BURHAN

Les fonctions affines : Résumé

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/fonctions-affines/resume

Chapitre	Semestre
Les fonctions affines	Semestre 2

Fonction affine et image d'un nombre

Une fonction affine fait toujours la même chose avec un nombre x : elle le multiplie par a, puis elle ajoute b. Ce Résumé rassemble ce qu'il faut savoir faire avec elle.

Définition : Fonction affine

Soit a et b deux nombres réels fixés. La **fonction affine** f de coefficients a et b est la fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre $ax + b$. On note :

$$f : x \mapsto ax + b$$

ou :

$$f(x) = ax + b.$$

- Le nombre a est le **coefficient** de f.
- Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** de f : c'est l'image de 0, car $f(0) = b$.
- Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par f.

Cas particuliers : si $b = 0$, la fonction $f : x \mapsto ax$ est une **fonction linéaire** ; si $a = 0$, la fonction $f : x \mapsto b$ est une **fonction constante**.

Exemple : Lire le coefficient et l'ordonnée à l'origine

Prenons $g(x) = 3x - 5$. Le nombre qui multiplie x est 3 : le coefficient est $a = 3$. Le nombre ajouté est -5 : l'ordonnée à l'origine est $b = -5$.

- La fonction $x \mapsto 2x$ est linéaire, car $b = 0$.
- La fonction $x \mapsto 4$ est constante, car $a = 0$.

Méthode : Calculer l'image d'un nombre

1. **Remplacer** : tu écris le nombre à la place de x. S'il est négatif, tu le mets entre parenthèses. Une fraction positive s'écrit sans parenthèses, comme dans $3 \times \frac{2}{3}$.
2. **Multiplier** : tu calcules d'abord le produit par a.
3. **Ajouter** : tu ajoutes ensuite b.

4. **Conclure** : tu écris une phrase, par exemple « l'image de -2 par g est -11 ».

Exemple : Deux images calculées

Avec $g(x) = 3x - 5$:

$$\begin{aligned} g(-2) &= 3 \times (-2) - 5 \\ &= -6 - 5 = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2}{3}\right) &= 3 \times \frac{2}{3} - 5 \\ &= 2 - 5 = -3 \end{aligned}$$

L'image de -2 par g est -11. L'image de $\frac{2}{3}$ par g est -3.

Attention : Confondre le coefficient et l'ordonnée à l'origine

Dans $h(x) = 7 - 2x$, le coefficient n'est pas 7. Écris d'abord le terme en x : $h(x) = -2x + 7$. Le coefficient est $a = -2$, et l'ordonnée à l'origine est $b = 7$.

Attention : Oublier les parenthèses autour d'un nombre négatif

Pour $u(x) = -2x + 1$, l'image de -4 se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} u(-4) &= -2 \times (-4) + 1 \\ &= 8 + 1 = 9 \end{aligned}$$

Sans parenthèses, on lit $-2 - 4 + 1$ et on trouve -5 : c'est faux.

Trouver le nombre dont l'image est connue

Méthode : Trouver le nombre dont l'image est connue

On connaît l'image k et on cherche le nombre x, avec $a \neq 0$.

1. **Écrire l'équation** : $ax + b = k$.
2. **Résoudre** : tu retranches b aux deux membres, puis tu divises les deux membres par a.
3. **Vérifier** : tu calcules l'image du nombre trouvé.
4. **Conclure** : « le nombre dont l'image par f est k est … ».

Exemple : Un nombre retrouvé

Avec $g(x) = 3x - 5$, on cherche le nombre dont l'image est 7.

- L'équation est $3x - 5 = 7$.

- On retranche $b = -5$ aux deux membres, c'est-à-dire qu'on ajoute 5 : $3x = 12$.
- On divise les deux membres par 3 : $x = 4$.
- Vérification : $g(4) = 12 - 5 = 7$.

Le nombre dont l'image par g est 7 est 4.

Remarque : Le cas d'une fonction constante

Si $a = 0$, la fonction vaut b pour tout nombre. Quand $k \neq b$, aucun nombre n'a pour image k. Quand $k = b$, tous les nombres conviennent.

Des accroissements proportionnels

Propriété : Proportionnalité des accroissements

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Pour deux nombres **différents** x_1 et x_2 :

$$f(x_1) - f(x_2) = a\,(x_1 - x_2)$$

donc :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a.$$

Les accroissements des images sont proportionnels aux accroissements des nombres, et le coefficient de proportionnalité est a.

À retenir : En clair

Quand x augmente de 1, l'image change de a. Quand x augmente de 3, l'image change de $3a$. Le changement de l'image est proportionnel au changement de x.

Exemple : Retrouver le coefficient

Avec $v(x) = -2x + 9$, on a $v(1) = 7$ et $v(4) = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{v(4) - v(1)}{4 - 1} &= \frac{1 - 7}{3} \\ &= \frac{-6}{3} = -2.\end{aligned}$$

On retrouve le coefficient de v, qui vaut -2.

Attention : Une fonction affine non linéaire n'est pas une situation de proportionnalité

Avec $w(x) = 3x + 4$, on a $w(1) = 7$ et $w(3) = 13$.

Tripler x ne triple pas l'image : $3 \times 7 = 21$ et $21 \neq 13$.

Ce sont les accroissements qui sont proportionnels : $13 - 7 = 3 \times (3 - 1)$.

La représentation graphique : une droite

Propriété : Représentation graphique d'une fonction affine

Dans un repère du plan, la **représentation graphique** de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est l'ensemble des points $M(x ; f(x))$. C'est la **droite** d'équation réduite :

$$y = ax + b.$$

- Cette droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; b)$.
- Son coefficient directeur est le coefficient a de f.
- Un point $M(x ; y)$ appartient à cette droite si, et seulement si, $y = f(x)$.

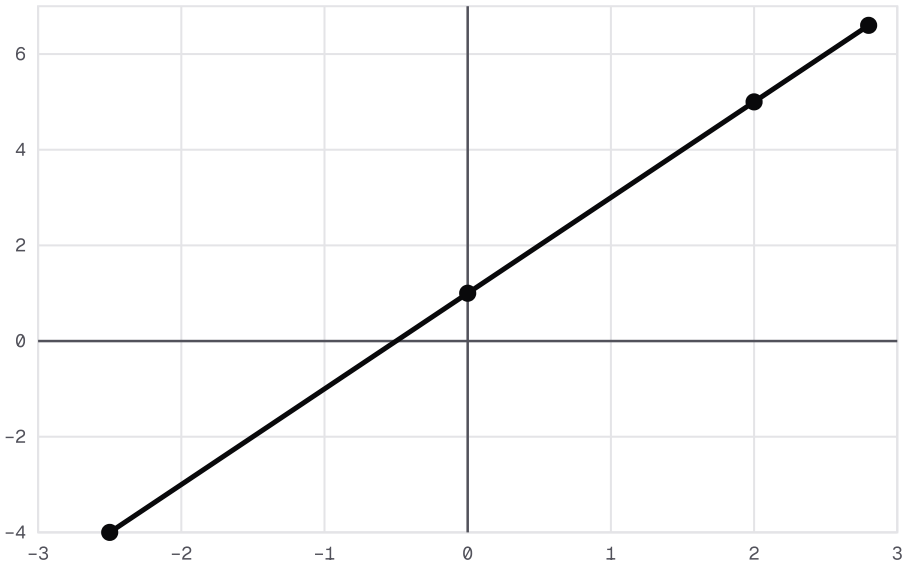
Si f est linéaire ($b = 0$), la droite passe par l'origine du repère. Si f est constante ($a = 0$), la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Remarque

Ce résultat est admis au collège. Tu l'utilises pour tracer et pour lire.

À retenir : En clair

Tous les points $(x ; f(x))$ forment une droite. Le point $(0 ; b)$ en fait partie : il est sur l'axe des ordonnées. Pour la droite, on parle de **coefficient directeur** : il est égal au coefficient a de f.



f ● Point plein $(0;1)$ ● Point plein $M(2;5)$ ● Point du graphe

Exemple : la droite de x ↦ 2x + 1 coupe l'axe des ordonnées en (0 ; 1), et le point M(2 ; 5) est sur la droite, car 2 × 2 + 1 = 5.

Méthode : Tracer la représentation graphique

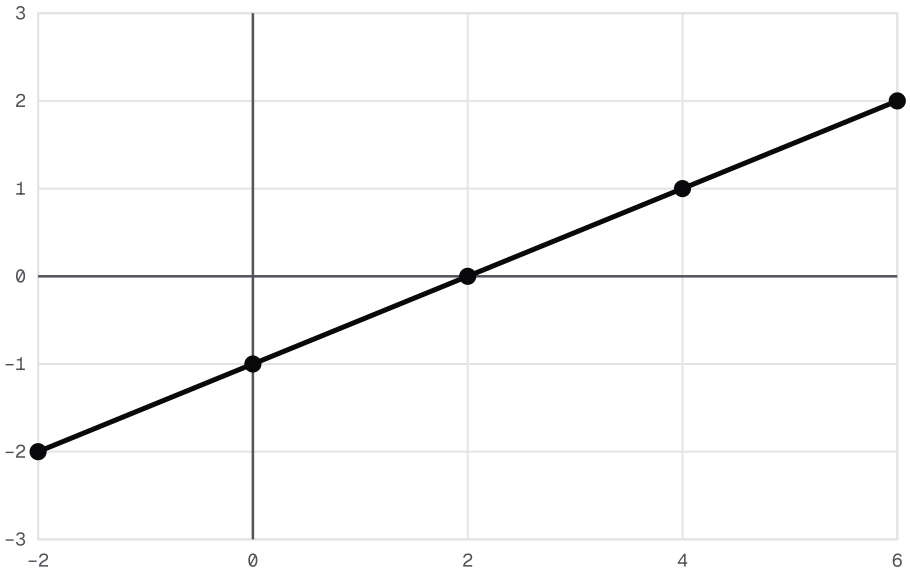
1. **Deux nombres** : tu choisis deux nombres simples, par exemple 0 et un autre, et tu calcules leurs images.
2. **Deux points** : tu places les deux points obtenus. Le point $(0;b)$ est sur l'axe des ordonnées.
3. **La droite** : tu traces la droite qui passe par ces deux points.
4. **Un contrôle** : tu calcules un troisième point. Il doit tomber sur ta droite.

Exemple : Une droite tracée par deux points

Pour $p(x) = \frac{1}{2}x - 1$:

- $p(0) = -1$, d'où le point $A(0;-1)$;
- $p(4) = 2 - 1 = 1$, d'où le point $B(4;1)$;
- contrôle : $p(2) = 1 - 1 = 0$, donc $C(2;0)$ est sur la droite (AB).

La représentation graphique de p est la droite (AB).



La droite de p passe par A(0 ; –1) et B(4 ; 1) ; le point de contrôle C(2 ; 0) est sur la droite (AB).

Méthode : Lire une image ou un nombre sur la droite

- **Une image** : tu pars de x_0 sur l'axe des abscisses. Tu vas verticalement jusqu'à la droite. Tu lis l'ordonnée du point atteint.
- **Un nombre dont l'image est connue** : tu pars de k sur l'axe des ordonnées. Tu vas horizontalement jusqu'à la droite. Tu lis l'abscisse du point atteint.

Une lecture graphique donne une valeur **approchée**. Si tu connais l'expression de f, tu confirmes par le calcul.

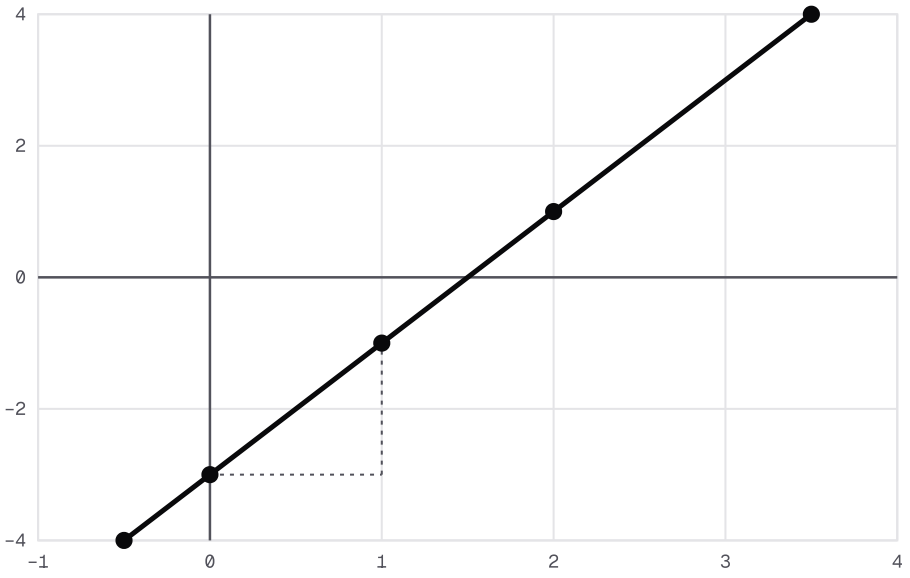
Méthode : Lire le coefficient et l'ordonnée à l'origine

1. **L'ordonnée à l'origine** : tu regardes où la droite traverse l'axe des ordonnées ; l'ordonnée de ce point est b.
2. **Le coefficient** : depuis un point de la droite, tu avances de 1 vers la droite. Tu comptes de combien tu montes ou tu descends pour revenir sur la droite. Si tu montes, a est positif ; si tu descends, a est négatif.
3. **Avec deux points lisibles** : tu peux aussi calculer a par le quotient des accroissements.

Exemple : Lire le coefficient et l'ordonnée à l'origine sur une droite

Une droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0;-3)$: donc $b=-3$. Depuis ce point, tu avances de 1 vers la droite. Tu dois monter de 2 pour revenir sur la droite : donc $a=2$.

La droite représente la fonction $x \mapsto 2x - 3$. Contrôle : si le point $(2; 1)$ est lisible sur la droite, il doit vérifier $2 \times 2 - 3 = 1$, ce qui est le cas.

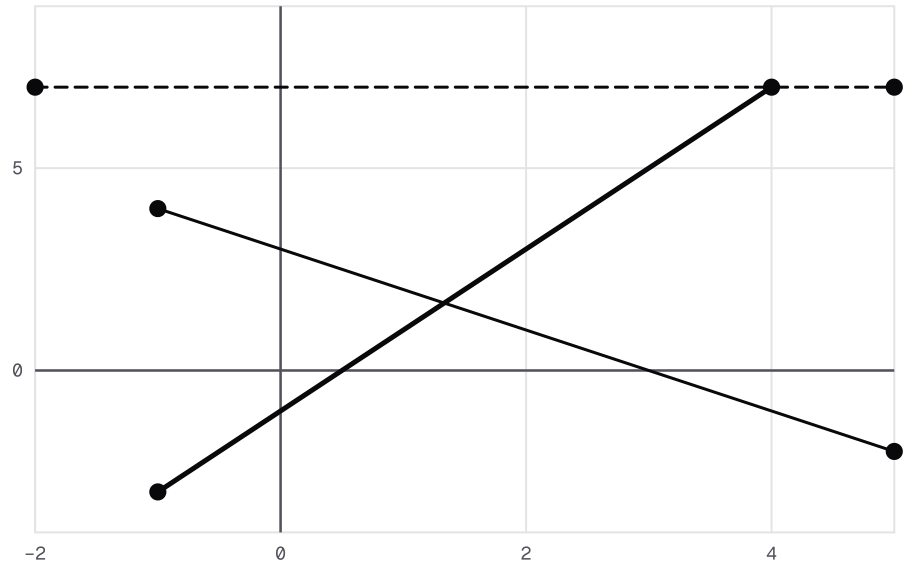


Courbe 1 ● Point plein $(0; -3)$ ● Point plein $(1; -1)$ ● Point plein $(2; 1)$ ------ 1 ------ 2
● Point du graphe

Depuis (0 ; −3) : un pas de 1 vers la droite, une montée de 2 jusqu'à la droite. Donc b = −3 et a = 2 ; le point (2 ; 1) confirme.

Remarque : Le signe du coefficient sur le dessin

Parcours la droite de la gauche vers la droite. Si $a > 0$, elle monte. Si $a < 0$, elle descend. Si $a = 0$, elle est horizontale.



Trois coefficients, trois sens : avec 2, positif, la droite de r monte ; avec –1, négatif, celle de m descend ; avec 0, celle de k reste horizontale.

Attention : Prendre une lecture graphique pour une valeur exacte

Pour $r(x) = 3x + 1$, on cherche le nombre dont l'image est 3. Sur le graphique, tu lis environ $0{,}7$.

Le calcul donne $3x + 1 = 3$, puis $3x = 2$, donc $x = \dfrac{2}{3}$.

Or $\dfrac{2}{3} \neq 0{,}7$: la lecture n'était qu'une valeur approchée.

Attention : Toute représentation graphique n'est pas une droite

L'aire d'un carré de côté x est x^2. Pour $x = 2$, 3 et 4, l'aire vaut 4, 9 et 16.

Quand x augmente de 1, l'aire augmente de 5, puis de 7. Les accroissements ne sont pas proportionnels.

Cette fonction n'est donc pas affine : sur un graphique, ses points ne sont pas alignés.

Retrouver une fonction affine

Propriété : Fonction affine déterminée par deux nombres et leurs images

Soit x_1 et x_2 deux nombres **différents**, et y_1 et y_2 deux nombres. Il existe une seule fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ telle que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Ses coefficients sont :

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

et :

$$b = y_1 - a\,x_1.$$

En particulier, deux points d'abscisses différentes $A(x_1;y_1)$ et $B(x_2;y_2)$ déterminent une seule fonction affine dont la représentation graphique passe par A et B.

À retenir : En clair

Deux images de nombres différents suffisent : elles fixent la fonction affine. Tu trouves a avec les accroissements, puis b avec une image.

Propriété : Fonction affine déterminée par son coefficient et un nombre et son image

Soit a un nombre, et x_1 et y_1 deux nombres. Il existe une seule fonction affine f de coefficient a telle que $f(x_1)=y_1$. C'est la fonction

$$f : x \mapsto ax+b$$

avec :

$$b = y_1 - a\,x_1.$$

À retenir : En clair

Si tu connais déjà le coefficient a, une seule image suffit pour trouver b.

Méthode : Retrouver une fonction affine

On connaît deux nombres différents x_1 et x_2 et leurs images y_1 et y_2.

1. **Le coefficient** : $a = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. Tu gardes le même ordre en haut et en bas.
2. **L'ordonnée à l'origine** : $b = y_1 - a\,x_1$.
3. **L'expression et le contrôle** : tu écris $f(x)=ax+b$, puis tu vérifies que $f(x_2)=y_2$.

Si le coefficient est déjà connu, tu commences à l'étape 2.

Exemple : Avec deux nombres et leurs images

On cherche la fonction affine f telle que $f(2)=5$ et $f(5)=11$.

- Coefficient : $a = \dfrac{11-5}{5-2} = \dfrac{6}{3} = 2$.
- Ordonnée à l'origine : $b = 5 - 2\times 2 = 1$.
- Expression : $f(x)=2x+1$. Contrôle : $f(5)=10+1=11$.

Exemple : Avec deux points de la droite

La droite passe par $A(-2;7)$ et $B(1;1)$. Le coefficient est :

$$a = \frac{1-7}{1-(-2)} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Puis $b = 1-(-2)\times 1 = 1+2 = 3$. La fonction est $x \mapsto -2x+3$.

Contrôle avec A : $-2\times(-2)+3 = 4+3 = 7$.

Exemple : Avec le coefficient et une image

Une fonction affine f a pour coefficient -1, et $f(4) = 2$. Alors :

$$\begin{aligned} b &= 2-(-1)\times 4 \\ &= 2+4 = 6 \end{aligned}$$

Donc, pour tout nombre x, $f(x) = -x+6$.

Contrôle : $f(4) = -4+6 = 2$.

Attention : Changer l'ordre dans le calcul du coefficient

Avec $f(2) = 5$ et $f(5) = 11$, le calcul juste est $\frac{11-5}{5-2} = 2$. Le calcul fautif $\frac{11-5}{2-5}$ mélange les deux ordres : il donne -2, ce qui est faux.

Résoudre des problèmes

Méthode : Traduire une situation par une fonction affine

1. **La variable** : tu dis ce que représente x, avec son unité.
2. **La partie fixe** : elle ne dépend pas de x. C'est b.
3. **La partie proportionnelle** : elle est proportionnelle à x. Son coefficient est a.
4. **Les questions** : tu écris $f(x) = ax+b$. Tu calcules des images, ou tu cherches un nombre dont l'image est connue. Tu conclus par une phrase avec l'unité (dirhams, litres, minutes).
5. **Deux tarifs** : tu cherches pour quelle valeur de x les deux prix sont égaux. Tu peux aussi tracer les deux droites dans le même repère.

Exemple : Avec ou sans carte à la piscine

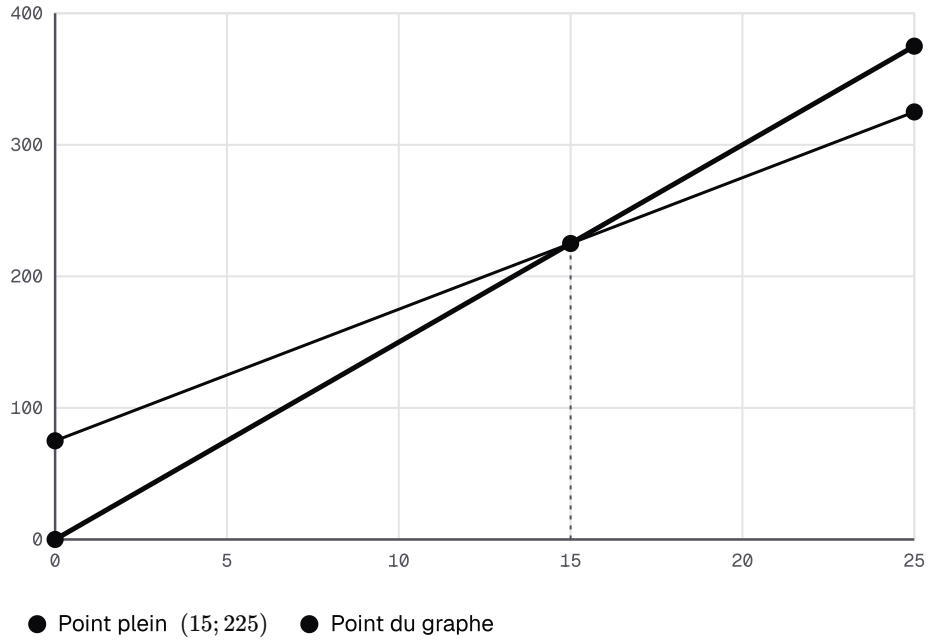
Sans carte, une entrée coûte 15 dirhams. Avec une carte à 75 dirhams, une entrée coûte 10 dirhams. Pour x entrées, le prix sans carte, en dirhams, est $s(x) = 15x$ et le prix avec carte est $c(x) = 10x+75$.

- Les deux prix sont égaux si $15x = 10x+75$, c'est-à-dire si $5x = 75$, donc $x = 15$.

- Pour 10 entrées : $s(10) = 150$ et $c(10) = 175$. Sans carte, c'est moins cher.
- Pour 20 entrées : $s(20) = 300$ et $c(20) = 275$. Avec la carte, c'est moins cher.

Remarque : La même comparaison sur un graphique

Les deux droites se coupent au point de coordonnées $(15; 225)$. À gauche de ce point, la droite de s est en dessous : sans carte, on paie moins. À droite, c'est la droite de c qui est en dessous.



Les droites de s et de c se coupent au point (15 ; 225) : avant 15 entrées, la droite de s est en dessous ; après, c'est celle de c.

Fonctions linéaires et fonctions affines

Une fonction linéaire est une fonction affine particulière : son ordonnée à l'origine est nulle. Tu l'as étudiée au chapitre précédent ; voici comment les deux familles se rangent ensemble.

Fonction affine $f(x) = ax + b$	Fonction linéaire : ordonnée à l'origine nulle $f(x) = ax$
Fonction constante : coefficient nul $f(x) = b$	Image de zéro $f(0) = b$
Coefficient par deux images de nombres différents $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (x_1 \neq x_2)$	Ordonnée à l'origine par une image $b = y_1 - a\,x_1$

Droite qui représente la fonction

$$y = ax + b$$

À retenir : Trois familles, trois droites

- **Linéaire** ($b = 0$) : situation de proportionnalité ; la droite passe par l'origine du repère.
- **Affine avec** $b \neq 0$: pas de proportionnalité ; la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; b)$.
- **Constante** ($a = 0$) : la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Quelle technique pour quelle question ?

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- « Calcule l'image de … » : remplace x, avec des parenthèses autour d'un nombre négatif ; produit, puis somme.
- « Trouve le nombre dont l'image est k » : résous $ax + b = k$, vérifie, puis conclus par une phrase.
- « Trace la représentation graphique » : deux points calculés, puis un point de contrôle.
- « Lis sur le graphique » : donne une valeur approchée, puis confirme par le calcul si tu peux.
- « Un point est-il sur la droite ? » : compare son ordonnée avec l'image de son abscisse.
- « Détermine f avec deux images » : le coefficient par le quotient des accroissements, puis b.
- « Détermine f avec son coefficient et une image » : $b = y_1 - a\,x_1$.
- « Compare deux tarifs » : cherche quand les deux prix sont égaux, puis teste une valeur de chaque côté.
- « Est-ce une fonction affine ? » : si deux quotients des accroissements sont différents, ce n'est pas une fonction affine. S'ils sont tous égaux, tu calcules a et b avec deux colonnes, puis tu vérifies chaque colonne.

À retenir

Trois gestes reviennent sans cesse : calculer une image, résoudre $ax + b = k$, et retrouver a puis b. Une lecture graphique reste approchée ; le calcul la confirme.