BURHAN

Les fonctions affines

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/fonctions-affines/cours

Chapitre	Semestre
Les fonctions affines	Semestre 2

Taxi, abonnement : un prix qui dépend d'une distance

Tu prends un petit taxi en ville. Au départ, le compteur affiche déjà 5 dirhams.

Ensuite, chaque kilomètre parcouru ajoute 3 dirhams. Le prix à payer dépend donc de la distance.

Devine : Le prix de la course

Ta course mesure 4 kilomètres. Quel prix affiche le compteur à l'arrivée ?

A. 12 dirhams

Faux.

Faux. Tu as compté les kilomètres, $3 \times 4 = 12$, mais tu as oublié les 5 dirhams du départ.

B. 17 dirhams

Juste.

Oui. 5 dirhams au départ, plus $3 \times 4 = 12$ dirhams pour la distance : $5 + 12 = 17$.

C. 32 dirhams

Faux.

Faux. Tu as compté $5 + 3 = 8$ dirhams pour chaque kilomètre : $8 \times 4 = 32$. Mais les 5 dirhams du départ ne se paient qu'une fois.

D. 23 dirhams

Faux.

Faux. Tu as multiplié la partie fixe : $5 \times 4 + 3 = 23$. C'est le prix d'un kilomètre qu'on multiplie par 4.

Correction

Les 5 dirhams du départ se paient une seule fois. La distance coûte 3 dirhams par kilomètre, soit 3×4 pour 4 kilomètres :

$$5 + 3 \times 4 = 5 + 12 = 17$$

Le compteur affiche 17 dirhams.

Pour x kilomètres, le prix est $3x + 5$ dirhams. Il a deux parties.

- Une **partie fixe** : 5 dirhams, qui ne changent pas.
- Une **partie proportionnelle** à la distance : $3x$ dirhams.

Une formule de ce genre définit une **fonction affine**. Dans ce chapitre, tu vas calculer des prix comme celui-ci. Tu vas aussi tracer leur droite, comparer deux tarifs et retrouver une formule à partir de deux prix.

Fonction affine et image d'un nombre

Un prix en deux parties

À toi : La facture d'eau

Une facture d'eau compte 15 dirhams d'abonnement, puis 2 dirhams par mètre cube consommé. Voici quelques prix.

Volume (m³)	0	1	5	10
Prix (dirhams)	15	17	25	35

Quelle expression donne le prix pour x mètres cubes ?

A. $15x + 2$

Faux.

Faux. Pour $x = 5$, on trouverait $15 \times 5 + 2 = 77$, et non 25. L'abonnement ne se multiplie pas par le volume.

B. $17x$

Faux.

Faux. 17 dirhams est le prix d'un mètre cube, abonnement compris. Pour $x = 5$: $17 \times 5 = 85$, et non 25.

C. $2x + 15$

Juste.

Oui. Pour $x = 5$: $2 \times 5 + 15 = 25$. Pour $x = 10$: $2 \times 10 + 15 = 35$.

D. $2x$

Faux.

Faux. Pour $x = 0$, le prix vaut 15, et non 0 : l'abonnement manque.

Correction

La partie proportionnelle est $2x$: 2 dirhams par mètre cube. La partie fixe est l'abonnement, 15 dirhams. Le prix est donc $2x + 15$.

Contrôle avec le tableau :

- $2 \times 0 + 15 = 15$;
- $2 \times 1 + 15 = 17$;
- $2 \times 5 + 15 = 25$;

> - $2 \times 10 + 15 = 35$.

On note $P(x) = 2x + 15$ le prix de x mètres cubes. À chaque volume x correspond un seul prix. On dit que le prix est une **fonction** du volume.

Rappel du chapitre précédent : une fonction de la forme $x \mapsto ax$ est une fonction linéaire. Ici, l'abonnement s'ajoute : la fonction P n'est pas linéaire.

La définition

Le prix de l'eau et celui du taxi ont la même forme. On multiplie x par un nombre, puis on ajoute un nombre fixe. La définition suivante donne un nom à cette forme et à ses deux nombres.

Définition : Fonction affine

Soit a et b deux nombres réels fixés. La **fonction affine** f de coefficients a et b est la fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre $ax + b$. On note :

$$f : x \mapsto ax + b \quad \text{ou} \quad f(x) = ax + b.$$

- Le nombre a est le **coefficient** de f.
- Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** de f : c'est l'image de 0, car $f(0) = b$.
- Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par f.

Cas particuliers : si $b = 0$, la fonction $f : x \mapsto ax$ est une **fonction linéaire** ; si $a = 0$, la fonction $f : x \mapsto b$ est une **fonction constante**.

En clair : a est le nombre qui multiplie x, et b est le nombre ajouté.

Pour l'eau, $P(x) = 2x + 15$: le coefficient est $a = 2$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 15$. L'image de 0 est bien l'abonnement : $P(0) = 15$.

Exemple : Reconnaître le coefficient et l'ordonnée à l'origine

- $f(x) = 3x - 4$: le coefficient est $a = 3$ et l'ordonnée à l'origine est $b = -4$.
- $g(x) = -x + 6$: on lit $-x = -1 \times x$, donc $a = -1$ et $b = 6$.
- $p(x) = \dfrac{1}{2}x$: ici $b = 0$. C'est une fonction linéaire, de coefficient $\dfrac{1}{2}$.
- $k(x) = 7$: ici $a = 0$. C'est une fonction constante.

Deux cas particuliers

Vérifie : Linéaire ou non

Une seule de ces fonctions est linéaire. Laquelle ?

A. $x \mapsto -x + 1$

Faux.

Faux. Ici $b = 1$: l'image de 0 vaut 1, et non 0.

B. $x \mapsto x - 1$

Faux.

Faux. Ici $a = 1$ et $b = -1$. Comme $b \neq 0$, elle n'est pas linéaire.

C. $x \mapsto -x$

Juste.

Oui. Ici $b = 0$: c'est la forme $x \mapsto ax$, avec $a = -1$.

D. $x \mapsto -1$

Faux.

Faux. Ici $a = 0$: c'est une fonction constante. Toutes les images valent -1.

Correction

La fonction $x \mapsto -x$ est linéaire, car son ordonnée à l'origine est $b = 0$. Les trois autres ont $b \neq 0$. La dernière, $x \mapsto -1$, est constante : son coefficient est $a = 0$.

Attention : l'ordre des termes

✗ « Dans $u(x) = 6 - 2x$, le coefficient est 6. »

✓ On écrit d'abord le terme en x : $u(x) = -2x + 6$. Le coefficient est le nombre qui multiplie x : $a = -2$. L'ordonnée à l'origine est $b = 6$.

L'image d'un nombre

Pour la facture d'eau, $P(5) = 25$: 5 mètres cubes coûtent 25 dirhams. On dit que 25 est l'**image** de 5 par la fonction P. Calculer une image, c'est remplacer x par un nombre.

Méthode : calculer l'image d'un nombre

1. **Remplacer.** On remplace x par le nombre. Un nombre négatif se met entre parenthèses.
2. **Multiplier d'abord.** On calcule le produit de a par ce nombre.
3. **Ajouter ensuite.** On ajoute b au produit.
4. **Conclure.** On écrit une phrase : « l'image de … par f est … ».

Exemple : Deux images par la fonction f

On reprend $f(x) = 3x - 4$.

Image de -2. On écrit -2 entre parenthèses, puis on calcule le produit avant la soustraction :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \times (-2) - 4 \\ &= -6 - 4 = -10. \end{aligned}$$

L'image de -2 par f est -10.

Image de $\frac{2}{3}$. Le produit de 3 par $\frac{2}{3}$ vaut 2 :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= 3 \times \frac{2}{3} - 4 \\ &= 2 - 4 = -2. \end{aligned}$$

L'image de $\frac{2}{3}$ par f est -2.

Les pièges du calcul

Attention : les parenthèses

On calcule l'image de -5 par $f(x) = 3x - 4$.

✗ $3 - 5 - 4 = -6$: sans parenthèses, on a oublié de multiplier 3 par -5.

✓ On écrit -5 entre parenthèses :

$$\begin{aligned} f(-5) &= 3 \times (-5) - 4 \\ &= -15 - 4 = -19 \end{aligned}$$

Trouve l'erreur : Le calcul de Yassine

On donne $h(x) = -2x + 1$. Yassine écrit :

$$\begin{aligned} h(-3) &= -2 \times (-3) + 1 \\ &= -6 + 1 = -5 \end{aligned}$$

Où est son erreur ?

A. Il fallait d'abord ajouter : $-2 \times (-3 + 1)$.

Faux.

Faux. La multiplication passe avant l'addition. Le calcul $-2 \times (-3 + 1)$ donne 4, qui n'est pas l'image de -3.

B. Le produit $-2 \times (-3)$ vaut 6, et non -6.

Juste.

Oui. Le produit de deux nombres négatifs est positif. Donc $h(-3) = 6 + 1 = 7$.

C. Il n'y a aucune erreur dans ce calcul.

Faux.

Faux. Le produit de deux nombres négatifs est positif : le résultat -6 est faux.

Correction

Le produit de deux nombres négatifs est positif : $-2 \times (-3) = 6$. Donc :

$$h(-3) = 6 + 1 = 7$$

L'image de -3 par h est 7.

À toi : trois images

On donne $q(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Calcule l'image de 4, de -6 et de $\frac{1}{3}$ par q.

Indice 1

Remplace x par chaque nombre, entre parenthèses s'il est négatif.

Indice 2

Commence chaque fois par le produit de $\frac{1}{2}$ par le nombre.

Indice 3

Point délicat : pour $\frac{1}{3}$, multiplie les deux fractions. Écris ensuite 3 avec le même dénominateur avant d'ajouter.

Réponse

Image de 4. On multiplie d'abord, puis on ajoute 3 :

$$\begin{aligned} q(4) &= \frac{1}{2} \times 4 + 3 \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Image de -6. Le nombre -6 est négatif : il se met entre parenthèses.

$$\begin{aligned} q(-6) &= \frac{1}{2} \times (-6) + 3 \\ &= -3 + 3 = 0 \end{aligned}$$

Image de $\frac{1}{3}$. On multiplie les deux fractions, puis on écrit $3 = \frac{18}{6}$ pour ajouter :

$$\begin{aligned} q\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 3 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{18}{6} = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

Conclusion. Les images de 4, -6 et $\frac{1}{3}$ par q sont 5, 0 et $\frac{19}{6}$.

Pour conclure

Remarque **: Pour bien rédiger : une image**

On attend le calcul complet, puis une phrase. Par exemple, avec $g(x) = -x + 6$:

$$g(2) = -2 + 6 = 4.$$

« L'image de 2 par g est 4. »

Tu sais maintenant reconnaître une fonction affine. Tu sais aussi calculer une image, même d'un nombre négatif ou d'une fraction. La section suivante fait le chemin inverse : on connaît l'image, on cherche le nombre.

Fonction affine : trouver le nombre dont l'image est connue

Remonter de l'image au nombre

Devine : Retrouver le volume

Pour la facture d'eau, $P(x) = 2x + 15$. Ce mois-ci, la facture vaut 41 dirhams. Combien de mètres cubes ont été consommés ?

A. 26 mètres cubes

Faux.

Faux. $41 - 15 = 26$ est le prix de l'eau seule. Il faut encore diviser par les 2 dirhams d'un mètre cube.

B. 97 mètres cubes

Faux.

Faux. Tu as calculé l'image de 41 : $2 \times 41 + 15 = 97$. Ici, c'est le prix qui est connu.

C. 28 mètres cubes

Faux.

Faux. Tu as ajouté 15 au lieu de le retrancher : $\dfrac{41 + 15}{2} = 28$.

D. 13 mètres cubes

Juste.

Oui. $2 \times 13 + 15 = 26 + 15 = 41$.

Correction

On cherche le volume x dont l'image par P est 41, c'est-à-dire tel que :

$$2x + 15 = 41$$

On retranche 15 aux deux membres : $2x = 26$. On divise les deux membres par 2 : $x = 13$.

Vérification : $P(13) = 26 + 15 = 41$.

Le volume consommé est 13 mètres cubes.

Rappel du chapitre sur les équations : on peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une équation. On peut aussi diviser les deux membres par un même nombre non nul.

La méthode

Chercher le nombre dont l'image par f est k, c'est chercher x tel que $f(x) = k$. Avec $f(x) = ax + b$, on résout l'équation :

$$ax + b = k$$

Si $a \neq 0$, cette équation a une seule solution.

Si $a = 0$, la fonction est constante : toutes les images valent b.

- Si $k \neq b$, aucun nombre n'a pour image k.
- Si $k = b$, tous les nombres conviennent.

Méthode : trouver le nombre dont l'image est connue

1. **Écrire l'équation.** On écrit $ax + b = k$.
2. **Isoler le terme en x.** On retranche b aux deux membres : $ax = k - b$.
3. **Diviser.** On divise les deux membres par a, qui n'est pas nul.
4. **Vérifier.** On calcule l'image du nombre trouvé.
5. **Conclure.** On écrit une phrase : « le nombre dont l'image par f est k est … ».

Exemple : Un exemple complet

On reprend $f(x) = 3x - 4$. On cherche le nombre dont l'image est 11 : on résout $3x - 4 = 11$.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 11 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

On a retranché $b = -4$ aux deux membres, c'est-à-dire ajouté 4. Puis on a divisé les deux membres par 3.

Vérification : $f(5) = 3 \times 5 - 4 = 15 - 4 = 11$.

Le nombre dont l'image par f est 11 est 5.

Avec un coefficient négatif ou une fraction

Exemple : Un coefficient négatif

On reprend $h(x) = -2x + 1$. On cherche le nombre dont l'image est 9 : on résout $-2x + 1 = 9$.

$$\begin{aligned} -2x+1 &= 9 \\ -2x &= 8 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

On a retranché 1 aux deux membres. Puis on a divisé les deux membres par -2 : le quotient de 8 par -2 est négatif.

Vérification : $h(-4) = -2 \times (-4) + 1 = 8 + 1 = 9$.

Le nombre dont l'image par h est 9 est -4.

Rappel : diviser par $\frac{1}{3}$, c'est multiplier par 3.

Par exemple, de $\frac{1}{3}x - 2 = 1$, on tire $\frac{1}{3}x = 3$ en ajoutant 2. On multiplie les deux membres par 3 : $x = 9$.

Vérification : $\frac{1}{3} \times 9 - 2 = 3 - 2 = 1$.

À toi : Une image donnée

On reprend $q(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Quel est le nombre dont l'image par q est 2 ?

A. -2

Juste.

Oui. $q(-2) = \frac{1}{2} \times (-2) + 3 = -1 + 3 = 2$.

B. $-\frac{1}{2}$

Faux.

Faux. Après $\frac{1}{2}x = -1$, il faut multiplier par 2 : diviser par $\frac{1}{2}$, c'est multiplier par 2.

C. 10

Faux.

Faux. Tu as ajouté 3 au lieu de le retrancher : $(2 + 3) \times 2 = 10$.

D. 4

Faux.

Faux. 4 est l'image de 2, car $q(2) = 1 + 3 = 4$. On cherchait le nombre dont l'image est 2.

Correction

On résout $\frac{1}{2}x + 3 = 2$.

On retranche 3 aux deux membres : $\frac{1}{2}x = -1$. On multiplie les deux membres par 2 : $x = -2$.

Vérification : $q(-2) = -1 + 3 = 2$.

Le nombre dont l'image par q est 2 est -2.

Ne pas confondre

Attention : image ou nombre cherché

Avec $f(x) = 3x - 4$, deux questions se ressemblent.

✗ « Le nombre dont l'image est 5, c'est $f(5) = 11$. »

✓ « Calculer $f(5)$ » donne une image : $f(5) = 11$.

« Trouver le nombre dont l'image est 5 » demande de résoudre $3x - 4 = 5$. On trouve $x = 3$, car $f(3) = 9 - 4 = 5$.

À toi : retrouver un nombre

On reprend $g(x) = -x + 6$. Trouve le nombre dont l'image par g est 2, puis vérifie.

Indice 1
Écris l'équation $-x + 6 = 2$.
Indice 2
Retranche 6 aux deux membres : $-x = -4$.
Indice 3
Point délicat : $-x = -1 \times x$. Divise les deux membres par -1.

Réponse
On résout $-x + 6 = 2$.

On retranche 6 aux deux membres : $-x = -4$. On divise les deux membres par -1 : $x = 4$.

Vérification : $g(4) = -4 + 6 = 2$.

Le nombre dont l'image par g est 2 est 4.

Remarque : Pour bien rédiger : la phrase de conclusion

La réponse se termine par une phrase complète. Après la vérification, on écrit par exemple : « Le nombre dont l'image par f est 11 est 5. » Une valeur seule, sans phrase, laisse la réponse inachevée.

Des accroissements proportionnels

Observer un tableau

Devine : Cinq heures de plus

Une location de vélo coûte 4 dirhams pour le casque, puis 2 dirhams par heure. Pour x heures, le prix est $v(x) = 2x + 4$.

Heures	1	2	4	7
Prix (dirhams)	6	8	12	18

De 2 à 7 heures, la durée augmente de 5 heures. De combien le prix augmente-t-il ?

A. De 5 dirhams

Faux.

Faux. 5 est l'augmentation de la durée. Le prix augmente de 2 dirhams à chaque heure de plus.

B. De 18 dirhams

Faux.

Faux. 18 dirhams est le prix de 7 heures. Une augmentation est une différence de prix.

C. De 10 dirhams

Juste.

Oui. $v(7) - v(2) = 18 - 8 = 10$, et $10 = 2 \times 5$.

Correction

Le prix passe de 8 à 18 dirhams : il augmente de $18 - 8 = 10$ dirhams.

C'est 2×5 : deux dirhams pour chacune des cinq heures ajoutées.

Le casque est compté dans les deux prix : il ne compte pas dans l'augmentation.

Prenons deux autres colonnes du tableau : 1 heure et 4 heures. La différence $4 - 1 = 3$ s'appelle l'**accroissement** de x.

L'accroissement des images est $v(4) - v(1) = 12 - 6 = 6$. Ici encore, $6 = 2 \times 3$: on retrouve le coefficient 2.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans $v(4) - v(1)$, les 4 dirhams du casque figurent dans les deux prix.

Ils s'annulent dans la différence. Il reste $2 \times 4 - 2 \times 1 = 2 \times 3$, et ce calcul marche pour toute fonction affine.

La propriété des accroissements

Propriété : Proportionnalité des accroissements

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Pour deux nombres **différents** x_1 et x_2 :

$$f(x_1) - f(x_2) = a\,(x_1 - x_2) \quad \text{donc} \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a.$$

Les accroissements des images sont proportionnels aux accroissements des nombres, et le coefficient de proportionnalité est a.

Démonstration

Étape 1. On écrit les deux images avec la définition d'une fonction affine : $f(x_1) = ax_1 + b$ et $f(x_2) = ax_2 + b$.

Étape 2. On soustrait : $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2$, car $b - b = 0$.

Étape 3. On factorise par a (distributivité) : $f(x_1) - f(x_2) = a\,(x_1 - x_2)$.

Étape 4. Comme x_1 et x_2 sont différents, $x_1 - x_2$ n'est pas nul. On peut donc diviser les deux membres par $x_1 - x_2$, et on obtient le quotient égal à a.

En clair : quand x augmente de 1, l'image change toujours de a. Quand x augmente de 3, l'image change de $3a$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit les deux images, puis on les soustrait. Le nombre b disparaît, car $b - b = 0$. Il reste $ax_1 - ax_2$, que l'on écrit $a\,(x_1 - x_2)$, en mettant a en facteur.

Vérifie : Une différence sans calculer les images

On reprend $P(x) = 2x + 15$, le prix de l'eau. Sans calculer $P(12)$ ni $P(4)$, que vaut $P(12) - P(4)$?

A. 8

Faux.

Faux. 8 est l'accroissement de x. Il faut encore le multiplier par le coefficient 2.

B. 15

Faux.

Faux. 15 est l'ordonnée à l'origine, et non l'accroissement de l'image.

C. 31

Faux.

Faux. Tu as ajouté 15 : $2 \times 8 + 15 = 31$. Dans une différence, le nombre 15 s'annule.

D. 16

Juste.

Oui. L'accroissement de x est $12 - 4 = 8$, et $2 \times 8 = 16$. Le nombre 15 disparaît dans la différence.

Correction

D'après la proportionnalité des accroissements, la différence des images est le coefficient 2 multiplié par la différence des nombres :

$$\begin{aligned} &P(12) - P(4) \\ &= 2 \times (12 - 4) \\ &= 2 \times 8 = 16 \end{aligned}$$

Contrôle : $P(12) = 24 + 15 = 39$ et $P(4) = 8 + 15 = 23$, et $39 - 23 = 16$.

Exemple : Le quotient des accroissements

On reprend $h(x) = -2x + 1$. On a $h(5) = -10 + 1 = -9$ et $h(1) = -2 + 1 = -1$. On divise l'accroissement des images par celui des nombres :

$$\frac{h(5) - h(1)}{5 - 1} = \frac{-9 - (-1)}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

On retrouve le coefficient -2.

Il faut deux nombres différents : avec $x_1 = x_2$, le dénominateur serait nul.

Et les images ?

Pour une fonction affine, les accroissements sont proportionnels. Les images des nombres le sont-elles aussi ? Teste sur un tableau.

Vérifie : Un tableau à examiner

Voici un tableau de la fonction $x \mapsto x + 2$.

x	1	2	5
Image	3	4	7

Que peut-on affirmer ?

A. Les images sont proportionnelles aux nombres.

Faux.

Faux. $\frac{3}{1} = 3$ mais $\frac{4}{2} = 2$: les quotients ne sont pas égaux.

B. Les accroissements sont proportionnels, pas les images.

Juste.

Oui. Le coefficient est 1 : chaque accroissement de x donne le même accroissement de l'image.

C. Ni les images ni les accroissements ne sont proportionnels.

Faux.

Faux. De 2 à 5, x augmente de 3 et l'image aussi : $7 - 4 = 3$.

Correction

De 1 à 5 : $5 - 1 = 4$ et $7 - 3 = 4$. Les accroissements sont proportionnels, de coefficient 1.

Mais $\frac{3}{1} = 3$ et $\frac{4}{2} = 2$: les images ne sont pas proportionnelles, car $b = 2$ n'est pas nul.

Attention : ce n'est pas de la proportionnalité

Avec $v(x) = 2x + 4$, on a $v(1) = 6$ et $v(3) = 10$.

✗ « La durée triple, donc le prix triple : $3 \times 6 = 18$. »

✓ Le prix de 3 heures est 10, et $10 \neq 18$. Le casque n'est payé qu'une fois. Si $b \neq 0$, les images ne sont pas proportionnelles aux nombres.

À toi de jouer

À toi : sans calculer les images

On reprend $f(x) = 3x - 4$. Trouve $f(10) - f(6)$ grâce aux accroissements. Contrôle ensuite en calculant les deux images.

Indice 1
Les accroissements des images sont proportionnels à ceux de x, avec le coefficient 3.
Indice 2
L'accroissement de x vaut $10 - 6 = 4$.
Indice 3
Point délicat : on multiplie l'accroissement par le coefficient 3, et non par l'ordonnée à l'origine -4.

Réponse
Avec les accroissements. L'accroissement de x est $10 - 6 = 4$. On le multiplie par le coefficient 3 :

$$\begin{aligned} & f(10) - f(6) \\ & = 3 \times (10 - 6) \\ & = 3 \times 4 = 12 \end{aligned}$$

Contrôle. $f(10) = 30 - 4 = 26$ et $f(6) = 18 - 4 = 14$. On trouve bien $26 - 14 = 12$.

Conclusion. La différence $f(10) - f(6)$ vaut 12.

Retiens l'idée : pour une fonction affine, chaque pas de 1 sur x ajoute toujours a à l'image. Cette régularité explique la forme de sa représentation graphique. Tu vas la découvrir maintenant.

Représentation graphique d'une fonction affine : une droite

Que forment les points ?

Devine : Que forment ces points

On donne $r(x) = 2x - 1$ et son tableau de valeurs.

x	-1	0	1	2	3
$r(x)$	-3	-1	1	3	5

On place les points de coordonnées $(x; r(x))$ dans un repère. Que vont-ils former ?

A. Une ligne arrondie, comme un arc.

Faux.

Faux. D'un point au suivant, on avance de 1 et on monte toujours de 2 : la ligne ne se courbe pas.

B. Des points placés sans aucun ordre.

Faux.

Faux. Les images augmentent régulièrement de 2 quand x augmente de 1.

C. Des points sur une même droite.

Juste.

Oui. À chaque pas de 1 vers la droite, on monte de 2 : les points sont alignés.

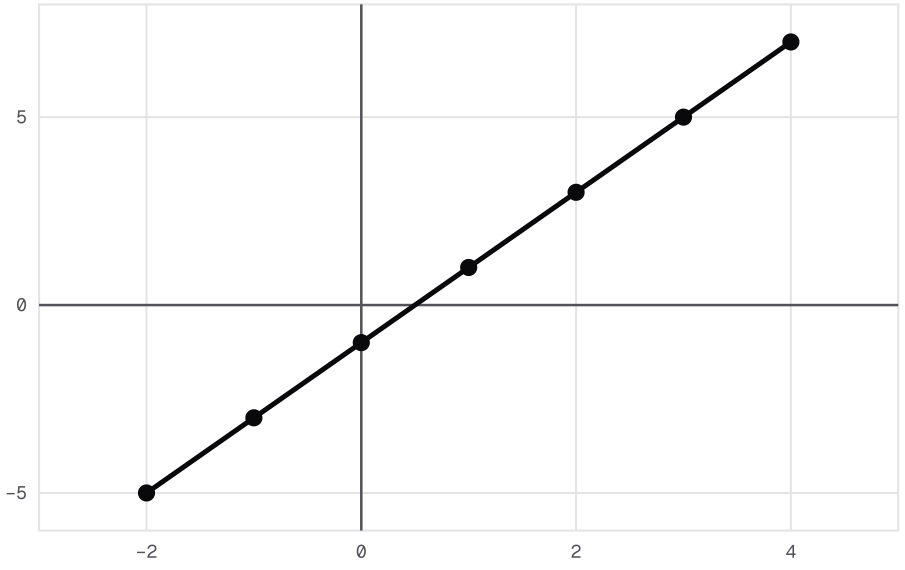
D. Une droite qui passe par l'origine.

Faux.

Faux. Le point d'abscisse 0 est $(0; -1)$, et non $(0; 0)$.

Correction

Les points sont alignés : à chaque pas de 1 sur x, l'image augmente de 2, le coefficient de r. La droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; -1)$: elle ne passe pas par l'origine.



Les cinq points du tableau de la fonction r sont alignés sur une droite.

Rappel du chapitre sur le repère : un point $M(x;y)$ a pour abscisse x et pour ordonnée y. Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite de la forme $y = ax + b$. Ici, chaque point placé a pour ordonnée l'image de son abscisse.

La propriété

Propriété : Représentation graphique d'une fonction affine

Dans un repère du plan, la **représentation graphique** de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est l'ensemble des points $M(x; f(x))$. C'est la **droite** d'équation réduite

$$y = ax + b.$$

- Cette droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; b)$.
- Son coefficient directeur est le coefficient a de f.
- Un point $M(x;y)$ appartient à cette droite si, et seulement si, $y = f(x)$.

Si f est linéaire ($b = 0$), la droite passe par l'origine du repère. Si f est constante ($a = 0$), la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer, comme l'équation réduite d'une droite dans le chapitre sur le repère.

En clair : les points $(x; f(x))$ sont alignés sur une droite. Elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0; b)$. Le nombre a s'appelle aussi le **coefficient directeur** de la droite : c'est le même nombre que le coefficient de f.

Exemple : Un point est-il sur la droite

On reprend $r(x) = 2x - 1$.

- $A(4; 7)$: on calcule $r(4) = 2 \times 4 - 1 = 7$. C'est l'ordonnée de A : le point A est sur la droite.
- $B(-2; -4)$: on calcule $r(-2) = 2 \times (-2) - 1 = -5$. Or $-5 \neq -4$: le point B n'est pas sur la droite.

Tracer la droite

Méthode : tracer la représentation graphique

1. **Choisir deux nombres.** On prend 0 et un autre nombre facile, puis on calcule leurs images.

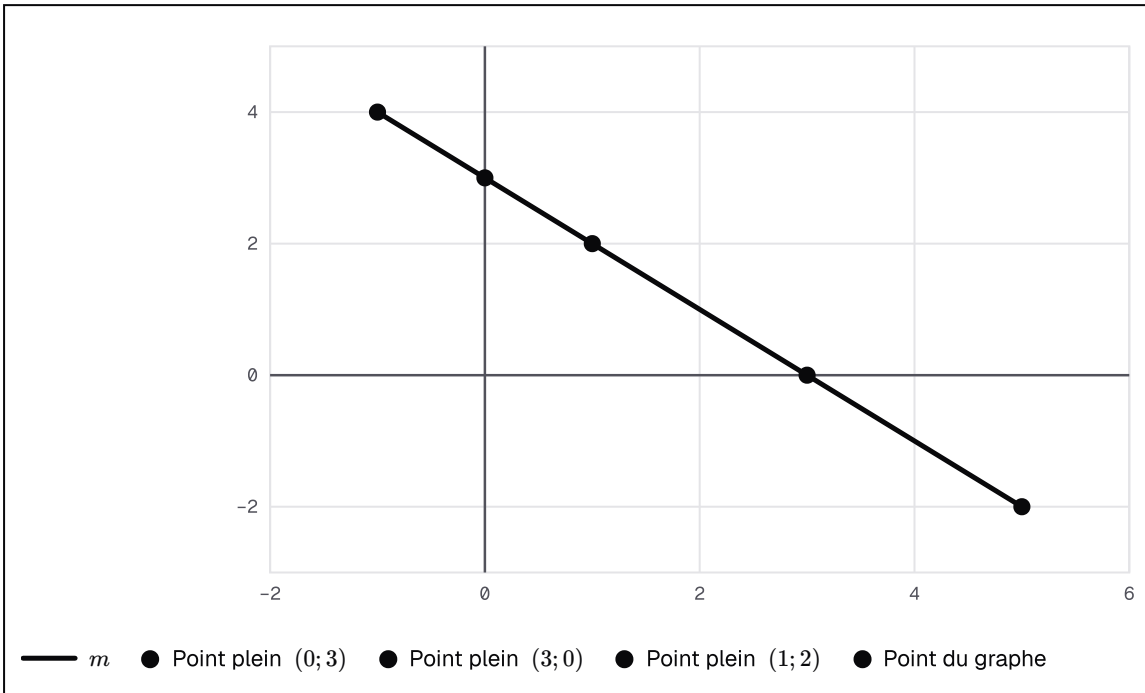
2. **Placer les deux points.** Le point d'abscisse 0 est $(0; b)$, sur l'axe des ordonnées.
3. **Tracer.** On trace la droite qui passe par ces deux points.
4. **Contrôler.** On calcule un troisième point : il doit être sur la droite.

Exemple : Tracer la droite d'une fonction

On trace la droite de $m(x) = -x + 3$.

x	0	3	1
$m(x)$	3	0	2

On place $(0; 3)$ et $(3; 0)$, puis on trace la droite. Le troisième point, $(1; 2)$, sert de contrôle : il est bien sur la droite.



La droite de m passe par (0 ; 3) et (3 ; 0) ; le point de contrôle (1 ; 2) est bien sur la droite.

Vérifie : Deux points pour une droite

On veut tracer la droite de $s(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Quels deux points peut-on placer ?

A. $(0; 1)$ et $(2; 2)$

Juste.

Oui. $s(0) = 1$ et $s(2) = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$.

B. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $(2;2)$

Faux.

Faux. L'ordonnée à l'origine est 1, et non le coefficient $\frac{1}{2}$: $s(0)=1$.

C. $(1;0)$ et $(2;2)$

Faux.

Faux. L'abscisse s'écrit en premier : le point d'abscisse 0 est $(0;1)$. De plus, $s(1)=\frac{3}{2}$, et non 0.

D. $(0;1)$ et $(2;3)$

Faux.

Faux. $s(2)=\frac{1}{2}\times 2+1=2$, et non 3.

Correction

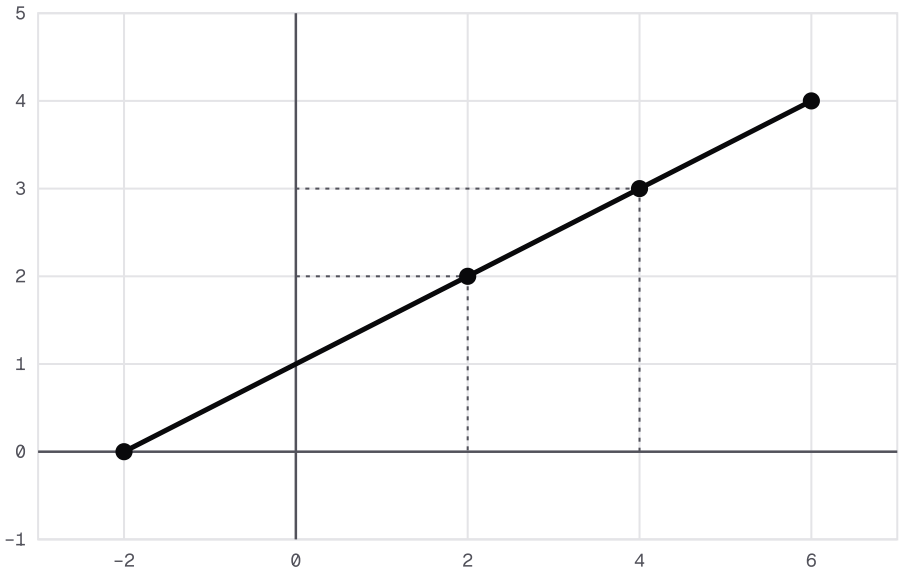
On calcule deux images : $s(0)=1$ et $s(2)=1+1=2$. On place $(0;1)$ et $(2;2)$, puis on trace la droite.

Contrôle possible : $s(4)=2+1=3$, donc le point $(4;3)$ est aussi sur la droite.

Lire sur la droite

Méthode : lire sur la droite

1. **Lire une image.** On part de l'abscisse, sur l'axe horizontal. On va verticalement jusqu'à la droite, puis horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées.
2. **Lire le nombre dont l'image est connue.** On part de l'ordonnée, sur l'axe vertical. On va horizontalement jusqu'à la droite, puis verticalement jusqu'à l'axe des abscisses.
3. **Confirmer.** Une lecture graphique est approchée : on la confirme par le calcul quand on connaît la fonction.



Lecture sur la droite de s : l'image de 4 est 3, et le nombre dont l'image est 2 est 2.

Attention : une lecture est approchée

Sur la droite de s, on cherche l'image de $\frac{1}{3}$. On lit environ $1{,}2$.

✗ « $s\left(\frac{1}{3}\right) = 1{,}2$. »

✓ Le calcul donne la valeur exacte :

$$s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$$

Or $\frac{7}{6} \neq 1{,}2$. On écrit « environ $1{,}2$ » pour une lecture, et $\frac{7}{6}$ pour la valeur exacte.

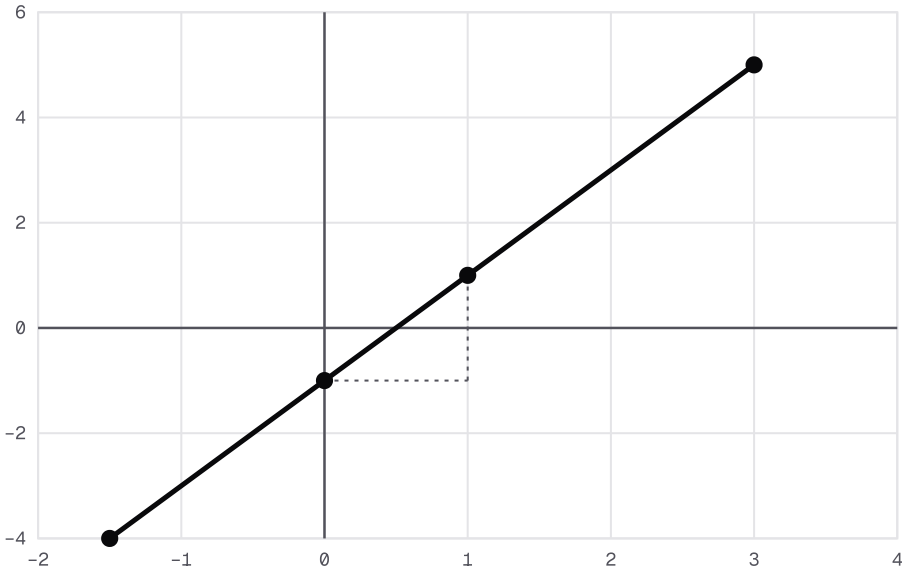
Lire le coefficient et l'ordonnée à l'origine

Méthode : lire a et b sur une droite

1. **Lire b.** On lit l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées.
2. **Lire a.** On part d'un point de la droite et on avance de 1 vers la droite. On compte de combien il faut monter ou descendre pour retrouver la droite : on monte de a si a est positif ; si a est négatif, on descend de $-a$.
3. **Écrire la fonction.** On écrit $f(x) = ax + b$.
4. **Confirmer.** Cette lecture est approchée : avec deux points lisibles, on la confirme par le quotient des accroissements.

Exemple sur la première figure : la droite de r coupe l'axe des ordonnées au point $(0; -1)$, donc $b = -1$. On part de ce point et on avance de 1 : on retrouve la droite au point $(1; 1)$.

On monte donc de 2 : $a = 2$. La fonction est $r(x) = 2x - 1$.



Sur la droite de r : depuis (0 ; –1), on avance de 1, puis on monte de 2 pour retrouver la droite en (1 ; 1). Donc b = –1 et a = 2.

À toi : Lire une droite

Une droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; -2)$. Quand on avance de 1 vers la droite, il faut monter de 1 pour la retrouver. Quelle fonction représente-t-elle ?

A. $x \mapsto -2x + 1$

Faux.

Faux. Tu as échangé les deux nombres. La montée de 1, lue en avançant de 1, donne le coefficient.

B. $x \mapsto x + 2$

Faux.

Faux. La droite coupe l'axe au point d'ordonnée -2 : $b = -2$, et non 2.

C. $x \mapsto -x - 2$

Faux.

Faux. La droite monte quand on avance : son coefficient est positif.

D. $x \mapsto x - 2$

Juste.

Oui. Le coefficient est 1, l'ordonnée à l'origine est -2.

Correction

L'ordonnée à l'origine se lit sur l'axe des ordonnées : $b = -2$.

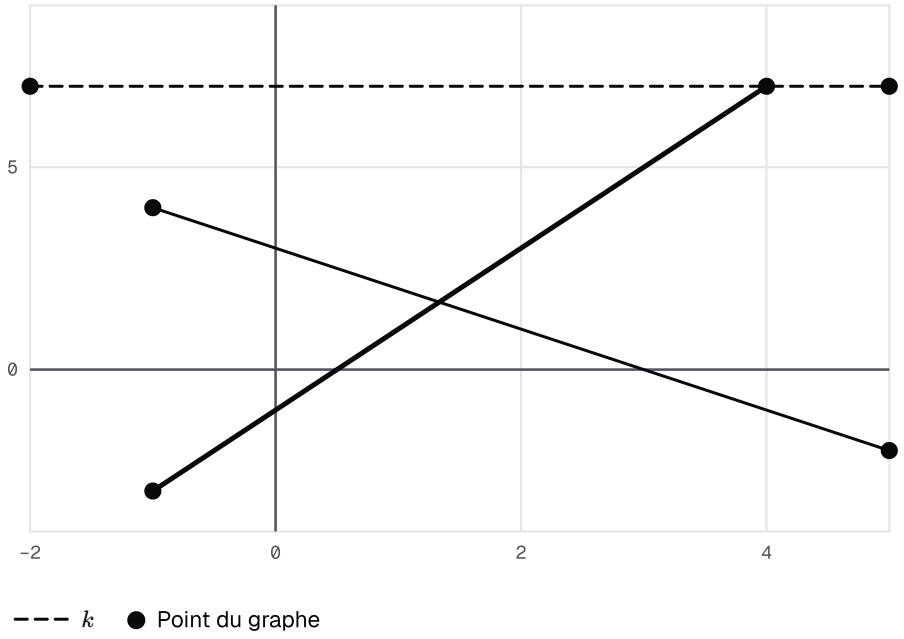
Le coefficient se lit en avançant de 1 : on monte de 1, donc $a = 1$.

La fonction est $x \mapsto x - 2$.

Remarque : Observation : le sens de la droite

Lis la droite de gauche à droite.

- Si $a > 0$, elle monte, comme celle de $r(x) = 2x - 1$.
- Si $a < 0$, elle descend, comme celle de $m(x) = -x + 3$.
- Si $a = 0$, elle est horizontale, comme celle de $k(x) = 7$.



Lues de gauche à droite : la droite de r monte (a = 2), celle de m descend (a = –1), celle de k est horizontale (a = 0).

Une droite, pas toujours

Attention : une représentation graphique n'est pas toujours une droite

L'aire d'un carré de côté x est x^2. Pour $x = 2$, 3 et 4, l'aire vaut 4, 9 et 16.

✗ « On relie ces points par une droite. »

✓ Quand x augmente de 1, l'aire augmente de 5, puis de 7. Les accroissements ne sont pas proportionnels : $x \mapsto x^2$ n'est pas une fonction affine.

D'ailleurs, les points $(2;4)$, $(3;9)$ et $(4;16)$ ne sont pas alignés : on avance de 1 à chaque fois, mais on monte de 5, puis de 7.

À toi : décrire une droite sans la tracer

On donne $w(x) = -2x + 4$. Sans tracer : où sa droite coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? Monte-t-elle ou descend-elle ? Passe-t-elle par le point $C(3;-2)$?

Indice 1
L'ordonnée à l'origine donne le point situé sur l'axe des ordonnées.
Indice 2
Regarde le signe du coefficient -2.
Indice 3
Point délicat : pour le point C, calcule $w(3)$ et compare avec l'ordonnée de C.

Réponse
L'axe des ordonnées. L'ordonnée à l'origine est $b = 4$: la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0;4)$.

Le sens. Le coefficient -2 est négatif : la droite descend.

Le point C. On calcule l'image de l'abscisse de C :

$$\begin{aligned} w(3) &= -2 \times 3 + 4 \\ &= -6 + 4 = -2 \end{aligned}$$

C'est l'ordonnée de C.

Conclusion. La droite de w coupe l'axe des ordonnées au point $(0;4)$, elle descend, et elle passe par C.

Déterminer une fonction affine à partir de deux nombres et leurs images

Deux nombres et leurs images

Devine : Trouver le coefficient

Une fonction affine d vérifie $d(-1) = 7$ et $d(3) = -1$. Quel est son coefficient ?

A. -2

Juste.
Oui. $\dfrac{-1-7}{3-(-1)} = \dfrac{-8}{4} = -2$.

B. 2

Faux.
Faux. L'ordre a changé entre le haut et le bas : $\dfrac{-1-7}{-1-3} = 2$ mélange les deux nombres.

C. -8

Faux.

Faux. $-1-7=-8$ est l'accroissement des images. Il faut encore le diviser par l'accroissement de x.

D. -4

Faux.

Faux. L'accroissement de x est $3-(-1)=4$, et non $3-1=2$.

Correction

Le coefficient est le quotient des accroissements. En haut comme en bas, on part du nombre 3 :

$$\begin{aligned} a &= \frac{d(3)-d(-1)}{3-(-1)} \\ &= \frac{-1-7}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{aligned}$$

Le coefficient de d est -2.

Les accroissements donnent le coefficient à partir de deux images. Il reste à trouver l'ordonnée à l'origine b : une seule image suffit.

La propriété suivante dit qu'une seule fonction affine convient. Pourquoi est-ce vrai ? Le coefficient est imposé par les accroissements, puis une seule valeur de b donne la bonne image.

La propriété et sa preuve

Propriété : Fonction affine déterminée par deux nombres et leurs images

Soit x_1 et x_2 deux nombres **différents**, et y_1 et y_2 deux nombres. Il existe une seule fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ telle que $f(x_1)=y_1$ et $f(x_2)=y_2$. Ses coefficients sont :

$$a = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \text{et} \quad b = y_1 - a\,x_1.$$

En particulier, deux points d'abscisses différentes $A(x_1;y_1)$ et $B(x_2;y_2)$ déterminent une seule fonction affine dont la représentation graphique passe par A et B.

Démonstration

Étape 1. Si une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ convient, la proportionnalité des accroissements, qui s'applique car x_1 et x_2 sont différents, donne $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = a$, donc $a = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

Étape 2. De $f(x_1)=y_1$, on tire $ax_1+b=y_1$, donc $b=y_1-ax_1$. Les nombres a et b sont ainsi imposés : il y a au plus une fonction qui convient.

Étape 3. Réciproquement, avec ces valeurs de a et b : $f(x_1) = ax_1 + y_1 - ax_1 = y_1$, et $f(x_2) = ax_2 + y_1 - ax_1 = y_1 - a(x_1 - x_2) = y_1 - (y_1 - y_2) = y_2$, car $a(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$ par définition de a. Cette fonction convient : il y en a une, et une seule.

En clair : avec deux nombres différents et leurs images, une seule fonction affine convient. On trouve a avec les accroissements, puis b avec une image.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

- D'abord, le coefficient a est imposé par le quotient des accroissements.
- Ensuite, le nombre b est imposé par une image. Donc une seule fonction peut convenir.
- Enfin, on vérifie que cette fonction donne bien y_1 et y_2. Donc elle existe.

Vérifie : Une condition indispensable

La propriété demande que x_1 et x_2 soient différents. À quel moment de la preuve cette condition sert-elle ?

A. Pour calculer $b = y_1 - ax_1$.

Faux.

Faux. Ce calcul ne contient aucune division : il est possible pour tous les nombres.

B. Pour diviser par $x_1 - x_2$ dans le calcul de a.

Juste.

Oui. Si $x_1 = x_2$, alors $x_1 - x_2 = 0$, et on ne divise jamais par 0.

C. Pour que le coefficient a soit positif.

Faux.

Faux. Le coefficient peut être négatif, comme celui de d.

Correction

La condition sert au calcul de a : on divise par $x_1 - x_2$, qui doit être non nul. Avec deux nombres égaux, le dénominateur serait nul : on ne pourrait pas calculer le coefficient.

Exemple : Terminer le calcul

On reprend $d(-1) = 7$ et $d(3) = -1$, avec $a = -2$. On calcule b avec l'image de -1 :

$$\begin{aligned} b &= 7 - (-2) \times (-1) \\ &= 7 - 2 = 5. \end{aligned}$$

On a utilisé $(-2) \times (-1) = 2$. Donc, pour tout nombre x, $d(x) = -2x + 5$.

Vérification : $d(3) = -2 \times 3 + 5 = -6 + 5 = -1$. C'est bien l'image donnée.

La méthode

Méthode : déterminer une fonction affine

1. **Calculer a.** Avec $x_1 \neq x_2$, on calcule $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, avec le même ordre en haut et en bas.
2. **Calculer b.** On calcule $b = y_1 - ax_1$.
3. **Écrire et vérifier.** On écrit $f(x) = ax + b$, puis on vérifie que $f(x_2) = y_2$.

Si le coefficient est déjà connu, on commence directement au calcul de b.

Attention : garder le même ordre

Avec $d(-1) = 7$ et $d(3) = -1$:

✗ $\dfrac{-1-7}{-1-3} = \dfrac{-8}{-4} = 2$: en haut, on part de 3 ; en bas, on part de -1.

✓ $\dfrac{-1-7}{3-(-1)} = \dfrac{-8}{4} = -2$: en haut et en bas, on part du même nombre, 3.

À toi : Deux points d'une droite

La droite qui représente une fonction affine ℓ passe par $M(1;2)$ et $N(3;8)$. Dire qu'elle passe par M, c'est dire que $\ell(1) = 2$: chaque point donne un nombre et son image. Quelle est l'expression de $\ell(x)$?

A. $3x + 2$

Faux.

Faux. Le coefficient 3 est juste, mais b n'est pas l'ordonnée de M : $b = 2 - 3 \times 1 = -1$.

B. $-3x + 5$

Faux.

Faux. Le quotient $\dfrac{8-2}{1-3}$ mélange l'ordre : il donne -3 au lieu de 3.

C. $3x - 1$

Juste.

Oui. $\ell(1) = 3 - 1 = 2$ et $\ell(3) = 9 - 1 = 8$.

D. $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$

Faux.

Faux. Tu as divisé l'accroissement de x par celui des images. Le coefficient est $\dfrac{8-2}{3-1} = 3$.

Correction

Le coefficient. C'est le quotient des accroissements :

$$a = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

L'ordonnée à l'origine. On utilise $\ell(1) = 2$: $b = 2 - 3 \times 1 = -1$.

Vérification. $\ell(3) = 9 - 1 = 8$.

Conclusion. Pour tout nombre x, $\ell(x) = 3x - 1$.

À toi : deux images données

Une fonction affine j vérifie $j(-2) = 1$ et $j(2) = 5$. Détermine $j(x)$, puis vérifie.

Indice 1
Commence par le coefficient : c'est le quotient des accroissements.
Indice 2
L'accroissement de x vaut $2 - (-2) = 4$.
Indice 3
Point délicat : pour b, calcule $1 - a \times (-2)$, avec les parenthèses autour de -2.

Réponse
Le coefficient. C'est le quotient des accroissements :

$$a = \frac{5-1}{2-(-2)} = \frac{4}{4} = 1$$

L'ordonnée à l'origine. On utilise $j(-2) = 1$, avec des parenthèses autour de -2 :

$$\begin{aligned} b &= 1 - 1 \times (-2) \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Vérification. $j(2) = 2 + 3 = 5$.

Conclusion. Pour tout nombre x, $j(x) = x + 3$.

Le coefficient et une image

Devine : La carte de membre

Une salle de jeux fait payer 3 dirhams par partie, en plus d'une carte de membre. Pour 4 parties, on paie 20 dirhams en tout. Quel est le prix de la carte ?

A. 17 dirhams
Faux.
Faux. Tu as retranché le prix d'une seule partie : $20 - 3 = 17$. Il y a 4 parties.

B. 32 dirhams
Faux.

Faux. Tu as ajouté 12 au lieu de le retrancher : $20 + 12 = 32$.

C. 5 dirhams

Faux.

Faux. $20 \div 4 = 5$ est le prix moyen d'une partie, carte comprise.

D. 8 dirhams

Juste.

Oui. Les parties coûtent $3 \times 4 = 12$ dirhams. Il reste $20 - 12 = 8$ dirhams pour la carte.

Correction

Les 4 parties coûtent $3 \times 4 = 12$ dirhams. La carte vaut donc $20 - 12 = 8$ dirhams.

Contrôle : $3 \times 4 + 8 = 20$.

Ici, le prix d'une partie est connu : c'est le coefficient. Une seule image suffit alors pour trouver b.

Pourquoi est-ce vrai ? Il ne reste qu'une inconnue, b. L'image connue donne une équation qui la fixe.

Une seule image suffit

Propriété : Fonction affine déterminée par son coefficient et un nombre et son image

Soit a un nombre, et x_1 et y_1 deux nombres. Il existe une seule fonction affine f de coefficient a telle que $f(x_1) = y_1$. C'est la fonction

$$f : x \mapsto ax + b \quad \text{avec} \quad b = y_1 - a\,x_1.$$

Démonstration

Étape 1. Une fonction affine de coefficient a s'écrit $f(x) = ax + b$, où seul b est inconnu.

Étape 2. La condition $f(x_1) = y_1$ s'écrit $ax_1 + b = y_1$. On retranche ax_1 aux deux membres : $b = y_1 - ax_1$. Le nombre b est donc imposé.

Étape 3. Réciproquement, avec cette valeur de b : $f(x_1) = ax_1 + y_1 - ax_1 = y_1$. La fonction convient, et c'est la seule.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En clair : si on connaît a, une seule image suffit pour trouver b.

Dans la preuve, l'image connue donne une équation du premier degré, d'inconnue b. On la résout en retranchant ax_1. On vérifie enfin que la fonction trouvée convient.

Vérifie : Retrouver l'ordonnée à l'origine

Une fonction affine n a pour coefficient -1, et $n(2) = 5$. Comme dans la preuve, on retranche ax_1 aux deux membres. Quelle est l'ordonnée à l'origine de n ?

A. 7

Juste.

Oui. $b = 5 - (-1) \times 2 = 5 + 2 = 7$. Contrôle : $n(2) = -2 + 7 = 5$.

B. 3

Faux.

Faux. Tu as calculé $5 - 2$. Mais $(-1) \times 2 = -2$, et $5 - (-2) = 7$.

C. 5

Faux.

Faux. 5 est l'image de 2, et non l'image de 0.

Correction

Ici $a = -1$ et $x_1 = 2$, donc $ax_1 = (-1) \times 2 = -2$.

La condition $n(2) = 5$ s'écrit $-2 + b = 5$. On retranche ax_1 aux deux membres :

$$b = 5 - (-2) = 7$$

Donc, pour tout nombre x, $n(x) = -x + 7$. L'ordonnée à l'origine de n est 7.

Exemple : Un coefficient et une image

Une fonction affine c a pour coefficient $\frac{1}{2}$, et $c(4) = 1$. On calcule l'ordonnée à l'origine :

$$b = 1 - \frac{1}{2} \times 4 = 1 - 2 = -1.$$

Donc, pour tout nombre x, $c(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Vérification : $c(4) = 2 - 1 = 1$.

Résoudre des problèmes avec les fonctions affines

Traduire une situation

À toi : Le tarif du club

Un club de vélo demande 10 dirhams d'inscription, puis 2 dirhams par heure de location. Quelle expression donne le prix pour x heures ?

A. $10x + 2$

Faux.

Faux. L'inscription se paie une seule fois : elle ne se multiplie pas par le nombre d'heures.

B. $12x$

Faux.
Faux. 12 dirhams est le prix d'une heure, inscription comprise. Pour 2 heures, on paie 14 dirhams, et non 24.

C. $2x$

Faux.
Faux. L'inscription manque : pour 0 heure, on paie déjà 10 dirhams.

D. $2x + 10$

Juste.
Oui. $2x$ pour les heures, plus 10 pour l'inscription.

Correction
La partie fixe est l'inscription : $b = 10$. La partie proportionnelle est de 2 dirhams par heure : $a = 2$. Le prix est $2x + 10$ dirhams.

Pour traduire une situation, on cherche deux choses. Ce qui ne dépend pas de x donne b. Ce qui augmente du même montant à chaque unité donne a.

Méthode : résoudre un problème

1. **Choisir la variable.** On nomme x et on précise son unité.
2. **Repérer la partie fixe.** C'est l'ordonnée à l'origine b.
3. **Repérer la partie proportionnelle.** Son coefficient est a.
4. **Écrire et utiliser.** On écrit $f(x) = ax + b$. Si l'énoncé donne deux mesures, on retrouve f comme dans la section précédente. On calcule ensuite des images, ou on cherche un nombre dont l'image est connue.
5. **Comparer deux tarifs.** On cherche quand les deux prix sont égaux, ou on trace les deux droites.

Comparer deux tarifs

Une boutique de location ne demande aucune inscription, mais l'heure y coûte 3 dirhams. On note $t_1(x) = 3x$ le prix de la boutique et $t_2(x) = 2x + 10$ celui du club. Quel tarif choisir ?

Exemple : Comparer par le calcul

- Pour 6 heures : $t_1(6) = 18$ et $t_2(6) = 2 \times 6 + 10 = 22$. La boutique est moins chère.
- Pour 15 heures : $t_1(15) = 45$ et $t_2(15) = 2 \times 15 + 10 = 40$. Le club est moins cher.

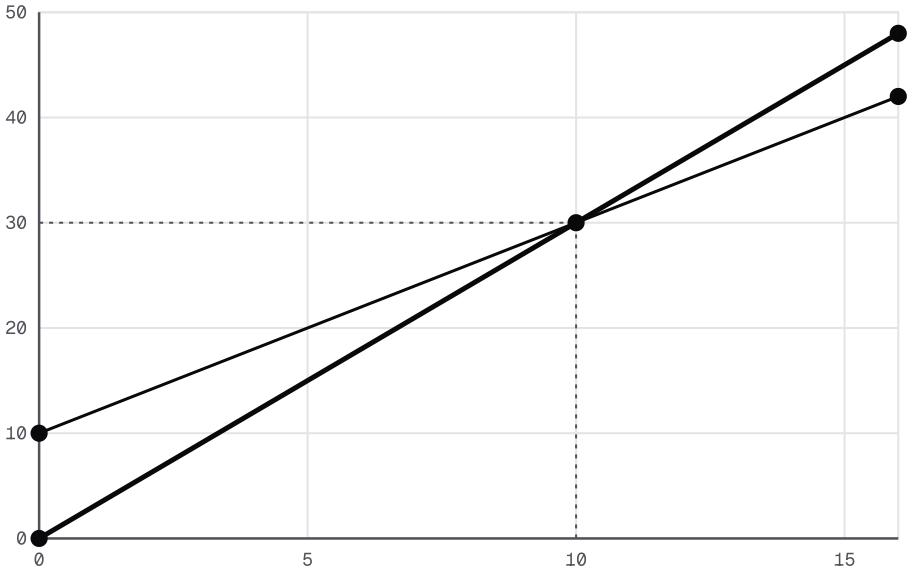
Prix égaux. On résout l'équation :

$$3x = 2x + 10$$

On peut retrancher un même terme aux deux membres : on retranche $2x$, donc $x = 10$.

Vérification : $t_1(10) = 30$ et $t_2(10) = 30$.

Comparer sur le graphique



Les droites des deux tarifs se coupent au point I(10 ; 30) : pour 10 heures, les deux prix valent 30 dirhams.

Vérifie : Lire le tarif le moins cher

On loue un vélo pendant 12 heures. D'après le graphique, quel tarif est le moins cher ?

A. La boutique, car sa droite part de l'origine.

Faux.

Faux. Partir de l'origine aide pour peu d'heures. Après 10 heures, sa droite passe au-dessus de l'autre.

B. Le club, car sa droite est en dessous après 10 heures.

Juste.

Oui. Le calcul le confirme : $t_2(12) = 34$ et $t_1(12) = 36$.

C. Les deux coûtent pareil, car les droites se coupent.

Faux.

Faux. Les prix ne sont égaux que pour 10 heures exactement, au point I.

Correction

Après le point I, la droite du club est sous celle de la boutique.

> Pour 12 heures : $t_2(12) = 2 \times 12 + 10 = 34$ et $t_1(12) = 3 \times 12 = 36$.
>
> Le club est moins cher de 2 dirhams.

Remarque : Pour bien rédiger : la comparaison

On conclut par des phrases qui répondent à la question posée. Par exemple : « Les deux tarifs sont égaux pour 10 heures. Pour moins de 10 heures, la boutique est moins chère. Pour plus de 10 heures, le club est moins cher. »

Dans d'autres disciplines

Les fonctions affines servent aussi en sciences. Une longueur qui augmente régulièrement se traduit par $ax + b$. C'est aussi le cas d'une température qui monte du même nombre de degrés chaque minute.

Exemple : La longueur d'un ressort

Un ressort mesure 12 cm sans charge. Chaque kilogramme accroché l'allonge de $\frac{1}{2}$ cm. Pour x kilogrammes, sa longueur est $L(x) = \frac{1}{2}x + 12$.

- Avec 4 kg : $L(4) = 2 + 12 = 14$ cm.
- Pour une longueur de 15 cm : $\frac{1}{2}x + 12 = 15$, donc $\frac{1}{2}x = 3$. On multiplie par 2 : $x = 6$.

Vérification : $L(6) = 3 + 12 = 15$. Il faut accrocher 6 kg.

Exemple : Deux mesures, une fonction

Un aquarium contient déjà de l'eau. Un robinet y verse le même nombre de litres chaque minute. Après 2 minutes, l'aquarium contient 16 litres ; après 6 minutes, il en contient 28.

Le volume est une fonction affine V de la durée x, en minutes. Son coefficient est le quotient des accroissements :

$$a = \frac{28 - 16}{6 - 2} = \frac{12}{4} = 3$$

L'image de 2 donne ensuite l'ordonnée à l'origine :

$$b = 16 - 3 \times 2 = 10$$

Donc, pour toute durée x, $V(x) = 3x + 10$. Contrôle : $V(6) = 18 + 10 = 28$.

Le coefficient 3 est le nombre de litres versés chaque minute. L'ordonnée à l'origine 10 est le volume au départ, à la minute 0.

À toi : L'eau qui chauffe

On chauffe de l'eau à 20 degrés. Sa température monte de 3 degrés par minute : après x minutes, elle vaut $T(x) = 3x + 20$. Au bout de combien de minutes atteint-elle 80 degrés ?

A. Au bout de 60 minutes

Faux.

Faux. $80 - 20 = 60$ degrés est la hausse de température. Il faut la diviser par les 3 degrés de chaque minute.

B. Au bout de $\dfrac{100}{3}$ minutes

Faux.

Faux. Tu as ajouté 20 au lieu de le retrancher : $\dfrac{80 + 20}{3} = \dfrac{100}{3}$.

C. Au bout de 20 minutes

Juste.

Oui. $T(20) = 3 \times 20 + 20 = 80$.

D. Au bout de 260 minutes

Faux.

Faux. Tu as calculé l'image de 80 : $T(80) = 260$. Ici, c'est la température qui est connue.

Correction

On résout $3x + 20 = 80$.

On retranche 20 aux deux membres : $3x = 60$. On divise les deux membres par 3 : $x = 20$.

Vérification : $T(20) = 60 + 20 = 80$.

L'eau atteint 80 degrés au bout de 20 minutes.

À toi : deux offres de recharge

Pour son téléphone, Salma hésite entre deux offres. Offre 1 : 2 dirhams par minute d'appel, soit $p_1(x) = 2x$. Offre 2 : 30 dirhams par mois, plus 1 dirham par minute, soit $p_2(x) = x + 30$. Pour combien de minutes les deux offres coûtent-elles autant ? Quelle offre choisir pour 45 minutes ?

Indice 1

Les deux offres coûtent autant quand $p_1(x) = p_2(x)$.

Indice 2

Résous $2x = x + 30$ en retranchant x aux deux membres.

Indice 3

Point délicat : pour 45 minutes, calcule les deux prix avant de conclure par une phrase.

Réponse

Prix égaux. On résout $p_1(x) = p_2(x)$, c'est-à-dire :

$$2x = x + 30$$

On retranche x aux deux membres : $x = 30$. Pour 30 minutes, les deux offres coûtent 60 dirhams.

Pour 45 minutes. On calcule $p_1(45) = 90$ et $p_2(45) = 45 + 30 = 75$.

Conclusion. Les deux offres coûtent autant pour 30 minutes. Pour 45 minutes, Salma choisit l'offre 2, la moins chère.

Synthèse : fonctions linéaires et fonctions affines

Linéaire ou affine

Vérifie : Une droite par l'origine

La droite de laquelle de ces fonctions passe par l'origine du repère ?

A. $x \mapsto -2x + 1$

Faux.

Faux. L'image de 0 vaut 1 : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; 1)$.

B. $x \mapsto -2x$

Juste.

Oui. L'image de 0 vaut 0 : c'est une fonction linéaire.

C. $x \mapsto 3$

Faux.

Faux. C'est une fonction constante : sa droite est horizontale, à la hauteur 3.

D. $x \mapsto x + 2$

Faux.

Faux. L'image de 0 vaut 2, et non 0.

Correction

Une droite passe par l'origine quand l'image de 0 vaut 0, c'est-à-dire quand $b = 0$. Seule $x \mapsto -2x$ convient : c'est une fonction linéaire.

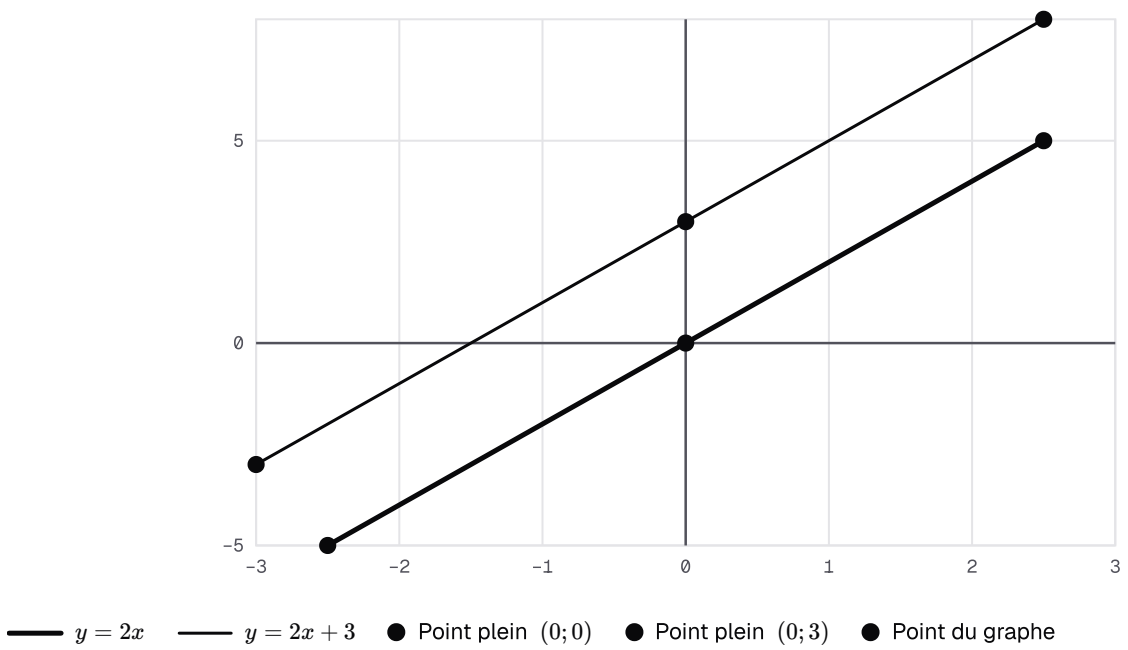
Rappel du chapitre sur les fonctions linéaires : une fonction linéaire s'écrit $x \mapsto ax$. Ses images sont proportionnelles aux nombres, et a est le coefficient de proportionnalité. Sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.

Une fonction linéaire est donc une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est nulle. Le tableau compare les deux cas.

	Linéaire, $b = 0$	**Affine non linéaire,** $b \neq 0$
Expression	$f(x) = ax$	$f(x) = ax + b$

	Linéaire, $b = 0$	**Affine non linéaire,** $b \neq 0$
Image de 0	0	b
Droite	passe par l'origine	coupe l'axe des ordonnées en $(0; b)$
Images proportionnelles aux nombres	oui	non
Accroissements proportionnels	oui, de coefficient a	oui, de coefficient a

Une fonction constante correspond au cas $a = 0$: sa droite est parallèle à l'axe des abscisses, ou confondue avec cet axe si $b = 0$. La fonction $x \mapsto 0$ est à la fois linéaire et constante.



La droite d'une fonction linéaire, ici x ↦ 2x, passe par l'origine ; celle d'une fonction affine non linéaire, ici x ↦ 2x + 3, coupe l'axe des ordonnées en (0 ; 3).

Vérifier sur des exemples

Exemple : Doubler le nombre

On reprend $p(x) = \frac{1}{2}x$ et $q(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

- $p(2) = 1$ et $p(4) = 2$: doubler le nombre double l'image.
- $q(2) = 4$ et $q(4) = 5$: doubler le nombre ne double pas l'image, car $5 \neq 2 \times 4$.

Pourtant, les deux images augmentent de 1 quand x passe de 2 à 4 : même coefficient, mêmes accroissements.

À toi : reconnaître la fonction d'un tableau

Voici un tableau de valeurs d'une fonction affine.

x	1	2	4
Image	1	3	7

Cette fonction est-elle linéaire ? Trouve son expression.

Indice 1
Regarde si les images sont proportionnelles aux nombres : compare les quotients.
Indice 2
Calcule le coefficient avec les deux premières colonnes : $\frac{3-1}{2-1}$.
Indice 3
Point délicat : un seul quotient différent suffit pour dire que le tableau n'est pas de proportionnalité.

Réponse
Linéaire ou non. On compare les quotients : $\frac{1}{1} = 1$ et $\frac{3}{2} \neq 1$. Les images ne sont pas proportionnelles, donc la fonction n'est pas linéaire.

Le coefficient. Avec les deux premières colonnes :

$$a = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

L'ordonnée à l'origine. $b = 1 - 2 \times 1 = -1$.

Contrôle. $2 \times 4 - 1 = 7$.

Conclusion. La fonction n'est pas linéaire : c'est la fonction $x \mapsto 2x - 1$.

Tu as fait le tour du sujet. La fonction linéaire est une fonction affine particulière : celle dont la droite passe par l'origine. Toutes les fonctions affines ont des accroissements proportionnels ; seules les linéaires ont des images proportionnelles.

Ce qu'il faut retenir

À retenir : Ce qu'il faut retenir

- Une fonction affine s'écrit $f(x) = ax + b$: a est le coefficient, b l'ordonnée à l'origine, et $f(0) = b$.
- Pour une image, on remplace x. Pour le nombre dont l'image est k, on résout $ax + b = k$.
- Les accroissements des images sont proportionnels à ceux de x, de coefficient a.
- La représentation graphique est la droite d'équation $y = ax + b$. Deux points suffisent pour la tracer.
- Deux nombres **différents** x_1 et x_2, et leurs images y_1 et y_2, donnent $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, puis $b = y_1 - ax_1$.

À retenir : Les réflexes à garder

- Un nombre négatif se met entre parenthèses quand on remplace x.
- Une réponse se vérifie, puis se conclut par une phrase.
- Une lecture graphique est approchée : le calcul la confirme.
- Pour comparer deux tarifs, on cherche le nombre pour lequel les deux prix sont égaux. Puis on compare les prix de part et d'autre de ce nombre.

Bravo pour ce parcours. Tu sais passer d'une situation à une formule, d'une formule à une droite, et d'une droite à une formule. C'est exactement ce que demande un problème sur les fonctions affines.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les fonctions affines » (3ac · general · mathematiques)