BURHAN

Les fonctions linéaires

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/fonctions-lineaires/cours

Chapitre	Semestre
Les fonctions linéaires	Semestre 2

Combien vais-je payer ?

Samedi matin, tu accompagnes ta tante au marché. Sur l'étal, une ardoise annonce : tomates, 7 dirhams le kilogramme.

Ta tante demande $2{,}5$ kg de tomates. Le marchand trouve le prix de tête, sans calculatrice : il applique une règle simple.

Devine : Le prix des tomates

Combien ta tante va-t-elle payer pour $2{,}5$ kg de tomates ?

A. $9{,}5$ dirhams

Faux.

Faux. Tu as ajouté 7 et $2{,}5$. Or chaque kilogramme coûte 7 dirhams : on multiplie.

B. $17{,}5$ dirhams

Juste.

Oui. Chaque kilogramme coûte 7 dirhams : $7 \times 2{,}5 = 17{,}5$.

C. 14 dirhams

Faux.

Faux. 14 dirhams est le prix de 2 kg seulement : le demi-kilogramme manque.

D. 35 dirhams

Faux.

Faux. 35 dirhams est le prix de 5 kg, le double de la masse demandée.

Correction

Chaque kilogramme coûte 7 dirhams. Le prix s'obtient donc en multipliant la masse par 7 : $7 \times 2{,}5 = 17{,}5$.

Ta tante paie $17{,}5$ dirhams.

Le marchand applique la même règle à toutes les masses : il multiplie par 7. Dans ce chapitre, tu donnes un nom à ce genre de règle : une fonction linéaire.

À la fin, tu sauras calculer une image et trouver un nombre dont l'image est connue.

Tu sauras aussi tracer une droite, lire un graphique et résoudre un problème de prix, de vitesse ou de pourcentage.

Fonction linéaire et image d'un nombre

Un programme de calcul

Devine : Multiplier par quatre

Voici un programme de calcul : « Choisis un nombre, puis multiplie-le par 4. » Quel résultat obtiens-tu si tu choisis $2{,}5$?

A. $6{,}5$

Faux.

Faux. Tu as ajouté 4 au lieu de multiplier par 4.

B. $0{,}625$

Faux.

Faux. Tu as divisé par 4 : le programme demande de multiplier.

C. 10

Juste.

Oui. $4 \times 2{,}5 = 10$.

D. $6{,}25$

Faux.

Faux. $6{,}25$ est $2{,}5 \times 2{,}5$: tu as multiplié le nombre par lui-même.

Correction

Le programme multiplie le nombre choisi par 4 :

$$4 \times 2{,}5 = 10.$$

Le résultat est 10.

Ce programme transforme chaque nombre en un seul résultat : 0 donne 0, 1 donne 4, -3 donne -12.

Une règle de ce genre s'appelle une **fonction** : à chaque nombre, elle associe un seul nombre.

On nomme une fonction par une lettre, par exemple f. Le résultat obtenu à partir du nombre x s'écrit $f(x)$. Il se lit « f de x ».

Pour ce programme, on a $f(x) = 4x$ pour tout nombre x. Voici quelques valeurs :

Nombre choisi x	-3	0	$0{,}5$	1	6
Résultat $f(x)$	-12	0	2	4	24

Chaque résultat est le nombre choisi multiplié par 4.

La définition

Définition : Fonction linéaire

Soit a un nombre donné. La **fonction linéaire de coefficient** a est la fonction f qui, à tout nombre x, associe le nombre ax. On écrit

$$f : x \mapsto ax \quad \text{ou} \quad f(x) = ax.$$

- Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.
- Si $f(x) = y$, on dit que x est un nombre dont l'image est y : x est un **antécédent** de y par f.
- Le nombre a est le **coefficient** de la fonction linéaire f.

En clair : une fonction linéaire multiplie toujours par le même nombre a, appelé son coefficient. Le programme « multiplier par 4 » est la fonction linéaire de coefficient 4.

L'écriture $f : x \mapsto 4x$ se lit « f est la fonction qui, à x, associe $4x$ ».

Les écritures $f : x \mapsto 4x$ et $f(x) = 4x$ disent la même chose.

Exemple : lire le vocabulaire

Avec $f(x) = 4x$, on calcule :

$$f(3) = 4 \times 3 = 12.$$

- 12 est l'**image** de 3 par f.
- 3 est un nombre dont l'image est 12. On dit aussi que 3 est un **antécédent** de 12 par f.
- Le **coefficient** de f est 4.

Image et antécédent

Retiens le sens du trajet : on part du nombre x et on arrive à son image $f(x)$.

Un antécédent de b est un nombre de départ dont l'image est b. Ici, 3 est un antécédent de 12, car $f(3) = 12$.

Vérifie : Qui est l'image de qui ?

On sait que $f(x) = 4x$ et que $f(5) = 20$. Quelle phrase est juste ?

A. 5 est l'image de 20.
Faux.
Faux. On part de 5 et on arrive à 20 : c'est 20 qui est l'image de 5.

B. 20 est un antécédent de 5.

Faux.

Faux. Un antécédent de 5 serait un nombre dont l'image est 5. Or 20 a pour image 80.

C. 4 est l'image de 5.

Faux.

Faux. 4 est le coefficient de f. L'image de 5 est 4×5.

D. 20 est l'image de 5.

Juste.

Oui. $f(5) = 4 \times 5 = 20$: on part de 5, on arrive à 20.

Correction

L'égalité $f(5) = 20$ se lit « l'image de 5 par f est 20 ».

Donc 20 est l'image de 5, et 5 est un antécédent de 20.

Calculer une image

Méthode : calculer l'image d'un nombre

1. **Écris** l'expression de la fonction, par exemple $g(x) = -5x$.
2. **Remplace** x par le nombre donné. Mets ce nombre entre parenthèses s'il est négatif.
3. **Calcule** en appliquant une seule règle à chaque ligne.
4. **Conclus** par une phrase : « l'image de … par g est … ».

Exemple : un coefficient négatif

Soit g la fonction linéaire définie par $g(x) = -5x$.

$$g(-4) = -5 \times (-4) = 20$$

L'image de -4 par g est 20, car le produit de deux nombres négatifs est positif.

$$g(0{,}2) = -5 \times 0{,}2 = -1$$

L'image de $0{,}2$ par g est -1.

Exemple : un coefficient en fraction

Soit h la fonction linéaire définie par $h(x) = \frac{2}{3}x$.

Pour calculer $h(6)$, on multiplie 6 par $\frac{2}{3}$:

$$h(6) = \frac{2}{3} \times 6 = \frac{12}{3} = 4$$

Pour l'image de $-\frac{3}{4}$, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$h\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{12}$$

On simplifie par 6 :

$$-\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

L'image de 6 par h est 4 ; l'image de $-\frac{3}{4}$ est $-\frac{1}{2}$.

Attention : les parenthèses

✗ Écrire $g(-4) = -5 \times -4$. Deux signes se suivent, et le calcul devient difficile à lire.

✓ Écrire $g(-4) = -5 \times (-4) = 20$. Le nombre négatif que l'on remplace reste entre parenthèses.

Coefficients particuliers

Le coefficient peut être n'importe quel nombre.

- Avec le coefficient 1, la fonction $x \mapsto x$ associe à chaque nombre ce nombre lui-même.
- Avec le coefficient 0, la fonction $x \mapsto 0$ donne l'image 0 à tous les nombres.

Pour toute fonction linéaire f de coefficient a, on a :

$$f(0) = a \times 0 = 0.$$

L'image de 0 est toujours 0.

Vérifie : Reconnaître une fonction linéaire

Laquelle de ces fonctions est une fonction linéaire ?

A. $x \mapsto x + 7$

Faux.

Faux. L'image de 0 est 7, et non 0 : cette fonction ne multiplie pas par un nombre fixe.

B. $x \mapsto -7x$

Juste.

Oui. Elle multiplie chaque nombre par -7 : son coefficient est -7.

C. $x \mapsto x^2$

Faux.

Faux. Elle multiplie x par lui-même : 2 donne 4, mais 3 donne 9. Le multiplicateur change.

D. $x \mapsto 7$

Faux.

Faux. Tous les nombres ont la même image 7. En particulier, l'image de 0 est 7, et non 0.

Correction

Une fonction linéaire s'écrit $x \mapsto ax$, avec un coefficient a fixe.

Seule $x \mapsto -7x$ a cette forme : son coefficient est -7.

À toi : trois images

Soit k la fonction linéaire de coefficient $-0{,}6$. Calcule $k(5)$, $k(-10)$ et $k\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Indice 1

Écris d'abord $k(x) = -0{,}6x$, puis remplace x par chaque nombre.

Indice 2

Pour le premier nombre : $k(5) = -0{,}6 \times 5$. Multiplie $0{,}6$ par 5, puis place le signe.

Indice 3

Point délicat : pour $k(-10)$, le produit de deux nombres négatifs est positif. Pour le dernier, écris $-0{,}6 = -\dfrac{6}{10}$.

Réponse

On a $k(x) = -0{,}6x$ pour tout nombre x.

$$k(5) = -0{,}6 \times 5 = -3$$

$$\begin{aligned} &k(-10) \\ &= -0{,}6 \times (-10) = 6 \end{aligned}$$

Pour le dernier nombre, on écrit $-0{,}6 = -\dfrac{6}{10}$:

$$\begin{aligned} k\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{6}{10} \times \frac{1}{3} \\ &= -\frac{6}{30} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Conclusion. L'image de 5 est -3, l'image de -10 est 6 et l'image de $\dfrac{1}{3}$ est $-\dfrac{1}{5}$, soit $-0{,}2$.

Trouver un nombre dont on connaît l'image

La question à l'envers

Devine : Remonter le calcul

Soit $f(x) = 6x$. Quel nombre a pour image 42 par f ?

A. 7

Juste.

Oui. $f(7) = 6 \times 7 = 42$.

B. 252

Faux.

Faux. $252 = 6 \times 42$ est l'image de 42. On cherche le nombre de départ.

C. 36

Faux.

Faux. Tu as soustrait 6. Or $f(36) = 216$, et non 42.

D. 48

Faux.

Faux. Tu as ajouté 6. Or $f(48) = 288$, et non 42.

Correction

On cherche le nombre x tel que $6x = 42$.

Comme $6 \times 7 = 42$, le nombre cherché est 7.

Rappel du chapitre sur les équations : pour résoudre $ax = b$ avec $a \neq 0$, on divise les deux membres par a. La solution est :

$$x = \frac{b}{a}.$$

Chercher le nombre dont l'image par f est b, c'est chercher x tel que $f(x) = b$.

Si f est la fonction linéaire de coefficient a, cela revient à résoudre l'équation $ax = b$.

Le nombre trouvé est un antécédent de b par f.

La méthode

Méthode : trouver le nombre dont l'image est connue

1. **Traduis** la question par une équation. Le nombre x dont l'image est b vérifie $ax = b$.
2. **Résous** l'équation. Si le coefficient a n'est pas nul, tu divises les deux membres par a. Le cas $a = 0$ est expliqué plus bas.
3. **Vérifie** en calculant l'image du nombre trouvé. Tu dois retrouver b.
4. **Conclus** par une phrase : « le nombre dont l'image est … est … ».

Exemple : un coefficient négatif

Soit g la fonction linéaire définie par $g(x) = -4x$. On cherche le nombre dont l'image par g est 10.

On résout $-4x = 10$. On divise les deux membres par -4 :

$$x = \frac{10}{-4} = -2{,}5$$

Vérification : $g(-2{,}5) = -4 \times (-2{,}5) = 10$.

Le nombre dont l'image par g est 10 est $-2{,}5$.

Exemple : un coefficient en fraction

Soit h la fonction linéaire définie par $h(x) = \frac{3}{5}x$. On cherche l'antécédent de 9 par h.

On résout $\frac{3}{5}x = 9$. Diviser par $\frac{3}{5}$, c'est multiplier par $\frac{5}{3}$:

$$x = 9 \times \frac{5}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

Vérification : $h(15) = \frac{3}{5} \times 15 = 9$.

L'antécédent de 9 par h est 15.

Image ou antécédent ?

Attention : deux questions différentes

Avec $f(x) = 5x$, deux questions se ressemblent. Leurs réponses sont pourtant différentes.

✗ « Le nombre dont l'image est 10 est 50. » On a calculé $f(10)$, c'est-à-dire l'image de 10.

✓ « Le nombre dont l'image est 10 est 2. » En effet, $5x = 10$ donne $x = 2$, et $f(2) = 10$.

Trouve l'erreur : Le calcul de Nabil

Avec $f(x) = 3x$, Nabil cherche le nombre dont l'image est 12. Il écrit : « $f(12) = 3 \times 12 = 36$, donc le nombre cherché est 36. » Où est l'erreur ?

A. Le produit 3×12 est faux, il ne vaut pas 36.

Faux.

Faux. $3 \times 12 = 36$ est juste. L'erreur est ailleurs : Nabil a répondu à une autre question.

B. Il a calculé l'image de 12 au lieu de résoudre $3x = 12$.

Juste.

Oui. Le nombre cherché vérifie $3x = 12$, donc $x = 4$.

C. Il fallait diviser le coefficient 3 par le nombre 12.

Faux.

Faux. On divise 12 par le coefficient 3, et non l'inverse. D'ailleurs, $\frac{3}{12}$ a pour image $\frac{3}{4}$.

D. Il n'y a pas d'erreur : 36 est bien le nombre cherché.

Faux.

Faux. $f(36) = 108$: l'image de 36 n'est pas 12.

Correction

Nabil a calculé l'image de 12, alors qu'on cherche un nombre de départ.

Il fallait résoudre $3x = 12$, soit $x = \dfrac{12}{3} = 4$. Vérification : $f(4) = 3 \times 4 = 12$.

Le nombre dont l'image est 12 est 4.

Coefficient nul et entraînement

Pourquoi exiger $a \neq 0$? Avec la fonction $x \mapsto 0$, tous les nombres ont pour image 0.

Le nombre 5, par exemple, n'a alors aucun antécédent : l'équation $0 \times x = 5$ n'a pas de solution.

À toi : deux recherches

Soit $k(x) = 2{,}5x$. Trouve le nombre dont l'image est -15, puis l'antécédent de $7{,}5$ par k.

Indice 1

Traduis chaque question par une équation : $2{,}5x = -15$, puis $2{,}5x = 7{,}5$.

Indice 2

Divise les deux membres par $2{,}5$. Tu peux remarquer que $2{,}5 \times 6 = 15$.

Indice 3

Point délicat : le quotient d'un nombre négatif par un nombre positif est négatif. N'oublie pas la vérification.

Réponse

Image -15. On résout $2{,}5x = -15$:

$$x = \frac{-15}{2{,}5} = -6$$

Vérification : $k(-6) = 2{,}5 \times (-6) = -15$.

Image $7{,}5$. On résout $2{,}5x = 7{,}5$:

$$x = \frac{7{,}5}{2{,}5} = 3$$

Vérification : $k(3) = 2{,}5 \times 3 = 7{,}5$.

Conclusion. Le nombre dont l'image est -15 est -6 ; l'antécédent de $7{,}5$ par k est 3.

Fonction linéaire et proportionnalité

Un tableau de proportionnalité

Devine : La sortie à vélo

Un cycliste roule toujours à la même vitesse. En 2 heures, il parcourt 32 km ; en 3 heures, il parcourt 48 km. Quelle distance parcourt-il en 5 heures ?

A. 64 km

Faux.

Faux. Tu as ajouté 16 à 48 : c'est la distance parcourue en 4 heures.

B. 53 km

Faux.

Faux. Tu as ajouté 5 à 48. Des heures ne s'ajoutent pas à des kilomètres.

C. 96 km

Faux.

Faux. 96 km est le double de 48 km : c'est la distance parcourue en 6 heures.

D. 80 km

Juste.

Oui. Il parcourt 16 km en une heure, et $16 \times 5 = 80$.

Correction

En 2 heures, il parcourt 32 km : en une heure, il parcourt donc 16 km.

En 5 heures, il parcourt :

$$16 \times 5 = 80.$$

Le cycliste parcourt 80 km en 5 heures.

Rappel de deuxième année : deux grandeurs sont **proportionnelles** quand on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre. Cela revient à dire que le quotient de la seconde grandeur par la première est toujours le même.

Ce nombre est le **coefficient de proportionnalité**.

Durée en heures	1	2	3
Distance en km	16	32	48

Ici, on multiplie chaque durée par 16.

Note t la durée en heures et $d(t)$ la distance en km. Pour toute durée t :

$$d(t) = 16t.$$

La distance est une fonction linéaire de la durée, de coefficient 16.

Le quotient de la distance par la durée ne change pas : $\frac{32}{2} = \frac{48}{3} = 16$.

Proportionnalité et fonction linéaire

Pourquoi est-ce vrai ? Pour une fonction linéaire, l'image de x est ax.

Si on divise ax par le nombre x, il reste a, à condition que x ne soit pas nul.

Propriété : Fonction linéaire et proportionnalité

Soit f la fonction linéaire de coefficient a.

- Pour tout nombre x **non nul**, $\dfrac{f(x)}{x} = a$: les images $f(x)$ sont **proportionnelles** aux nombres x, et a est le **coefficient de proportionnalité**.
- Réciproquement, si une grandeur y est proportionnelle à une grandeur x, avec le coefficient de proportionnalité a, alors $y = ax$: la fonction qui associe y à x est la fonction linéaire de coefficient a.

Démonstration

Étape 1. Par définition de la fonction linéaire de coefficient a, on a $f(x) = ax$ pour tout nombre x.

Étape 2. Si $x \neq 0$, on peut diviser par x : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{ax}{x} = a$. Le quotient de l'image par le nombre est donc toujours le même : c'est la définition de la proportionnalité.

Étape 3. Réciproquement, dire que y est proportionnelle à x avec le coefficient a, c'est dire que $y = a \times x$ pour chaque valeur de x. La fonction $x \mapsto ax$ est, par définition, la fonction linéaire de coefficient a.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve divise l'image ax par le nombre x : le quotient vaut toujours a. Cette division n'est permise que si $x \neq 0$.

Dans l'autre sens, une proportionnalité de coefficient a s'écrit directement $y = a \times x$.

Vérifie : Une condition dans la preuve

Dans la preuve, on écrit $\dfrac{ax}{x} = a$ seulement si $x \neq 0$. Pourquoi cette condition ?

A. Parce que l'image du nombre 0 n'existe pas.

Faux.

Faux. L'image de 0 existe : $f(0) = a \times 0 = 0$.

B. Parce qu'on ne peut pas diviser par 0.

Juste.

Oui. Le quotient $\dfrac{ax}{x}$ n'a de sens que si x n'est pas nul.

C. Parce que le coefficient a doit être non nul.

Faux.

Faux. La condition porte sur x. Le coefficient a, lui, peut valoir 0.

D. Parce que le nombre x doit être positif.

Faux.

Faux. Un nombre négatif convient : $\dfrac{a \times (-2)}{-2} = a$.

Correction

On ne divise jamais par 0.

Le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ n'existe donc que pour $x \neq 0$, et il vaut alors a.

Exemple : une voiture et son carburant

Une voiture consomme 6 litres d'essence pour 100 km, soit $0{,}06$ litre par kilomètre.

Pour x km parcourus, elle consomme $c(x) = 0{,}06x$ litres : c est la fonction linéaire de coefficient $0{,}06$.

Pour 250 km :

$$c(250) = 0{,}06 \times 250 = 15$$

La voiture consomme 15 litres. Le quotient $\dfrac{15}{250}$ vaut $0{,}06$: c'est bien le coefficient de proportionnalité.

Traduire une situation

Méthode : traduire une situation de proportionnalité

1. **Repère** les deux grandeurs. Vérifie qu'elles sont proportionnelles : le quotient de l'une par l'autre ne change pas.
2. **Calcule** le coefficient : prix d'une unité, vitesse, échelle ou coefficient d'un pourcentage.
3. **Pour un pourcentage** : augmenter de t pour cent, c'est multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$. Diminuer de t pour cent, c'est multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.
4. **Écris** la fonction linéaire $x \mapsto ax$. Dis ce que représentent le nombre x et son image.

Exemple : une carte à l'échelle

Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{50\,000}$, 1 cm représente $50\,000$ cm en réalité.

Rappel : il y a $100\,000$ cm dans 1 km. Donc $50\,000$ cm font la moitié d'un kilomètre, soit $0{,}5$ km.

Note x la distance mesurée sur la carte, en cm. La distance réelle, en km, est alors $r(x) = 0{,}5x$.

Deux villages sont à 7 cm l'un de l'autre sur la carte. On calcule :

$$r(7) = 0{,}5 \times 7 = 3{,}5$$

En réalité, les deux villages sont à $3{,}5$ km l'un de l'autre.

Exemple : hausse et baisse d'un prix

Rappel de première année : prendre t pour cent d'un nombre, c'est le multiplier par $\frac{t}{100}$.

Un sac coûte 350 dirhams, et son prix augmente de 20 pour cent. On multiplie par $1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$:

$$350 \times 1{,}2 = 420$$

Le nouveau prix est 420 dirhams. La fonction $x \mapsto 1{,}2x$ traduit cette hausse.

Une baisse de 30 pour cent se traduit par $x \mapsto 0{,}7x$, car $1 - \frac{30}{100} = 0{,}7$. Le prix du sac deviendrait $350 \times 0{,}7 = 245$ dirhams.

Le piège des pourcentages

Attention : le coefficient d'une remise

Un article à 480 dirhams est soldé avec une remise de 25 pour cent.

✗ Multiplier par $0{,}25$. On obtient 120 dirhams : c'est le montant de la remise, et non le nouveau prix.

✓ Multiplier par $1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Le nouveau prix est $480 \times 0{,}75 = 360$ dirhams.

Vérifie : Une hausse de loyer

Le loyer d'un appartement augmente de 8 pour cent. Par quel nombre multiplie-t-on l'ancien loyer pour obtenir le nouveau ?

A. $0{,}08$

Faux.

Faux. Multiplier par $0{,}08$ donne le montant de la hausse, et non le nouveau loyer.

B. 8

Faux.

Faux. Multiplier par 8 rendrait le loyer huit fois plus cher.

C. $1{,}8$

Faux.

Faux. Multiplier par $1{,}8$ correspond à une hausse de 80 pour cent.

D. $1{,}08$

Juste.

Oui. $1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$.

Correction

Augmenter de 8 pour cent, c'est multiplier par $1 + \dfrac{8}{100} = 1{,}08$.

Par exemple, un loyer de $2\,500$ dirhams devient $2\,500 \times 1{,}08 = 2\,700$ dirhams.

Proportionnelle ou non ?

Exemple : Contre-exemple : un tarif avec un forfait

Un taxi demande 5 dirhams au départ, puis 3 dirhams par kilomètre. Pour 1 km, on paie 8 dirhams ; pour 2 km, on paie 11 dirhams.

Les quotients diffèrent : $\dfrac{8}{1} = 8$, mais $\dfrac{11}{2} = 5{,}5$.

Le prix n'est donc pas proportionnel à la distance : il n'est pas donné par une fonction linéaire.

À toi : une imprimante

Une imprimante imprime 18 pages par minute. Écris la fonction p qui donne le nombre de pages imprimées en t minutes. Combien de pages imprime-t-elle en $4{,}5$ minutes ? Combien de minutes faut-il pour 135 pages ?

Indice 1
Le nombre de pages est proportionnel à la durée. Quel est le coefficient ?
Indice 2
Écris la fonction p avec ce coefficient, puis calcule $p(4{,}5)$. Pour la seconde question, écris l'équation $p(t) = 135$.
Indice 3
Point délicat : la seconde question demande un nombre dont l'image est connue. On divise 135 par 18.

Réponse
La fonction. Le coefficient est 18 pages par minute : $p(t) = 18t$ pour toute durée t, en minutes.

En $4{,}5$ minutes. On calcule l'image de $4{,}5$:

$$p(4{,}5) = 18 \times 4{,}5 = 81$$

Pour 135 pages. On résout $18t = 135$:

$$t = \frac{135}{18} = 7{,}5$$

Conclusion. En $4{,}5$ minutes, l'imprimante imprime 81 pages. Il lui faut $7{,}5$ minutes pour imprimer 135 pages.

La représentation graphique : une droite

Des points dans un repère

Rappel du chapitre de géométrie analytique : dans un repère d'origine O, le point $M(x;y)$ a pour abscisse x et pour ordonnée y. L'origine est le point $O(0;0)$.

Devine : Que vont faire les points ?

Soit $f(x)=1{,}5x$. Tu places dans un repère les points $(-2;-3)$, $(0;0)$, $(2;3)$ et $(4;6)$. Que vas-tu observer ?

A. Les quatre points sont alignés avec l'origine du repère.

Juste.

Oui. Tu vas le voir sur la figure : une même droite passe par ces points et par O.

B. Les quatre points sont placés au hasard, sans aucune règle.

Faux.

Faux. Ils suivent une règle : chaque ordonnée vaut $1{,}5$ fois l'abscisse.

C. Les quatre points dessinent une courbe arrondie.

Faux.

Faux. Une courbe arrondie apparaît pour $x \mapsto x^2$, et non ici.

D. Les quatre points sont sur une même droite verticale.

Faux.

Faux. Leurs abscisses sont différentes : -2, 0, 2 et 4.

Correction

Chaque point a pour coordonnées $(x;1{,}5x)$.

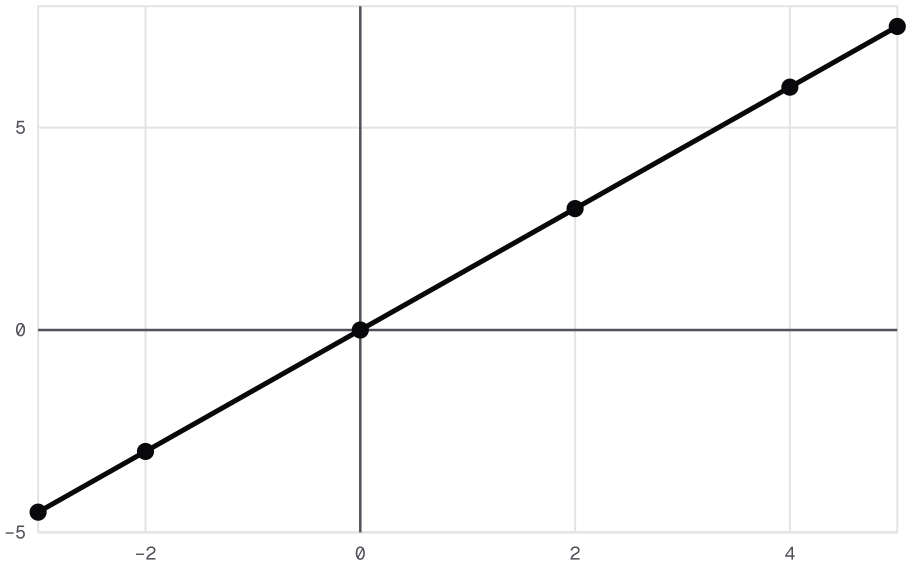
Les quatre points sont alignés avec l'origine O : ils sont sur une même droite.

Pour placer des points, on calcule d'abord quelques images par $f(x)=1{,}5x$:

x	-2	0	2	4
$f(x)$	-3	0	3	6

Chaque colonne donne un point. Son abscisse est le nombre, son ordonnée est l'image.

Observer l'alignement



Points calculés pour la fonction f, et la droite qui les porte

Sur la figure, les points calculés semblent alignés avec l'origine O. Chaque nouveau point que tu calcules semble se placer sur la même droite.

L'énoncé qui suit l'affirme pour tous les points.

L'ensemble de tous les points $(x; f(x))$ forme la **représentation graphique** de la fonction.

Vérifie : Un cinquième point

Le point $E(5; 7{,}5)$ est-il sur la droite de la figure ? Choisis la réponse correctement justifiée.

A. Non, car il ne figure pas dans le tableau de valeurs.

Faux.

Faux. Le tableau ne donne que quelques points. On compare plutôt l'ordonnée de E à l'image de son abscisse.

B. Non, car son ordonnée n'est pas un nombre entier.

Faux.

Faux. Une ordonnée peut être décimale : seul compte le calcul de l'image.

C. Oui, car $1{,}5 \times 5 = 7{,}5$.

Juste.

Oui. Son ordonnée est l'image de son abscisse par f.

D. Oui, car il est assez proche des autres points.

Faux.

Faux. La conclusion est juste, mais la raison ne prouve rien. On calcule l'image de 5 et on compare.

Correction

On calcule l'image de l'abscisse de E :

$$f(5) = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5.$$

C'est l'ordonnée de E : le point E est sur la droite.

La représentation graphique

Propriété : Représentation graphique d'une fonction linéaire

Le plan est muni d'un repère d'origine O. Soit f la fonction linéaire de coefficient a.

- La **représentation graphique** de f est l'ensemble des points $M(x; ax)$, où x est un nombre quelconque.
- C'est la **droite** qui passe par l'origine O du repère et par le point $A(1; a)$.
- Cette droite a pour équation $y = ax$: son coefficient directeur est le coefficient a de f.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu l'as observé sur des points calculés ; sa preuve générale ne fait pas partie de ce chapitre.

En clair : la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine.

Si le coefficient est a, cette droite passe aussi par le point d'abscisse 1 et d'ordonnée a.

Rappel de géométrie analytique : dans l'équation $y = ax$, le nombre a est le coefficient directeur de la droite.

Exemple : une droite et ses points

Soit g la fonction linéaire définie par $g(x) = -0{,}5x$. Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = -0{,}5x$.

Cette droite passe par $O(0; 0)$ et par $A(1; -0{,}5)$.

- Le point $B(4; -2)$ est sur la droite, car $g(4) = -0{,}5 \times 4 = -2$.
- Le point $C(2; 1)$ n'est pas sur la droite, car $g(2) = -1$ et $-1 \neq 1$.

Tracer la droite

Méthode : tracer la représentation graphique

1. **Place** l'origine O. Elle est toujours sur la droite, car l'image de 0 est 0.
2. **Choisis** un nombre non nul qui donne une image simple. Avec un coefficient en fraction, prends un multiple du dénominateur.
3. **Calcule** son image, puis **place** le point correspondant.
4. **Trace** la droite qui passe par ces deux points. **Contrôle** avec un troisième point.

Exemple : tracer une droite

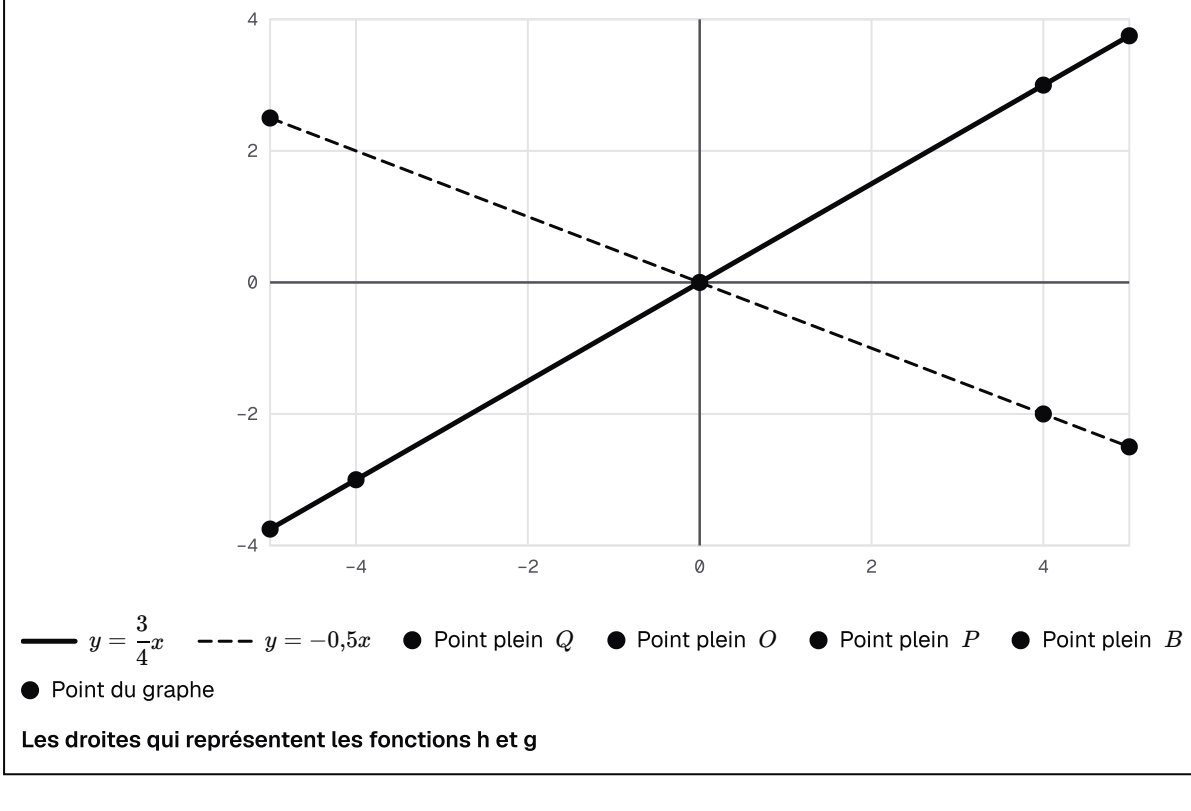
Soit h la fonction linéaire définie par $h(x) = \frac{3}{4}x$. Le dénominateur est 4 : on choisit $x = 4$.

$$h(4) = \frac{3}{4} \times 4 = 3$$

On place O et $P(4;3)$, puis on trace la droite qui passe par ces deux points.

Contrôle : $h(-4) = -3$, et le point $Q(-4;-3)$ est bien sur la droite tracée.

La figure montre aussi la droite de $g(x) = -0{,}5x$, qui passe par $B(4;-2)$.



Les droites qui représentent les fonctions h et g

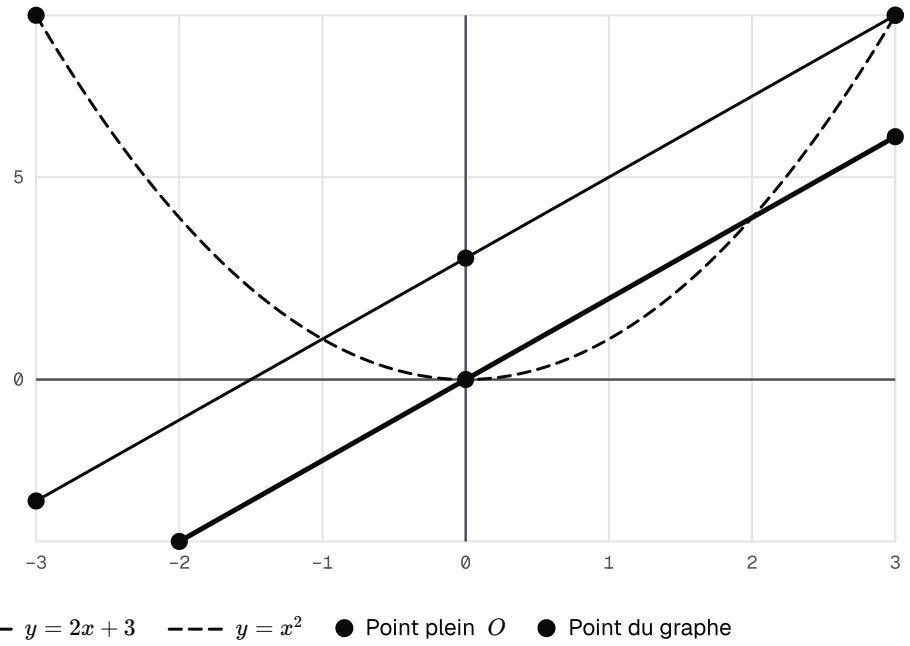
Toutes les fonctions ne sont pas linéaires

Attention : une courbe qui n'est pas une droite

Pour être linéaire, une fonction doit multiplier chaque nombre par un même nombre fixe.

✗ « L'aire d'un carré est une fonction linéaire de son côté. » Les côtés 1, 2 et 3 donnent les aires 1, 4 et 9. Or $\frac{4}{2} = 2$ et $\frac{9}{3} = 3$: les quotients diffèrent.

✓ La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas linéaire, et sa représentation n'est pas une droite. De même, $x \mapsto 2x + 3$ n'est pas linéaire, car l'image de 0 est 3.



Trois représentations : seule celle de x ↦ 2x est une droite qui passe par l'origine ; celle de x ↦ 2x + 3 coupe l'axe des ordonnées en 3, et celle de x ↦ x au carré est une courbe arrondie.

Vérifie : Quelle représentation ?

Laquelle de ces lignes peut être la représentation graphique d'une fonction linéaire ?

A. Une droite qui passe par $(0; 3)$ et par $(2; 3)$.

Faux.

Faux. L'image de 0 serait 3. Or une fonction linéaire donne toujours l'image 0 à 0.

B. Une droite qui passe par $(1; 1)$ et par $(2; 3)$.

Faux.

Faux. Les quotients $\frac{1}{1} = 1$ et $\frac{3}{2} = 1{,}5$ diffèrent : l'ordonnée n'est pas toujours le même multiple de l'abscisse.

C. Une droite qui passe par O et par le point $(2; 3)$.

Juste.

Oui. Avec $f(x) = 1{,}5x$, on a $f(2) = 3$: c'est la droite de f, d'équation $y = 1{,}5x$.

D. Une courbe arrondie qui passe par l'origine O.

Faux.
Faux. La représentation d'une fonction linéaire est une droite, jamais une courbe arrondie.

Correction
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par O.

La droite qui passe par O et par $(2;3)$ est celle de $f : x \mapsto 1{,}5x$, car $f(2) = 1{,}5 \times 2 = 3$.

À toi : sur la droite ou non ?

Soit $k(x) = -2x$. Les points $K(-3;6)$ et $J(2{,}5;-4)$ sont-ils sur la représentation graphique de k ?

Indice 1
Un point est sur la droite si son ordonnée est l'image de son abscisse.
Indice 2
Calcule $k(-3)$ et compare avec 6. Fais de même avec $k(2{,}5)$ et -4.
Indice 3
Point délicat : $-2 \times (-3)$ est positif, alors que $-2 \times 2{,}5$ est négatif.

Réponse
Point K. On compare son ordonnée à l'image de son abscisse : $k(-3) = -2 \times (-3) = 6$. C'est l'ordonnée de K.

Point J. $k(2{,}5) = -2 \times 2{,}5 = -5$, et $-5 \neq -4$.

Conclusion. Le point K est sur la représentation graphique de k ; le point J n'y est pas.

Lire une image ou un nombre sur le graphique

Lire sur une droite

Devine : Par où commencer ?

Sur la figure qui suit, la droite représente la fonction $f(x) = 0{,}8x$. Pour lire l'image de 5, d'où pars-tu ?

A. Du nombre 5 placé sur l'axe des ordonnées.
Faux.
Faux. Sur l'axe des ordonnées, on lit les images. Le nombre 5 est un nombre de départ : il se place sur l'axe des abscisses.

B. Du nombre 5 placé sur l'axe des abscisses.
Juste.
Oui. On part du nombre sur l'axe des abscisses, puis on va verticalement jusqu'à la droite.

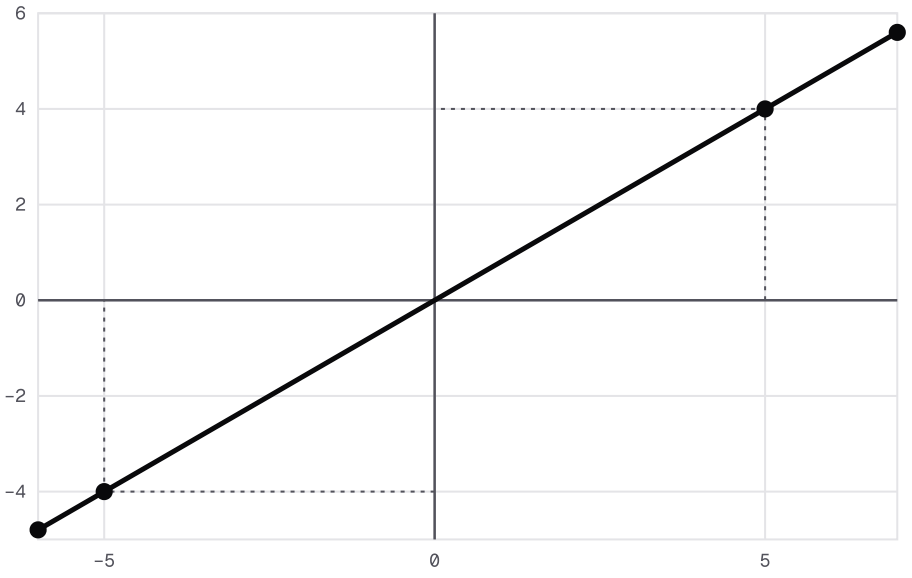
C. De l'origine du repère, en suivant la droite.
Faux.

Faux. En suivant la droite depuis O, on ne sait pas où s'arrêter. On part du nombre 5.

Correction

Le nombre 5 se place sur l'axe des abscisses.

On va verticalement jusqu'à la droite, puis on lit l'ordonnée du point atteint.



Deux lectures graphiques sur la droite de la fonction f

Pour lire l'image de 5, on part de 5 sur l'axe des abscisses.

On va verticalement jusqu'à la droite, puis horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées. On lit environ 4.

Pour trouver le nombre dont l'image est -4, on fait le trajet inverse.

On part de -4 sur l'axe des ordonnées et on va horizontalement jusqu'à la droite. On va ensuite verticalement jusqu'à l'axe des abscisses : on lit environ -5.

La méthode

Méthode : lire une image ou un nombre sur le graphique

1. **Pour une image** : pars du nombre sur l'axe des abscisses. Va verticalement jusqu'à la droite, puis lis l'ordonnée.
2. **Pour un nombre dont l'image est connue** : pars de l'image sur l'axe des ordonnées. Va horizontalement jusqu'à la droite, puis lis l'abscisse.
3. **Écris** le résultat comme une valeur lue, donc approchée.

4. **Contrôle** par le calcul quand tu connais l'expression de la fonction.

Exemple : contrôler une lecture

Sur la figure, on lit que l'image de 5 est environ 4. On écrit $f(5) \approx 4$.

Contrôle par le calcul :

$$f(5) = 0{,}8 \times 5 = 4.$$

La lecture est confirmée.

Exemple : contrôler l'autre lecture

On lit que le nombre dont l'image est -4 est environ -5.

Contrôle par le calcul : on résout $0{,}8x = -4$.

$$x = \frac{-4}{0{,}8} = -5$$

Vérification : $f(-5) = 0{,}8 \times (-5) = -4$. La lecture est confirmée.

Une lecture reste approchée

Attention : lu ne veut pas dire exact

Une lecture dépend de la finesse du tracé et de ton œil.

✗ Lire l'image de $1{,}7$ sur la figure, puis écrire $f(1{,}7) = 1{,}4$ comme un résultat exact.

✓ Écrire $f(1{,}7) \approx 1{,}4$, puis calculer : $f(1{,}7) = 0{,}8 \times 1{,}7 = 1{,}36$.

Vérifie : La lecture de Kenza

Avec la même fonction $f(x) = 0{,}8x$, Kenza lit sur la figure que l'image de 3 est environ $2{,}5$. Que doit-elle écrire ?

A. $f(3) = 2{,}5$, car elle a lu la figure avec soin.
Faux.
Faux. Une lecture reste approchée, même faite avec soin. Elle écrit $\approx$, puis elle contrôle par le calcul.

B. Un nombre entier, car une image lue est toujours entière.
Faux.
Faux. Une image n'est pas forcément un nombre entier : ici, elle vaut $2{,}4$.

C. $f(3) \approx 2{,}5$, puis le calcul exact $f(3) = 2{,}4$.

Juste.

Oui. Le calcul $0{,}8 \times 3 = 2{,}4$ donne la valeur exacte ; la lecture en était proche.

D. Que la figure est fausse, car $2{,}5$ n'est pas lu exactement.

Faux.

Faux. La figure est juste : c'est la lecture qui est approchée.

Correction

Elle écrit $f(3) \approx 2{,}5$, puis elle contrôle par le calcul :

$$f(3) = 0{,}8 \times 3 = 2{,}4.$$

La valeur exacte est $2{,}4$; la lecture en était proche.

À toi

À toi : lire puis contrôler

Sur la figure, lis l'image de $-2{,}5$, puis le nombre dont l'image est $3{,}2$. Contrôle chaque lecture par le calcul.

Indice 1

Pour l'image, pars de $-2{,}5$ sur l'axe des abscisses. Pour l'autre lecture, pars de $3{,}2$ sur l'axe des ordonnées.

Indice 2

Après tes lectures, calcule $0{,}8 \times (-2{,}5)$, puis résous l'équation $0{,}8x = 3{,}2$.

Indice 3

Point délicat : une lecture s'écrit avec $\approx$, un calcul avec $=$.

Réponse

Image de $-2{,}5$. On lit $f(-2{,}5) \approx -2$. Calcul :

$$\begin{aligned} f(-2{,}5) &= 0{,}8 \times (-2{,}5) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Nombre dont l'image est $3{,}2$. On lit environ 4. Calcul : on résout $0{,}8x = 3{,}2$.

$$x = \frac{3{,}2}{0{,}8} = 4$$

Conclusion. L'image de $-2{,}5$ est -2, et le nombre dont l'image est $3{,}2$ est 4 : les deux lectures sont confirmées.

Le mot du prof : le graphique donne une idée rapide, et le calcul donne la valeur exacte. Les deux ensemble font une réponse sûre.

Retrouver l'expression d'une fonction linéaire

Un nombre et son image

Devine : Retrouver le coefficient

Une fonction linéaire f vérifie $f(4) = 14$. Quel est son coefficient ?

A. 10

Faux.

Faux. Tu as calculé $14 - 4$. Or $10 \times 4 = 40$, et non 14.

B. 56

Faux.

Faux. Tu as multiplié 14 par 4. Or $56 \times 4 = 224$, et non 14.

C. $\frac{2}{7}$

Faux.

Faux. $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$: tu as divisé le nombre par son image. Il faut faire l'inverse.

D. $3{,}5$

Juste.

Oui. $3{,}5 \times 4 = 14$.

Correction

On a $f(4) = a \times 4 = 14$. On divise par 4 :

$$a = \frac{14}{4} = 3{,}5$$

Vérification : $3{,}5 \times 4 = 14$. Le coefficient est $3{,}5$.

Une fonction linéaire est connue dès qu'on connaît son coefficient.

Or un seul nombre non nul et son image suffisent pour le trouver : on divise l'image par le nombre.

Exemple : à partir d'un nombre et de son image

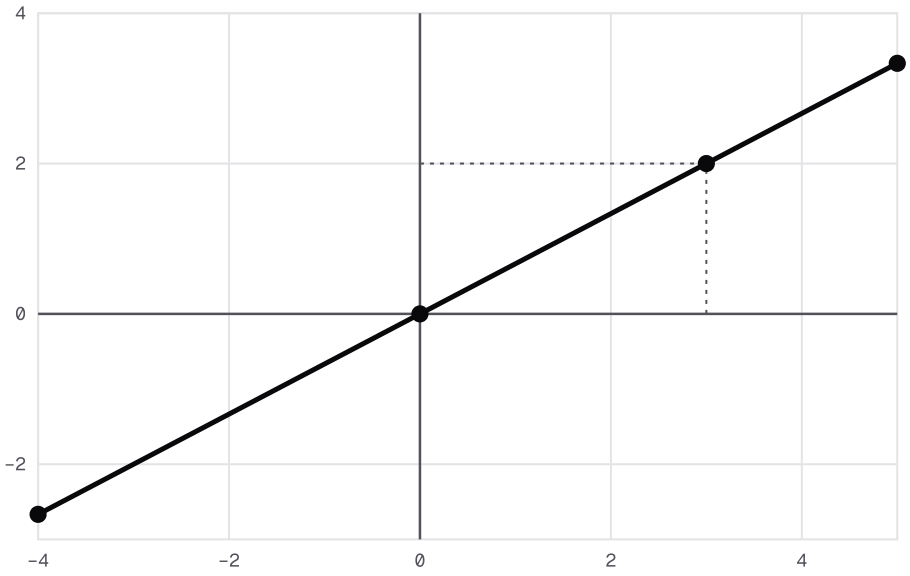
Une fonction linéaire g vérifie $g(-6) = 9$. On écrit $g(x) = ax$: alors $a \times (-6) = 9$.

$$a = \frac{9}{-6} = -1{,}5$$

Donc $g(x) = -1{,}5x$ pour tout nombre x.

Vérification : $g(-6) = -1{,}5 \times (-6) = 9$.

À partir d'un point



(D) ● Point plein O ● Point plein $M(3;2)$ ● Point du graphe

La droite (D) passant par O et par le point M

Sur la figure, la droite (D) passe par l'origine et par le point $M(3;2)$.

Si (D) représente une fonction linéaire f, alors $f(3)=2$. Le coefficient vaut donc $\frac{2}{3}$, et :

$$f(x)=\frac{2}{3}x.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Rappel de géométrie analytique : une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite $y=mx+p$.

Si elle passe par O, on remplace x et y par 0 : on trouve $p=0$, donc $y=mx$.

Le nombre m est alors le coefficient de la fonction linéaire.

Droite passant par l'origine

Propriété : Droite passant par l'origine du repère

Le plan est muni d'un repère d'origine O. Soit (D) une droite qui passe par O et qui n'est pas l'axe des ordonnées.

- (D) est la représentation graphique d'une fonction linéaire f.
- Si $M(x_M;y_M)$ est un point de (D) **distinct de** O, alors $x_M\neq 0$ et le coefficient de f est $a=\frac{y_M}{x_M}$.

Démonstration

Étape 1. Par le point O passe une seule parallèle à l'axe des ordonnées : cet axe lui-même. La droite (D) passe par O et n'est pas cet axe : elle n'est donc pas parallèle à l'axe des ordonnées. D'après la géométrie analytique, elle a donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$.

Étape 2. Le point $O(0;0)$ est sur (D) : $0 = m \times 0 + p$, donc $p = 0$. L'équation de (D) est $y = mx$. D'après la représentation graphique d'une fonction linéaire, (D) représente la fonction linéaire $f : x \mapsto mx$.

Étape 3. Le point M est sur (D), donc $y_M = m\,x_M$. Si on avait $x_M = 0$, on aurait aussi $y_M = 0$, et M serait le point O. Donc $x_M \neq 0$, et on divise par x_M : $m = \dfrac{y_M}{x_M}$. Le coefficient de f est donc $a = m = \dfrac{y_M}{x_M}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve part de l'équation réduite $y = mx + p$. Le point O donne $p = 0$, et le coefficient a de f est ce nombre m.

Avant de diviser par x_M, elle vérifie que $x_M \neq 0$: sinon, le point M serait O.

Vérifie : Une précaution dans la preuve

Dans la preuve, pourquoi le point M doit-il être distinct de O ?

A. Pour avoir $x_M \neq 0$ et pouvoir diviser par x_M.

Juste.

Oui. Si on avait $x_M = 0$, on aurait aussi $y_M = 0$: le point M serait O.

B. Parce que O n'est pas un point de la droite (D).

Faux.

Faux. La droite (D) passe par O : c'est l'énoncé qui le donne.

C. Pour avoir $y_M \neq 0$ et pouvoir diviser par y_M.

Faux.

Faux. On divise par x_M, et non par y_M : le coefficient est $\dfrac{y_M}{x_M}$.

D. Pour que la droite (D) ait une équation réduite.

Faux.

Faux. L'équation réduite vient de ce que l'énoncé donne : (D) passe par O et n'est pas l'axe des ordonnées.

Correction

Le coefficient s'obtient en divisant par x_M. Si M était O, on aurait $x_M = 0$, et cette division serait impossible.

Avec M distinct de O, on a $x_M \neq 0$, donc :

$$a = \frac{y_M}{x_M}.$$

Exemple : Contre-exemple : l'axe des ordonnées

L'axe des ordonnées passe par O, mais il ne représente aucune fonction linéaire.

Les points $(0;1)$ et $(0;2)$ sont sur cet axe : le nombre 0 aurait deux images, 1 et 2.

Or une fonction donne une seule image à chaque nombre. C'est pourquoi l'énoncé exclut cet axe.

La méthode

Méthode : déterminer l'expression d'une fonction linéaire

1. **Écris** $f(x) = ax$. Il reste un seul nombre à trouver : le coefficient a.
2. **Avec un nombre et son image** : si $f(x_0) = y_0$ et $x_0 \neq 0$, alors $a = \dfrac{y_0}{x_0}$.
3. **Avec un point de la droite** $M(x_M ; y_M)$, autre que O : $a = \dfrac{y_M}{x_M}$.
4. **Conclus** en écrivant l'expression de f, puis **vérifie** avec la donnée de départ.

Attention : quel nombre divise l'autre ?

On sait que $f(8) = 6$.

✗ $a = \dfrac{8}{6}$: on a divisé le nombre par son image. Alors $\dfrac{8}{6} \times 8$ ne vaut pas 6.

✓ $a = \dfrac{6}{8} = 0{,}75$: on divise l'image par le nombre. Vérification : $0{,}75 \times 8 = 6$.

Trouve l'erreur : Le coefficient de Yassine

Yassine lit le point $M(-2;5)$ sur une droite qui passe par O. Il écrit : « $a = \dfrac{-2}{5} = -0{,}4$ ». Où est son erreur ?

A. Le coefficient de cette droite devrait être positif.

Faux.

Faux. Le coefficient est bien négatif, car 5 et -2 sont de signes contraires.

B. Il a divisé l'abscisse par l'ordonnée.

Juste.

Oui. Il faut diviser l'ordonnée par l'abscisse : $a = \dfrac{5}{-2} = -2{,}5$.

C. Le quotient $\dfrac{-2}{5}$ ne vaut pas $-0{,}4$.

Faux.

Faux. $\dfrac{-2}{5} = -0{,}4$ est juste. L'erreur est dans le choix du quotient.

D. On ne peut pas trouver le coefficient avec ce point.

Faux.

Faux. M est distinct de O : il suffit pour trouver le coefficient.

Correction

Le coefficient est l'ordonnée divisée par l'abscisse :

$$a = \frac{5}{-2} = -2{,}5$$

Vérification : $-2{,}5 \times (-2) = 5$. Donc $f(x) = -2{,}5x$.

À toi : deux expressions

Trouve l'expression de la fonction linéaire f telle que $f(5) = -4$. Trouve ensuite l'expression de la fonction linéaire g dont la droite passe par le point $N(-5; -12)$.

Indice 1

Écris $f(x) = ax$ et $g(x) = bx$. Le coefficient est l'image divisée par le nombre.

Indice 2

Pour f : $a = \frac{-4}{5}$. Pour g : divise l'ordonnée de N par son abscisse.

Indice 3

Point délicat : le quotient de deux nombres négatifs est positif. Vérifie chaque expression.

Réponse

Fonction f. Son coefficient est $a = \frac{-4}{5} = -0{,}8$, donc $f(x) = -0{,}8x$. Vérification : $f(5) = -0{,}8 \times 5 = -4$.

Fonction g. Note b son coefficient. Le point N est distinct de O, donc $b = \frac{-12}{-5} = 2{,}4$ et $g(x) = 2{,}4x$. Vérification : $g(-5) = 2{,}4 \times (-5) = -12$.

Conclusion. Les fonctions cherchées sont $f : x \mapsto -0{,}8x$ et $g : x \mapsto 2{,}4x$.

Des écarts proportionnels

Comparer des écarts

Devine : Un écart de six

Soit $f(x) = 4{,}5x$. On passe de $x = 4$ à $x = 10$. L'**écart** entre ces deux nombres est leur différence : $10 - 4 = 6$. De combien augmente l'image ?

A. De 6

Faux.

Faux. L'écart des images n'est pas celui des nombres : $f(10) - f(4) = 45 - 18 = 27$.

B. De 27

Juste.
Oui. $f(10) - f(4) = 45 - 18 = 27$, et $27 = 4{,}5 \times 6$.

C. De 45
Faux.
Faux. 45 est l'image de 10. On demande l'écart entre deux images.

D. De $10{,}5$
Faux.
Faux. Tu as ajouté $4{,}5$ et 6. L'écart des images se calcule par une soustraction.

Correction
On calcule les deux images : $f(10) = 45$ et $f(4) = 18$. L'image augmente donc de $45 - 18 = 27$.

C'est $4{,}5$ fois l'écart des nombres : $4{,}5 \times 6 = 27$.

Avec $f(x) = 4{,}5x$, compare les écarts dans ce tableau :

x	2	4	8
$f(x)$	9	18	36

- De 2 à 4, le nombre augmente de 2 et l'image de 9.
- De 4 à 8, le nombre augmente de 4 et l'image de 18.

Chaque fois, l'écart des images vaut $4{,}5$ fois l'écart des nombres.

Un écart s'appelle aussi un **accroissement** : c'est la différence entre deux nombres, ou entre leurs deux images.

Accroissements proportionnels

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux images valent a fois les deux nombres. Quand on les soustrait, on peut mettre a en facteur : c'est la distributivité.

Rappel : la distributivité dit que $k \times m - k \times n = k \times (m - n)$, pour tous nombres k, m et n.

Propriété : Accroissements proportionnels

Soit f la fonction linéaire de coefficient a. Pour tous nombres x_1 et x_2,

$$f(x_1) - f(x_2) = a\,(x_1 - x_2).$$

Si $x_1 \neq x_2$, alors $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a$: l'écart entre deux images est proportionnel à l'écart entre les deux nombres, avec le même coefficient a.

Démonstration

Étape 1. Par définition, $f(x_1) = a\,x_1$ et $f(x_2) = a\,x_2$.

Étape 2. On soustrait, puis on factorise par a (distributivité) : $f(x_1) - f(x_2) = a\,x_1 - a\,x_2 = a\,(x_1 - x_2)$.

Étape 3. Si $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 - x_2 \neq 0$ et on peut diviser les deux membres par $x_1 - x_2$: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve écrit chaque image comme a fois le nombre, puis soustrait. La distributivité permet de mettre a en facteur.

On ne divise par $x_1 - x_2$ que si cet écart n'est pas nul.

Vérifie : La règle de calcul de la preuve

Dans la preuve, quelle règle permet d'écrire $a\,x_1 - a\,x_2 = a\,(x_1 - x_2)$?

A. La règle des signes pour le produit de deux nombres.

Faux.

Faux. On n'étudie aucun signe ici : on regroupe deux produits qui ont le facteur a en commun.

B. L'égalité des produits en croix de deux quotients.

Faux.

Faux. Les produits en croix servent à comparer deux quotients, et non à factoriser.

C. La distributivité, utilisée pour factoriser par a.

Juste.

Oui. C'est l'égalité $k \times m - k \times n = k \times (m - n)$, avec $k = a$.

D. La résolution d'une équation dont x_1 est l'inconnue.

Faux.

Faux. On ne cherche aucune inconnue : on transforme une expression.

Correction

On factorise par a grâce à la distributivité :

$$a\,x_1 - a\,x_2 = a\,(x_1 - x_2).$$

Exemple : un coefficient négatif

Soit h la fonction linéaire définie par $h(x) = -4x$, avec $x_1 = 5$ et $x_2 = 2$. On a $h(5) = -20$ et $h(2) = -8$.

$$\begin{aligned} h(5) - h(2) &= -20 - (-8) \\ &= -12 \end{aligned}$$

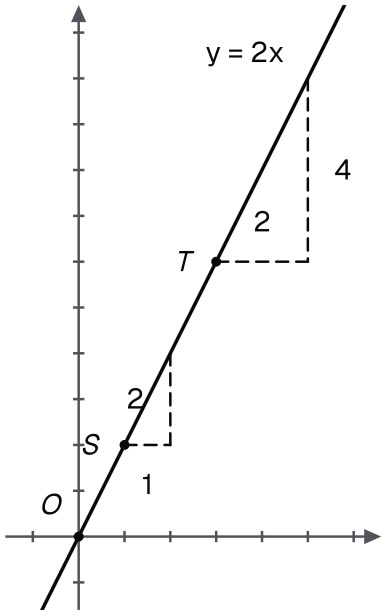
Et $-4 \times (5-2) = -4 \times 3 = -12$: l'égalité est vérifiée.

Si $x_1 = x_2$, l'écart des nombres est nul : on ne peut plus diviser par cet écart.

Le lien avec la droite

Sur la représentation graphique, cet énoncé se voit : quand l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée change de a.

C'est le sens du coefficient directeur de la droite $y = ax$, vu en géométrie analytique.



Sur la droite d'équation y = 2x, un pas de 1 en abscisse depuis S fait changer l'ordonnée de 2 ; depuis T, un écart de 2 en abscisse donne un écart de 4 en ordonnée.

À toi : retrouver un coefficient

Une fonction linéaire f vérifie $f(7) - f(3) = 10$. Quel est son coefficient ? Calcule ensuite $f(3)$.

Indice 1
Utilise les accroissements proportionnels : l'écart des images vaut a fois l'écart des nombres.
Indice 2
L'écart des nombres est $7 - 3 = 4$. Résous l'équation $a \times 4 = 10$.
Indice 3
Point délicat : une fois a trouvé, $f(3)$ se calcule avec l'expression $f(x) = ax$.

Réponse
D'après les accroissements proportionnels :

$$\begin{aligned} f(7) - f(3) &= a\,(7-3) \\ &= 4a \end{aligned}$$

Donc $4a = 10$, et $a = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$.

Conclusion. Pour tout nombre x, $f(x) = 2{,}5x$. Alors $f(3) = 2{,}5 \times 3 = 7{,}5$.

Résoudre un problème avec une fonction linéaire

Traduire l'énoncé

Devine : Choisir la bonne fonction

Une agence loue des scooters à $1{,}8$ dirham par kilomètre parcouru. Quelle fonction donne le prix $f(x)$, en dirhams, pour x km ?

A. $f(x) = 1{,}8x$

Juste.

Oui. Le prix est proportionnel à la distance, avec le coefficient $1{,}8$.

B. $f(x) = x + 1{,}8$

Faux.

Faux. Le prix ne s'obtient pas en ajoutant : chaque kilomètre coûte $1{,}8$ dirham.

C. $f(x) = \dfrac{x}{1{,}8}$

Faux.

Faux. Diviser par $1{,}8$ rendrait chaque kilomètre moins cher qu'un dirham.

D. $f(x) = 1{,}8$

Faux.

Faux. Le prix dépend de la distance : il n'est pas toujours le même.

Correction

Le prix est proportionnel à la distance : on multiplie le nombre de kilomètres par $1{,}8$.

Donc $f(x) = 1{,}8x$.

Voici le problème. Une seconde agence demande 63 dirhams pour 30 km, et son prix est aussi proportionnel à la distance. Leïla veut parcourir 120 km : quelle offre est la moins chère ?

Elle dispose aussi d'un budget de 126 dirhams. Jusqu'où peut-elle aller avec chaque offre ?

Exemple : Résolution : traduire

Première agence : $f(x) = 1{,}8x$.

Seconde agence : le coefficient est $\dfrac{63}{30} = 2{,}1$ dirhams par km, donc $g(x) = 2{,}1x$.

Ici, x est la distance en km ; $f(x)$ et $g(x)$ sont les prix en dirhams.

Calculer et conclure

Exemple : Résolution : calculer

Pour 120 km. On calcule les deux prix :

- $f(120) = 1{,}8 \times 120 = 216$;
- $g(120) = 2{,}1 \times 120 = 252$.

Avec 126 dirhams. On cherche les nombres dont l'image est 126 :

- $1{,}8x = 126$ donne $x = \dfrac{126}{1{,}8} = 70$;
- $2{,}1x = 126$ donne $x = \dfrac{126}{2{,}1} = 60$.

On conclut par des phrases. Pour 120 km, la première agence est la moins chère : 216 dirhams au lieu de 252.

Avec 126 dirhams, Leïla peut parcourir 70 km avec la première offre, et seulement 60 km avec la seconde.

Remarque : Coin rédaction

Pour un problème, rédige chaque question en trois temps : la fonction, le calcul, la phrase de conclusion. Par exemple : « Le prix pour x km est $f(x) = 1{,}8x$. On a $f(120) = 1{,}8 \times 120 = 216$. Pour 120 km, Leïla paie 216 dirhams. »

D'autres situations

Exemple : convertir des unités

Un pouce mesure $2{,}54$ cm. La longueur en cm d'un objet mesuré en pouces est donc $c(x) = 2{,}54x$.

Pour un écran de 15 pouces de diagonale :

$$c(15) = 2{,}54 \times 15 = 38{,}1$$

La diagonale de cet écran mesure $38{,}1$ cm.

À toi : la masse de l'huile

En sciences, on mesure qu'un litre d'huile a une masse de $0{,}92$ kg. La masse est proportionnelle au volume. Écris la fonction m qui donne la masse de V litres d'huile. Calcule la masse de 5 litres, puis le volume de 23 kg d'huile.

Indice 1

> Le coefficient est la masse d'un seul litre.
> **Indice 2**
> Écris la fonction m avec ce coefficient, puis calcule $m(5)$ et résous l'équation $0{,}92V = 23$.
> **Indice 3**
> Point délicat : la seconde question cherche un volume, donc un nombre dont l'image est 23. Termine par une phrase avec l'unité.
>
> **Réponse**
> **La fonction.** La masse est proportionnelle au volume, de coefficient $0{,}92$: $m(V) = 0{,}92V$.
>
> **Masse de 5 litres.**
>
> $$m(5) = 0{,}92 \times 5 = 4{,}6$$
>
> **Volume de 23 kg.** On résout $0{,}92V = 23$:
>
> $$V = \frac{23}{0{,}92} = 25$$
>
> **Conclusion.** La masse de 5 litres d'huile est $4{,}6$ kg, et 23 kg d'huile occupent 25 litres.

Le mot du prof : tu sais maintenant traduire une situation par une fonction linéaire, calculer, lire et conclure. C'est exactement ce qu'un problème te demande.

Ce qu'il faut retenir

Voici la carte du chapitre, en mots.

- **Définition** : une fonction linéaire de coefficient a s'écrit $f(x) = ax$.
- **Image** : on remplace x par le nombre, puis on calcule.
- **Nombre dont l'image est connue** : on résout $ax = b$, avec $a \neq 0$.
- **Proportionnalité** : $\dfrac{f(x)}{x} = a$ pour tout nombre x non nul.
- **Représentation graphique** : la droite d'équation $y = ax$, qui passe par O.
- **Expression** : $a = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$ pour un nombre x_0 non nul.
- **Écarts** : l'écart des images vaut a fois l'écart des nombres.

Pour réviser en quelques minutes, ouvre le Résumé du chapitre. Pour t'entraîner, passe aux exercices : d'abord l'application, puis l'entraînement, enfin les exercices de niveau examen régional.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les fonctions linéaires » (3ac · general · mathematiques)