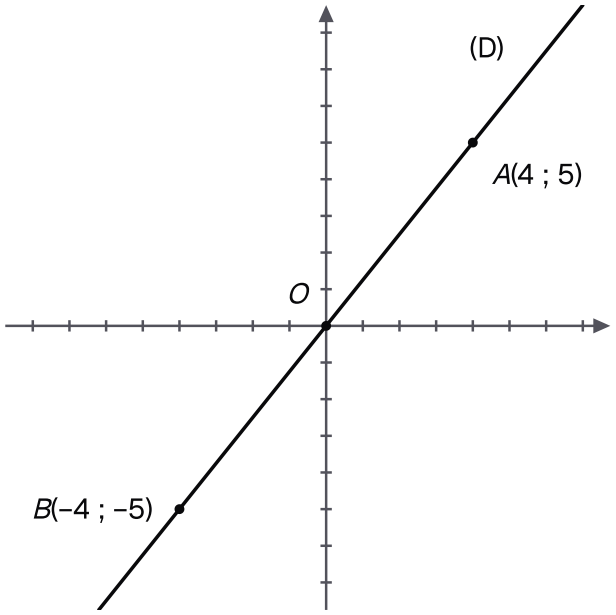
Points utilisés. La droite (D) passe par l'origine. D'après la question 1, $g(4) = 5$: elle passe aussi par $A(4;5)$.

Contrôle. On calcule l'image de -4 :

$$g(-4) = \frac{5}{4} \times (-4) = -5.$$

Le point $B(-4;-5)$ doit donc être sur ta droite.

Conclusion. On trace la droite qui passe par $O(0;0)$ et par $A(4;5)$; le point $B(-4;-5)$ sert de contrôle.



La droite (D) qui représente g passe par O et par A(4 ; 5) ; le point B(-4 ; -5) sert de contrôle.

3 1 pts

Lis sur ton graphique le nombre dont l'image par g est $-2{,}5$, puis contrôle ta lecture par le calcul.

INDICE

Rappel : pars de $-2{,}5$ sur l'axe des ordonnées, rejoins la droite par un trait horizontal, puis l'axe des abscisses par un trait vertical.

CORRIGÉ

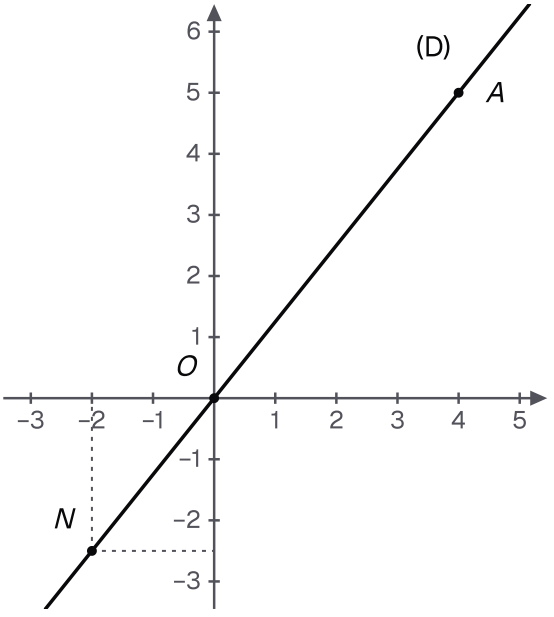
Lecture. On part de $-2{,}5$ sur l'axe des ordonnées, on rejoint la droite horizontalement, puis l'axe des abscisses verticalement. On lit un nombre d'environ -2.

Calcul. On résout $g(x) = -2{,}5$, c'est-à-dire $\frac{5}{4}x = -2{,}5$. On multiplie les deux membres par $\frac{4}{5}$:

$$\begin{aligned} x &= -2{,}5 \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{-10}{5} \\ &= -2. \end{aligned}$$

Contrôle. $g(-2) = \frac{5}{4} \times (-2) = -2{,}5$.

Conclusion. Le nombre dont l'image par g est $-2{,}5$ est -2 : la lecture est confirmée.



Lecture du nombre dont l'image par g est -2,5 : depuis -2,5 sur l'axe des ordonnées, on rejoint (D), puis on lit l'abscisse -2.

4 0,75 pts

Le point $E\left(\frac{2}{3};\frac{5}{6}\right)$ appartient-il à (D) ? Justifie par un calcul.

INDICE

Outil : calcule l'image de l'abscisse de E en multipliant les deux fractions, simplifie, puis compare à son ordonnée.

CORRIGÉ

On compare l'image de l'abscisse de E à son ordonnée $\frac{5}{6}$.

Produit. On multiplie les deux fractions :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{5}{4}\times\frac{2}{3} \\ &= \frac{5\times 2}{4\times 3} \\ &= \frac{10}{12}. \end{aligned}$$

Simplification. Le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 2 :

$$\frac{10}{12}=\frac{2\times 5}{2\times 6}=\frac{5}{6}.$$

Conclusion. L'image de l'abscisse de E est égale à son ordonnée : le point E appartient à (D).

5 1,25 pts

Détermine le point M de (D) dont l'abscisse et l'ordonnée ont pour somme 18.

INDICE

Début : un point de (D) d'abscisse x a pour ordonnée $\frac{5}{4}x$; écris que la somme vaut 18.

CORRIGÉ

L'équation. Le point M est sur (D) : si son abscisse est x, son ordonnée est $g(x)=\frac{5}{4}x$. La somme des coordonnées vaut 18, donc

$$x+\frac{5}{4}x=18.$$

Résolution. On regroupe les termes en x : x vaut $\frac{4}{4}x$, et $\frac{4}{4}+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$. L'équation devient

$$\frac{9}{4}x=18.$$

On multiplie les deux membres par $\frac{4}{9}$: $x=18\times\frac{4}{9}=8$. L'ordonnée vaut alors $g(8)=\frac{5}{4}\times 8=10$.

Vérification. $8+10=18$.

Conclusion. Le point cherché est $M(8;10)$.