BURHAN

Résumé : Équations et inéquations du premier degré

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/equations-et-inequations/resume

Chapitre	Semestre
Équations et inéquations du premier degré	Semestre 2

Équation du premier degré

Une équation pose une question : quel nombre rend l'égalité vraie ?

Ce résumé rassemble les définitions, les règles et les méthodes du chapitre.

Chaque résolution se termine par une vérification, puis par une phrase de conclusion.

Définition : Équation du premier degré à une inconnue

Une **équation** est une égalité qui contient un nombre inconnu, désigné par une lettre, par exemple x. Cette lettre s'appelle l'**inconnue**.

Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres connus et $a \neq 0$.

Une **solution** de l'équation est un nombre qui, mis à la place de x, rend l'égalité vraie. **Résoudre** l'équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Propriété : Résolution de l'équation ax + b = 0

Soit a et b deux nombres, avec $a \neq 0$. L'équation $ax + b = 0$ a **une seule solution** : le nombre $-\dfrac{b}{a}$.

Cas particulier. Si, après réduction, le nombre qui multiplie x est nul, l'équation s'écrit $0 \times x = c$, où c est un nombre connu :

- si $c \neq 0$, l'équation n'a **aucune solution** ;
- si $c = 0$, **tout nombre** est solution.

Méthode : Résoudre une équation en cinq gestes

1. **Développer et réduire.** Si un membre contient des parenthèses, développe-le, puis réduis-le.
2. **Regrouper.** Mets les termes en x d'un côté et les nombres de l'autre. Pour cela, ajoute ou retranche un même terme aux deux membres.
3. **Diviser.** Divise les deux membres par le nombre qui multiplie x, s'il n'est pas nul.
4. **Vérifier.** Remplace x par le nombre trouvé dans l'équation de départ. Calcule chaque membre séparément : ils doivent être égaux.

5. **Conclure.** Termine par une phrase : « La solution de l'équation est … ».

Exemple : Exemple avec des parenthèses

Résolvons l'équation :

$$5(x-2) = 2x + 11$$

- on développe le membre de gauche ;
- on retranche $2x$ aux deux membres.

$$5x - 10 = 2x + 11$$
$$3x - 10 = 11$$

Puis :

- on ajoute 10 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 3.

$$3x = 21$$
$$x = 7$$

Vérification. À gauche : $5 \times (7-2) = 25$. À droite : $2 \times 7 + 11 = 25$. Les deux membres sont égaux.

Conclusion. La solution de l'équation est 7.

Remarque : Quand les termes en x disparaissent

Avec $3(x+2) = 3x + 1$, on développe : $3x + 6 = 3x + 1$.

On retranche $3x$ et 6 aux deux membres : $0 \times x = -5$. Or $0 \times x$ vaut 0 pour tout nombre x, jamais -5. L'équation n'a donc aucune solution.

Avec $2(x-4) + 8 = 2x$, on développe et on réduit : $2x = 2x$, puis $0 \times x = 0$.

Cette égalité est vraie pour tout nombre x : ici, tout nombre est solution.

Règle du produit nul

Propriété : Règle du produit nul

Soit A et B deux nombres.

- Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
- Réciproquement, si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $A \times B = 0$.

Autrement dit, un produit est nul **si, et seulement si,** l'un au moins de ses facteurs est nul.

Propriété : Équation-produit

Soit a, b, c et d des nombres, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$. L'équation suivante s'appelle une **équation-produit** :

$$(ax + b)(cx + d) = 0$$

Ses solutions sont la solution de l'équation $ax + b = 0$ et la solution de l'équation $cx + d = 0$, c'est-à-dire les nombres $-\dfrac{b}{a}$ et $-\dfrac{d}{c}$. Si ces deux nombres sont égaux, l'équation a une seule solution.

Exemple : Exemple d'équation-produit

Résolvons l'équation :

$$(2x - 3)(x + 4) = 0$$

Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul : $2x - 3 = 0$ ou $x + 4 = 0$.

Première équation :

- on ajoute 3 aux deux membres ;
- on divise par 2.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Seconde équation : on retranche 4 aux deux membres, $x = -4$.

Vérification. Pour $x = \dfrac{3}{2}$, le premier facteur vaut $2 \times \dfrac{3}{2} - 3 = 0$. Pour $x = -4$, le second facteur vaut $-4 + 4 = 0$. Dans les deux cas, le produit est nul.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont $\dfrac{3}{2}$ et -4.

Attention : Seul le zéro permet de séparer les facteurs

Face à $(x - 1)(x + 2) = 10$, il est faux d'écrire $x - 1 = 10$ ou $x + 2 = 10$.

Contrôle : $x - 1 = 10$ donne $x = 11$. Alors $(11 - 1)(11 + 2) = 10 \times 13 = 130$, et non 10.

La règle du produit nul ne s'applique que si l'autre membre vaut 0.

Équations qui se ramènent au premier degré

Méthode : Se ramener à une équation-produit

1. **Tout rassembler.** Ajoute ou retranche les mêmes termes aux deux membres, pour que l'un des membres devienne 0.
2. **Factoriser.** Cherche un facteur commun. Sinon, pense aux identités remarquables.

3. **Appliquer la règle du produit nul.** L'un des facteurs vaut 0.
4. **Résoudre.** Chaque facteur donne une équation du premier degré.
5. **Conclure.** Donne toutes les solutions dans une phrase.

Rappel du chapitre « Calcul numérique » de la 3e année : ces trois égalités, lues de droite à gauche, servent à factoriser.

Carré d'une somme

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Carré d'une différence

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Différence de deux carrés

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Exemple : Exemple avec un facteur commun

Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned}&(x+2)(3x-1)\\&=(x+2)(x+5)\end{aligned}$$

On retranche $(x+2)(x+5)$ aux deux membres :

$$\begin{aligned}&(x+2)(3x-1)\\&-(x+2)(x+5)=0\end{aligned}$$

On met $x+2$ en facteur, puis on réduit le second facteur :

$$\begin{aligned}(x+2)\big((3x-1)-(x+5)\big)&=0\\(x+2)(2x-6)&=0\end{aligned}$$

Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul : $x+2=0$ ou $2x-6=0$, c'est-à-dire $x=-2$ ou $x=3$.

Vérification. Pour $x=3$, chaque membre vaut $5\times 8=40$. Pour $x=-2$, le facteur $x+2$ est nul, donc les deux membres valent 0.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont -2 et 3.

Exemple : Exemple avec une différence de deux carrés

Résolvons l'équation :

$$9x^2-16=0$$

On reconnaît $(3x)^2-4^2$, une différence de deux carrés. Donc $9x^2-16=(3x-4)(3x+4)$.

L'équation devient $(3x-4)(3x+4)=0$, donc $3x-4=0$ ou $3x+4=0$.

Première équation :

- on ajoute 4 aux deux membres ;
- on divise par 3.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 0 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Seconde équation :

- on retranche 4 aux deux membres ;
- on divise par 3.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 0 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vérification. Les deux nombres ont pour carré $\frac{16}{9}$. Pour chacun d'eux : $9 \times \frac{16}{9} - 16 = 0$.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont $\frac{4}{3}$ et $-\frac{4}{3}$.

Attention : Diviser par x fait perdre une solution

Dans $2x^2 = 9x$, si tu divises les deux membres par x, tu trouves seulement $x = \frac{9}{2}$.

Or diviser par x suppose que x n'est pas nul. Et 0 est bien solution : $2 \times 0^2 = 9 \times 0$.

Écris plutôt $2x^2 - 9x = 0$, puis $x(2x - 9) = 0$. Les solutions de l'équation sont 0 et $\frac{9}{2}$.

Inéquations du premier degré

Définition : Inéquation du premier degré à une inconnue

Une **inéquation** est une inégalité qui contient une inconnue, par exemple x.

Une **inéquation du premier degré à une inconnue** est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes $ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ ou $ax + b \geq 0$, où a et b sont des nombres connus et $a \neq 0$.

Une **solution** de l'inéquation est un nombre qui, mis à la place de x, rend l'inégalité vraie. En général, une inéquation a une infinité de solutions. **Résoudre** l'inéquation, c'est trouver toutes ses solutions ; on les représente sur une droite graduée.

Propriété : Transformer une inéquation

On obtient une inéquation qui a **les mêmes solutions** :

- en ajoutant ou en retranchant un même nombre, ou un même terme en x, aux deux membres ;
- en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre **strictement positif**, sans changer le sens de l'inégalité ;
- en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre **strictement négatif**, à condition de **changer le sens** de l'inégalité.

Méthode : Résoudre une inéquation, puis la représenter

1. **Développer et réduire.** Développe et réduis chaque membre si nécessaire.
2. **Regrouper.** Mets les termes en x d'un côté et les nombres de l'autre, comme pour une équation.
3. **Diviser.** Divise par le nombre qui multiplie x. S'il est strictement négatif, change le sens de l'inégalité.
4. **Conclure.** Écris : « Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que … ».
5. **Représenter.** Sur la droite graduée, trace un trait épais sur les solutions. Au nombre qui limite le trait, tourne le crochet vers les solutions si ce nombre est solution, vers l'extérieur sinon.

Exemple : Exemple avec un nombre négatif devant x

Résolvons l'inéquation :

$$3x + 5 > 7x - 3$$

On retranche $7x$ aux deux membres :

$$-4x + 5 > -3$$

Puis :

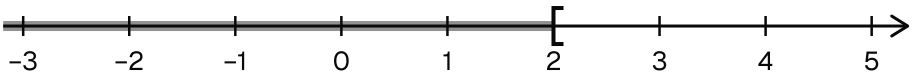
- on retranche 5 aux deux membres ;
- on divise par -4, qui est strictement négatif, donc on change le sens.

$$-4x > -8$$
$$x < 2$$

Conclusion. Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x < 2$.

Droite graduée. Trait épais sur tous les nombres à gauche de 2. En 2, crochet tourné vers l'extérieur, car 2 n'est pas solution.

Contrôle. Pour $x = 0$, l'inéquation de départ devient $5 > -3$: c'est vrai, et on a bien $0 < 2$.



Pour 3x + 5 > 7x - 3, ramenée à x < 2 : trait épais à gauche de 2 et crochet tourné vers l'extérieur.

Attention : Diviser par un nombre négatif : le sens change

De $-5x \leq 15$, on ne tire pas $x \leq -3$. On divise par -5, qui est strictement négatif, donc on change le sens : $x \geq -3$.

Contrôle avec $x = 0$: $-5 \times 0 \leq 15$ est vrai, donc 0 est solution. Or $0 \leq -3$ est faux : la réponse $x \leq -3$ oublierait 0.

Attention : Signe strict ou signe large

Le nombre -1 est solution de $x \geq -1$, mais il n'est pas solution de $x > -1$.

Sur la droite graduée, le crochet en -1 est tourné vers les solutions pour $x \geq -1$.

Il est tourné vers l'extérieur pour $x > -1$.



Avec le signe large, x ≥ -1 : le crochet en -1 se tourne vers le trait épais, puisque -1 est solution.



Avec le signe strict, x > -1 : même trait épais, mais le crochet en -1 se tourne vers l'extérieur, puisque -1 n'est pas solution.

Signe de ax + b

Propriété : Signe de ax + b

Soit a et b deux nombres, avec $a \neq 0$. On note $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ le nombre pour lequel $ax + b = 0$.

- Si $a > 0$: $ax + b$ est strictement négatif quand $x < x_0$, nul quand $x = x_0$, strictement positif quand $x > x_0$.

- Si $a < 0$: $ax + b$ est strictement positif quand $x < x_0$, nul quand $x = x_0$, strictement négatif quand $x > x_0$.

Méthode : Trouver le signe d'une expression du premier degré

1. **Résoudre.** Résous $ax + b = 0$: tu obtiens le nombre x_0.
2. **Regarder le signe.** Le nombre a qui multiplie x est-il strictement positif ou strictement négatif ?
3. **Conclure.** Si $a > 0$, l'expression est strictement négative avant x_0 et strictement positive après. Si $a < 0$, c'est l'inverse.
4. **Contrôler.** Remplace x par un nombre simple, par exemple 0, et compare avec ta conclusion.

Exemple : Exemple de signe avec un nombre négatif devant x

Cherchons le signe de l'expression :

$$-3x + 12$$

On résout $-3x + 12 = 0$:

- on retranche 12 aux deux membres ;
- on divise par -3.

$$-3x = -12$$
$$x_0 = 4$$

Le nombre qui multiplie x est -3 : il est strictement négatif.

Conclusion. $-3x + 12$ est strictement positif quand $x < 4$, nul quand $x = 4$, strictement négatif quand $x > 4$.

Contrôle. Pour $x = 0$, on trouve 12, qui est strictement positif. C'est cohérent, car $0 < 4$.

Problèmes

Méthode : Mettre un problème en équation ou en inéquation

1. **Choisir l'inconnue.** Écris une phrase : « Soit x le nombre de … », avec l'unité.
2. **Traduire.** Chaque phrase de l'énoncé devient un calcul. La question devient une équation ou une inéquation.
3. **Résoudre.** Applique la méthode qui convient.
4. **Vérifier.** Le résultat doit avoir un sens dans la situation : entier, positif, raisonnable.
5. **Répondre.** Écris une phrase qui répond exactement à la question posée.

Exemple : deux âges

Salma a 3 ans de plus que son frère Anas. Ensemble, ils ont 27 ans. Quel est l'âge de chacun ?

Soit x l'âge d'Anas, en années. Salma a alors $x + 3$ ans.

La somme des âges vaut 27, donc $x + (x + 3) = 27$, soit $2x + 3 = 27$. Puis :

- on retranche 3 aux deux membres ;
- on divise par 2.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 27 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Vérification. Salma a $12 + 3 = 15$ ans. Ensemble : $12 + 15 = 27$.

Conclusion. Anas a 12 ans et Salma a 15 ans.

Exemple : choisir une formule

Une salle de sport propose deux formules mensuelles. Formule A : 150 dirhams. Formule B : 60 dirhams, plus 15 dirhams par séance.

Pour combien de séances par mois la formule B coûte-t-elle moins cher ?

Soit x le nombre de séances dans le mois. On cherche x tel que $60 + 15x < 150$:

- on retranche 60 aux deux membres ;
- on divise par 15, qui est strictement positif.

$$\begin{aligned} 60 + 15x &< 150 \\ 15x &< 90 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Le nombre de séances est un entier positif ou nul : x vaut 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

Vérification. Pour 5 séances, B coûte 135 dirhams. Pour 6 séances, B coûte 150 dirhams, autant que A.

Conclusion. La formule B est moins chère pour 5 séances ou moins dans le mois.

Attention : Le résultat doit avoir un sens

Un calcul juste peut donner un nombre impossible dans la situation : un côté de longueur négative, ou $7{,}5$ élèves.

Avant de répondre, relis la question. Puis vérifie que ton résultat a un sens dans l'énoncé.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Une équation sans carré :** développe et réduis, regroupe, divise, vérifie, conclus.
- **Un produit égal à zéro :** chaque facteur donne une équation du premier degré.
- **Un carré de l'inconnue :** rassemble tout dans un membre, passe à la factorisation, puis applique la règle du produit nul.
- **Une inéquation :** même travail. Attention, le sens change si tu divises par un nombre strictement négatif.
- **Représenter les solutions :** trait épais et crochet sur la droite graduée.
- **Le signe d'une expression du premier degré :** cherche le nombre qui l'annule, puis le signe du nombre qui multiplie l'inconnue.
- **Un énoncé en phrases :** inconnue choisie, traduction, résolution, vérification, phrase réponse.