BURHAN

Les fonctions affines : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/fonctions-affines/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les fonctions affines	Entraînement	7

Exercice 1

Déterminer une fonction, puis s'en servir

La fonction f est affine. On sait que $f(-2) = 13$ et $f(4) = -11$.

1

Détermine l'expression de $f(x)$.

INDICE

Outil : le coefficient est le quotient des accroissements, puis $b = f(-2) - a \times (-2)$.

Début : calcule $\dfrac{-11 - 13}{4 - (-2)}$.

Point délicat : dans le calcul de b, le produit $a \times (-2)$ est positif ; contrôle ensuite avec $f(4)$.

CORRIGÉ

Coefficient. On utilise le quotient des accroissements :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-11 - 13}{4 - (-2)} \\ &= \frac{-24}{6} = -4 \end{aligned}$$

Ordonnée à l'origine. Comme $f(-2) = 13$, on a $-4 \times (-2) + b = 13$, donc :

$$\begin{aligned} b &= 13 - (-4) \times (-2) \\ &= 13 - 8 = 5 \end{aligned}$$

Contrôle. $-4 \times 4 + 5 = -16 + 5 = -11$, qui est bien $f(4)$.

Conclusion. La fonction f est définie par $f(x) = -4x + 5$.

2

Calcule l'image de $\dfrac{3}{4}$ par f.

INDICE

Outil : on remplace x par $\dfrac{3}{4}$ dans l'expression trouvée.

Début : calcule $-4 \times \dfrac{3}{4}$.

Point délicat : le 4 se simplifie, mais le signe moins reste.

CORRIGÉ

On remplace x par $\dfrac{3}{4}$; le 4 se simplifie et le signe moins reste :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\right) &= -4 \times \frac{3}{4} + 5 \\ &= -3 + 5 = 2 \end{aligned}$$

Conclusion. L'image de $\dfrac{3}{4}$ par f est 2.

3

Quel est le nombre dont l'image par f est -15 ?

INDICE

Outil : on résout $-4x + 5 = -15$.

Début : retranche 5 aux deux membres.

Point délicat : la division de deux nombres négatifs donne un nombre positif.

CORRIGÉ

On cherche x tel que $f(x) = -15$. On retranche 5 aux deux membres, puis on divise par -4 :

$$\begin{aligned} -4x + 5 &= -15 \\ -4x &= -20 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

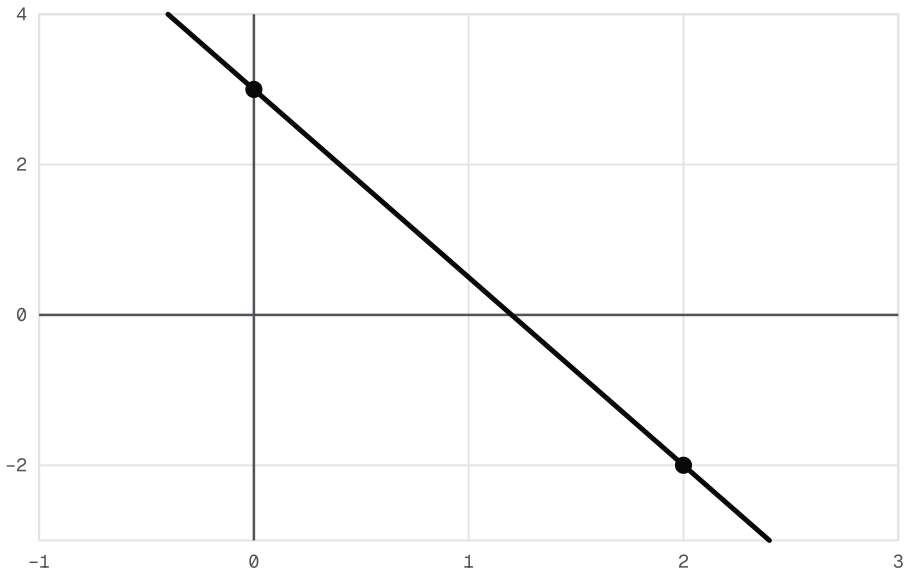
Vérification : $f(5) = -20 + 5 = -15$.

Conclusion. Le nombre dont l'image par f est -15 est 5.

Exercice 2

De la droite à l'expression

Une droite (d) représente une fonction affine f. Elle coupe l'axe des ordonnées au point $E(0;3)$ et elle passe par le point $F(2;-2)$.



La droite (d) coupe l'axe des ordonnées en E(0 ; 3) et passe par F(2 ; -2).

1

Donne l'ordonnée à l'origine de f.

INDICE

Outil : l'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point de (d) situé sur l'axe des ordonnées.

Début : regarde les coordonnées de E.

Point délicat : l'abscisse de E est 0, donc son ordonnée est $f(0)$.

CORRIGÉ

Le point $E(0;3)$ est sur (d) et son abscisse est 0 : il est aussi sur l'axe des ordonnées. Son ordonnée est l'image de 0, donc $f(0)=3$.

Conclusion. L'ordonnée à l'origine de f est 3.

2

Calcule le coefficient de f, puis écris $f(x)$.

INDICE

Outil : le coefficient est le quotient des accroissements entre E et F.

Début : calcule $\dfrac{-2-3}{2-0}$.

Point délicat : le quotient n'est pas un entier : garde-le en fraction.

CORRIGÉ

Coefficient. Les points E et F donnent $f(0)=3$ et $f(2)=-2$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2-3}{2-0} \\ &= \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Expression. Avec $b=3$, on obtient, pour tout nombre x :

$$f(x) = -\frac{5}{2}x + 3$$

Contrôle. $-\dfrac{5}{2}\times 2 + 3 = -5 + 3 = -2$: c'est l'ordonnée de F.

Conclusion. La fonction f est définie par $f(x) = -\dfrac{5}{2}x + 3$.

3

Le point $G(4;-7)$ est-il sur (d) ? Calcule ensuite l'image de -2 par f.

INDICE

Outil : G est sur (d) lorsque $f(4)=-7$.

Début : calcule $-\dfrac{5}{2}\times 4$.

Point délicat : pour l'image de -2, le produit de deux nombres négatifs est positif.

CORRIGÉ

Le point G. On calcule l'image de son abscisse :

$$\begin{aligned} f(4) &= -\frac{5}{2}\times 4 + 3 \\ &= -10 + 3 = -7 \end{aligned}$$

C'est l'ordonnée de G, donc G est sur (d).

Image de -2. Le produit de deux nombres négatifs est positif :

$$\begin{aligned} f(-2) &= -\frac{5}{2}\times(-2) + 3 \\ &= 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

Conclusion. Le point G appartient à (d), et l'image de -2 par f est 8.

Exercice 3

Des points sur la droite ?

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$. On note (D) sa représentation graphique dans un repère.

1

Le point $A(6;0)$ appartient-il à (D) ?

INDICE

Outil : un point $M(x;y)$ est sur (D) si, et seulement si, $y = f(x)$.

Début : calcule $f(6)$.

Point délicat : $\frac{2}{3} \times 6$ se calcule en divisant d'abord 6 par 3.

CORRIGÉ

Un point est sur (D) lorsque son ordonnée est l'image de son abscisse. On calcule donc l'image de 6 :

$$\begin{aligned} f(6) &= \frac{2}{3} \times 6 - 4 \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

On trouve l'ordonnée de A.

Conclusion. Le point $A(6;0)$ appartient à (D).

2

Le point $B(-3;-5)$ appartient-il à (D) ?

INDICE

Outil : même contrôle : compare $f(-3)$ avec l'ordonnée de B.

Début : calcule $\frac{2}{3} \times (-3)$.

Point délicat : un seul écart suffit pour conclure.

CORRIGÉ

On compare l'image de -3 avec l'ordonnée de B :

$$\begin{aligned} f(-3) &= \frac{2}{3} \times (-3) - 4 \\ &= -2 - 4 = -6 \end{aligned}$$

L'ordonnée de B est -5, et $-6 \neq -5$.

Conclusion. Le point $B(-3;-5)$ n'appartient pas à (D).

3

Le point C de (D) a pour ordonnée 2. Calcule son abscisse.

INDICE

Outil : l'abscisse de C est le nombre dont l'image par f est 2.

Début : résous $\frac{2}{3}x - 4 = 2$; commence par ajouter 4.

Point délicat : pour finir, multiplie les deux membres par $\frac{3}{2}$.

CORRIGÉ

Équation. L'abscisse de C est le nombre dont l'image par f est 2. On ajoute 4 aux deux membres, puis on les multiplie par $\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x - 4 &= 2 \\ \frac{2}{3}x &= 6 \\ x &= 6 \times \frac{3}{2} = 9 \end{aligned}$$

Vérification. $f(9) = 6 - 4 = 2$.

Conclusion. Le point C a pour abscisse 9 : c'est le point $C(9;2)$.

Exercice 4

Linéaire, affine ou ni l'une ni l'autre ?

Voici trois tableaux de valeurs. Dans chacun, x prend quatre valeurs et y est l'image de x.

- Tableau 1 : pour $x = 1, 3, 4, 7$, on a $y = 6, 18, 24, 42$.
- Tableau 2 : pour $x = 1, 3, 4, 7$, on a $y = 1, 11, 16, 31$.
- Tableau 3 : y est l'aire d'un carré de côté x ; pour $x = 1, 2, 4, 5$, on a $y = 1, 4, 16, 25$.

1

Le tableau 1 est-il un tableau de proportionnalité ? Si oui, donne la fonction linéaire qui lui correspond.

INDICE

Outil : un tableau de proportionnalité a tous ses quotients $\frac{y}{x}$ égaux.

Début : calcule $\frac{6}{1}$, puis $\frac{18}{3}$.

Point délicat : vérifie les quatre colonnes, pas seulement deux.

CORRIGÉ

On calcule le quotient $\frac{y}{x}$ de chaque colonne : $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{18}{3} = 6$, $\frac{24}{4} = 6$ et $\frac{42}{7} = 6$.

Les quatre quotients sont égaux à 6 : chaque y s'obtient en multipliant x par 6.

Conclusion. Le tableau 1 est un tableau de proportionnalité ; il correspond à la fonction linéaire $x \mapsto 6x$.

2

Le tableau 2 est-il un tableau de proportionnalité ? Calcule les quotients des accroissements, puis donne l'expression de la fonction affine qui lui correspond.

INDICE

Outil : les quotients $\frac{y}{x}$ d'abord, puis les quotients des accroissements entre colonnes voisines.

Début : calcule $\frac{11-1}{3-1}$.

Point délicat : une fois a trouvé, b s'obtient avec une colonne : $b = 1 - a \times 1$.

CORRIGÉ

Proportionnalité. On a $\frac{1}{1} = 1$ et $\frac{11}{3} \neq 1$: les quotients $\frac{y}{x}$ ne sont pas tous égaux.

Quotients des accroissements. Entre deux colonnes voisines :

- $\frac{11-1}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$;
- $\frac{16-11}{4-3} = \frac{5}{1} = 5$;
- $\frac{31-16}{7-4} = \frac{15}{3} = 5$.

Expression. Les trois quotients valent 5, donc $a = 5$. La première colonne donne ensuite $b = 1 - 5 \times 1 = -4$. Contrôle avec la dernière colonne : $5 \times 7 - 4 = 31$.

Conclusion. Le tableau 2 n'est pas un tableau de proportionnalité ; il correspond à la fonction affine $x \mapsto 5x - 4$, qui n'est pas linéaire.

3

Le tableau 3 correspond-il à une fonction affine ? Sa représentation graphique est-elle une droite ?

INDICE

Outil : pour une fonction affine, les quotients des accroissements sont tous égaux.

Début : calcule $\frac{4-1}{2-1}$ et $\frac{16-4}{4-2}$.

Point délicat : un seul couple de quotients différents suffit pour répondre.

CORRIGÉ

Quotients des accroissements. On trouve $\frac{4-1}{2-1} = 3$ et $\frac{16-4}{4-2} = \frac{12}{2} = 6$. Ces quotients sont différents, alors qu'ils seraient égaux pour une fonction affine.

Représentation graphique. Les points $(1;1)$, $(2;4)$ et $(4;16)$ ne sont pas alignés : de $(1;1)$ à $(2;4)$, on monte de 3 pour 1 ; de $(2;4)$ à $(4;16)$, on monte de 12 pour 2, c'est-à-dire de 6 pour 1.

Conclusion. Le tableau 3 ne correspond pas à une fonction affine : l'aire d'un carré n'est pas une fonction affine de son côté, et sa représentation graphique n'est pas une droite.

Exercice 5

Deux formules pour la salle de sport

Une salle de sport propose deux formules. Formule A : chaque séance coûte 40 dirhams. Formule B : on paie un abonnement de 150 dirhams, puis 15 dirhams par séance. On note x le nombre de séances.

1

Exprime le prix $f(x)$ de la formule A et le prix $g(x)$ de la formule B, en dirhams. Calcule ensuite le prix de 4 séances avec chaque formule.

INDICE

Outil : la formule A n'a pas de partie fixe ; la formule B en a une.

Début : pour B, la partie proportionnelle est $15x$.

Point délicat : calcule $f(4)$ et $g(4)$ séparément.

CORRIGÉ

Expressions. La formule A n'a pas de partie fixe : $f(x) = 40x$. La formule B ajoute 15 dirhams par séance à l'abonnement de 150 dirhams : $g(x) = 15x + 150$.

Prix de 4 séances.

$$\begin{aligned} f(4) &= 40 \times 4 = 160 \\ g(4) &= 15 \times 4 + 150 \\ &= 60 + 150 = 210 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour 4 séances, la formule A coûte 160 dirhams et la formule B coûte 210 dirhams.

2

Pour combien de séances les deux formules coûtent-elles le même prix ? Quel est ce prix ?

INDICE

Outil : on résout l'équation $40x = 15x + 150$.

Début : retranche $15x$ aux deux membres.

Point délicat : calcule ensuite le prix avec l'une des deux formules, et contrôle avec l'autre.

CORRIGÉ

Les deux prix sont égaux lorsque $f(x) = g(x)$. On retranche $15x$ aux deux membres, puis on divise par 25 :

$$\begin{aligned} 40x &= 15x + 150 \\ 25x &= 150 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Contrôle : $f(6) = 240$ et $g(6) = 90 + 150 = 240$.

Conclusion. Pour 6 séances, les deux formules coûtent le même prix : 240 dirhams.

3

Dans un repère, avec 1 cm pour une séance en abscisse et 1 cm pour 50 dirhams en ordonnée, trace les représentations graphiques de f et de g. Quelle formule est la moins chère pour 10 séances ?

INDICE

Outil : chaque droite se trace avec deux points ; la droite de f passe par l'origine.

Début : prends par exemple les points d'abscisses 0 et 10.

Point délicat : pour 10 séances, regarde quelle droite est en dessous, puis confirme par le calcul.

CORRIGÉ

Tracé. Chaque droite se trace avec deux points :

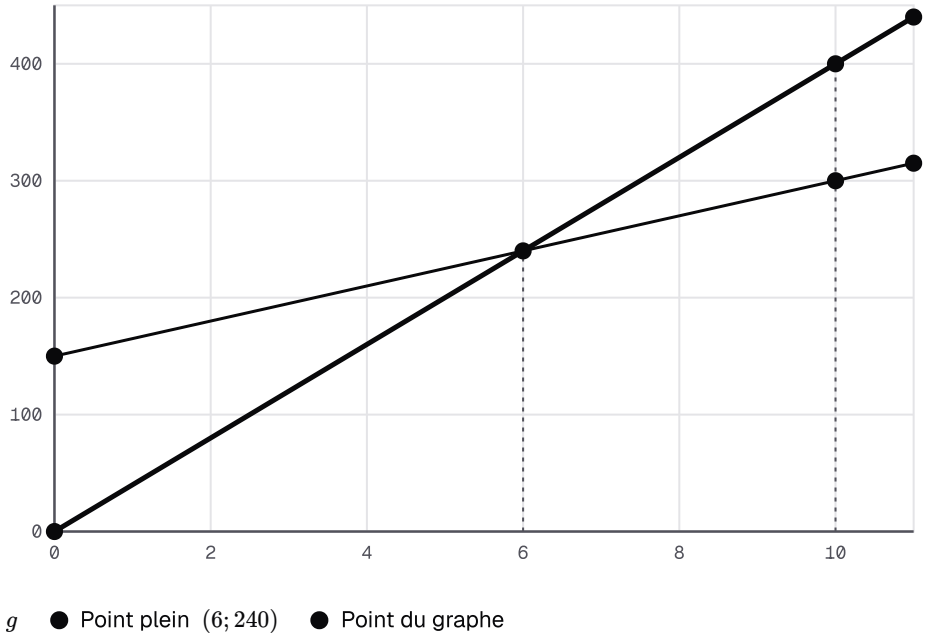
- la droite de f passe par $(0;0)$ et $(10;400)$;
- la droite de g passe par $(0;150)$ et $(10;300)$.

Les deux droites se coupent au point $(6;240)$, trouvé à la question 2.

Lecture. Pour une abscisse plus grande que 6, la droite de g est en dessous de celle de f.

Calcul. $f(10) = 40 \times 10 = 400$ et $g(10) = 150 + 150 = 300$.

Conclusion. Pour 10 séances, la formule B est la moins chère : 300 dirhams au lieu de 400 dirhams.



Les droites de f et de g se coupent au point (6 ; 240). Pour 10 séances, la droite de g est en dessous : la formule B est la moins chère.

Exercice 6

Degrés Celsius et degrés Fahrenheit

En physique, on mesure une température en degrés Celsius, notés °C. Le degré Fahrenheit, noté °F, est une autre unité de température. On passe d'une température de x °C à une température en °F avec la fonction f définie par $f(x) = 1{,}8x + 32$.

1

Un après-midi de printemps à Marrakech, il fait 25 °C. Convertis cette température en °F.

INDICE

Outil : on calcule l'image de 25 par f.

Début : commence par $1{,}8 \times 25$.

Point délicat : ajoute ensuite 32.

CORRIGÉ

On calcule l'image de 25 par f :

$$\begin{aligned} f(25) &= 1{,}8 \times 25 + 32 \\ &= 45 + 32 = 77 \end{aligned}$$

Conclusion. Une température de 25 °C correspond à 77 °F.

2

Un thermomètre affiche 14 °F. Quelle est la température en °C ?

INDICE

Outil : on cherche le nombre dont l'image par f est 14.

Début : résous $1{,}8x + 32 = 14$; commence par retrancher 32.

Point délicat : divise ensuite par $1{,}8$. Après avoir trouvé le nombre, vérifie qu'il a un sens dans la situation.

CORRIGÉ

On cherche le nombre dont l'image par f est 14. On retranche 32 aux deux membres, puis on divise par $1{,}8$:

$$\begin{aligned} 1{,}8x + 32 &= 14 \\ 1{,}8x &= -18 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Vérification : $f(-10) = -18 + 32 = 14$. Une température négative en °C a un sens : il fait froid.

Conclusion. 14 °F correspondent à -10 °C.

3

Existe-t-il une température qui s'écrit avec le même nombre en °C et en °F ?

INDICE

Outil : on cherche un nombre x égal à son image : $x = 1{,}8x + 32$.

Début : retranche $1{,}8x$ aux deux membres.

Point délicat : $x - 1{,}8x = -0{,}8x$; divise ensuite par $-0{,}8$.

CORRIGÉ

Équation. On cherche un nombre x égal à son image. On retranche $1{,}8x$ aux deux membres, puis on divise par $-0{,}8$:

$$\begin{aligned} x &= 1{,}8x + 32 \\ -0{,}8x &= 32 \\ x &= -40 \end{aligned}$$

Vérification.

$$\begin{aligned} &f(-40) \\ &= 1{,}8 \times (-40) + 32 \\ &= -72 + 32 = -40 \end{aligned}$$

Conclusion. Oui : -40 °C et -40 °F désignent la même température.

Exercice 7

Une bougie qui se consume

Une bougie allumée raccourcit de $1{,}5$ cm par heure. Sa hauteur, en cm, après x heures, est une fonction affine h de x. Après 4 heures, la bougie mesure 18 cm.

1

Quel est le coefficient de h ? Explique son signe.

INDICE

Outil : le coefficient est le changement de hauteur quand x augmente de 1.

Début : en une heure, la hauteur change de $1{,}5$ cm.

Point délicat : la bougie raccourcit : la hauteur diminue.

CORRIGÉ

Le coefficient d'une fonction affine est l'accroissement de l'image quand x augmente de 1. En une heure, la hauteur de la bougie diminue de $1{,}5$ cm : cet accroissement est négatif.

Conclusion. Le coefficient de h est $-1{,}5$; il est négatif parce que la bougie raccourcit.

2

Détermine l'ordonnée à l'origine de h, puis écris $h(x)$. Que représente ce nombre pour la bougie ?

INDICE

Outil : avec le coefficient et une image, on calcule $b = h(4) - a \times 4$.

Début : calcule $-1{,}5 \times 4$.

Point délicat : retrancher un nombre négatif revient à ajouter son opposé.

CORRIGÉ

Ordonnée à l'origine. Pour tout nombre x, $h(x) = -1{,}5x + b$. Comme $h(4) = 18$, on a $-1{,}5 \times 4 + b = 18$, donc :

$$\begin{aligned} b &= 18 - (-1{,}5) \times 4 \\ &= 18 + 6 = 24 \end{aligned}$$

Ainsi $h(x) = -1{,}5x + 24$. Contrôle : $h(4) = -6 + 24 = 18$.

Sens. Le nombre 24 est $h(0)$, la hauteur après 0 heure : c'est la hauteur de la bougie au moment où on l'allume.

Conclusion. On a $h(x) = -1{,}5x + 24$; l'ordonnée à l'origine 24 est la hauteur de la bougie, en cm, au moment où on l'a allumée.

3

Au bout de combien de temps la bougie est-elle entièrement consumée ?

INDICE

Outil : la bougie est consumée quand sa hauteur vaut 0.

Début : résous $-1{,}5x + 24 = 0$; retranche d'abord 24.

Point délicat : divise ensuite par $-1{,}5$. Après avoir trouvé le nombre, vérifie qu'il a un sens dans la situation.

CORRIGÉ

La bougie est consumée quand $h(x) = 0$. On retranche 24 aux deux membres, puis on divise par $-1{,}5$:

$$\begin{aligned} -1{,}5x + 24 &= 0 \\ -1{,}5x &= -24 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Vérification : $h(16) = -24 + 24 = 0$. Le nombre 16 est positif : c'est une durée possible.

Conclusion. La bougie est entièrement consumée au bout de 16 heures.