BURHAN

Équations et inéquations du premier degré : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/equations-et-inequations/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations et inéquations du premier degré	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Développer, factoriser, résoudre

Niveau examen régional. Pour tout nombre x, on pose :

$$E = (2x+3)^2 - (x+1)^2$$

Rappel du chapitre « Calcul numérique » : pour tous nombres a et b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

1. 1 pts

Développe et réduis E.

INDICE

Outil : développe chaque carré avec l'identité du carré d'une somme, puis retire les parenthèses précédées du signe moins.

CORRIGÉ

Premier carré. On développe avec l'identité du carré d'une somme :

$$(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

Second carré. La même identité donne :

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Différence. On retranche le second carré. Une parenthèse précédée du signe moins s'enlève en changeant le signe de chacun de ses termes :

$$\begin{aligned} E &= 4x^2 + 12x + 9 \\ &\quad - x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

Conclusion. On réduit en regroupant les termes en x^2, les termes en x et les nombres : $E = 3x^2 + 10x + 8$.

2. 1,25 pts

Factorise E.

INDICE

Outil : E est de la forme $a^2 - b^2$; cherche ce que valent a et b.

CORRIGÉ

On reconnaît la forme $a^2 - b^2$, avec $a = 2x + 3$ et $b = x + 1$. D'après $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned} E = &\big((2x + 3) - (x + 1)\big) \\ &\times \big((2x + 3) + (x + 1)\big) \end{aligned}$$

Réduction des facteurs. $(2x + 3) - (x + 1) = x + 2$ et $(2x + 3) + (x + 1) = 3x + 4$. Donc :

$$E = (x + 2)(3x + 4)$$

Contrôle : on développe la forme obtenue :

$$\begin{aligned} &(x + 2)(3x + 4) \\ &= 3x^2 + 4x + 6x + 8 \\ &= 3x^2 + 10x + 8 \end{aligned}$$

On retrouve le résultat de la question 1.

Conclusion. La forme factorisée est $E = (x + 2)(3x + 4)$.

3. 1,25 pts

Résous l'équation $E = 0$.

INDICE

Outil : utilise la forme factorisée et la règle du produit nul.

CORRIGÉ

D'après la question 2, l'équation $E = 0$ s'écrit :

$$(x + 2)(3x + 4) = 0$$

D'après la règle du produit nul, l'équation équivaut à : $x + 2 = 0$ ou $3x + 4 = 0$.

Première équation. On retranche 2 aux deux membres de $x + 2 = 0$: $x = -2$.

Seconde équation. On résout $3x + 4 = 0$:

- on retranche 4 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 3.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 0 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vérification : on calcule $E = (2x + 3)^2 - (x + 1)^2$. Pour $x = -2$: $(-1)^2 - (-1)^2 = 0$. Pour $x = -\frac{4}{3}$: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 0$.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont -2 et $-\frac{4}{3}$.

4. 1,5 pts

Résous l'équation $E = 8$. Choisis la forme de E qui convient.

INDICE

Point délicat : choisis la forme de E qui permet de faire apparaître 0 dans un membre, puis factorise par x.

CORRIGÉ

On choisit la forme développée de la question 1 : elle contient déjà le nombre 8. On transforme l'équation $E = 8$ écrite avec cette forme :

- on retranche 8 aux deux membres ;
- on met x en facteur.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 10x + 8 &= 8 \\ 3x^2 + 10x &= 0 \\ x(3x + 10) &= 0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation équivaut à : $x = 0$ ou $3x + 10 = 0$.

Seconde équation. On résout $3x + 10 = 0$:

- on retranche 10 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 3.

$$\begin{aligned} 3x + 10 &= 0 \\ 3x &= -10 \\ x &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

Vérification : on calcule E avec sa forme de départ. Pour $x = 0$: $E = 9 - 1 = 8$. Pour $x = -\frac{10}{3}$: $E = \frac{121}{9} - \frac{49}{9} = \frac{72}{9} = 8$.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont 0 et $-\frac{10}{3}$.

Exercice 2 5 pts

Inéquation, contrôle et ordre

Niveau examen régional. On considère l'inéquation d'inconnue x :

$$3(1-2x)+4 \geq x-7$$

1. 1,5 pts

Résous cette inéquation.

INDICE

Début : commence par développer $3(1-2x)$; ensuite, rassemble les termes en x du côté gauche.

CORRIGÉ

On développe $3(1-2x)$: $3-6x+4 \geq x-7$.

On regroupe les nombres 3 et 4, puis on retranche x aux deux membres :

$$7-6x \geq x-7$$
$$7-7x \geq -7$$

Ensuite :

- on retranche 7 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par -7 ; ce nombre est strictement négatif, donc le sens de l'inégalité change.

$$-7x \geq -14$$
$$x \leq 2$$

Conclusion. Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x \leq 2$.

2. 0,75 pts

Représente les solutions sur une droite graduée : décris le trait et le crochet.

INDICE

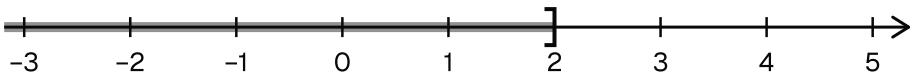
Outil : le nombre 2 est-il une solution ?

CORRIGÉ

Le trait. D'après la question 1, les solutions sont les nombres inférieurs ou égaux à 2. On trace un trait épais sur tous les nombres situés à gauche de 2.

Le nombre 2. Il est solution. En effet, pour $x = 2$, le membre de gauche vaut $3 \times (-3) + 4 = -5$ et celui de droite vaut $2 - 7 = -5$, or $-5 \geq -5$.

Conclusion. En 2, le crochet est donc tourné vers les solutions.



Les solutions x ≤ 2 sur la droite graduée : trait épais à gauche de 2, crochet en 2 tourné vers le trait.

3. 1,5 pts

Contrôle ton résultat de la question 1 avec $x = 0$, puis avec $x = 3$. Pour chaque nombre, calcule les deux membres de l'inéquation, puis compare avec ta réponse.

INDICE

Outil : remplace x par le nombre, à gauche puis à droite, et compare les deux résultats.

CORRIGÉ

Pour $x = 0$. À gauche, $1 - 2x$ vaut 1, donc le membre vaut $3 \times 1 + 4 = 7$. À droite, $0 - 7 = -7$. On a $7 \geq -7$, donc 0 est solution. C'est en accord avec la question 1, car $0 \leq 2$.

Pour $x = 3$. À gauche, $1 - 2x$ vaut -5, donc le membre vaut $3 \times (-5) + 4 = -11$. À droite, $3 - 7 = -4$. On n'a pas $-11 \geq -4$, donc 3 n'est pas solution. C'est en accord avec la question 1, car $3 > 2$.

Conclusion. Les deux contrôles sont en accord avec le résultat de la question 1.

4. 1,25 pts

Le nombre t est une solution de l'inéquation. Complète par $\leq$ ou par $\geq$: $-6t + 10 \ldots -2$.

INDICE

Outil : rappel du chapitre « Ordre et opérations » : multiplier les deux membres par un nombre strictement négatif change le sens. Pars du résultat de la question 1.

CORRIGÉ

Le nombre t est une solution, donc il vérifie le résultat de la question 1. On part de ce résultat :

- on multiplie les deux membres par -6 ; ce nombre est strictement négatif, donc le sens change ;
- on ajoute 10 aux deux membres ; le sens ne change pas.

$$\begin{aligned} t &\leq 2 \\ -6t &\geq -12 \\ -6t + 10 &\geq -2 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour toute solution t de l'inéquation, on a $-6t + 10 \geq -2$: on complète par $\geq$.

Exercice 3 5 pts

Les savons d'une coopérative

Niveau examen régional. Une coopérative d'Essaouira fabrique des savons à l'huile d'argan.

Pour un jour de marché, elle loue un stand 180 dirhams. Fabriquer un savon lui coûte 6 dirhams, et elle le vend 15 dirhams. Elle fabrique exactement les savons qu'elle vend ce jour-là.

1. 1 pts

Choisis une inconnue. Exprime avec elle la recette R (l'argent encaissé) et la dépense D (l'argent payé) de la journée, en dirhams.

INDICE

Début : l'inconnue est un nombre que l'énoncé ne donne pas et dont dépendent la recette et la dépense.

CORRIGÉ

Choix de l'inconnue. Soit x le nombre de savons vendus ce jour-là.

Recette. Chaque savon vendu rapporte 15 dirhams, donc :

$$R = 15x$$

Dépense. La coopérative paie la location, 180 dirhams, puis 6 dirhams pour chacun des x savons fabriqués, donc :

$$D = 180 + 6x$$

Conclusion. En dirhams, la recette est $R = 15x$ et la dépense est $D = 180 + 6x$.

2. 1,25 pts

Combien de savons faut-il vendre pour que la coopérative ne perde ni ne gagne d'argent ?

INDICE

Début : « ni perte ni gain » veut dire que la recette est égale à la dépense.

CORRIGÉ

Mise en équation. Ne perdre ni gagner d'argent veut dire que la recette est égale à la dépense : $R = D$. L'équation est donc $15x = 180 + 6x$.

Résolution. On isole x :

- on retranche $6x$ aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 9.

$$\begin{aligned} 15x &= 180 + 6x \\ 9x &= 180 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Vérification : pour 20 savons, $R = 15 \times 20 = 300$ et $D = 180 + 6 \times 20 = 300$. La recette est bien égale à la dépense.

Conclusion. La coopérative ne perd ni ne gagne d'argent quand elle vend 20 savons.

3. 1,5 pts

La coopérative veut gagner au moins 270 dirhams ce jour-là. Écris une inéquation qui traduit cette condition, puis résous-la.

INDICE

Début : la somme gagnée est la recette moins la dépense ; réduis-la avant d'écrire l'inéquation.

CORRIGÉ

Mise en inéquation. La somme gagnée est la recette moins la dépense. Gagner au moins 270 dirhams veut donc dire que $R - D \geq 270$.

Calcul du gain. $R - D = 15x - (180 + 6x)$. On enlève les parenthèses précédées du signe moins, puis on regroupe les termes en x :

$$\begin{aligned} R - D &= 15x - 180 - 6x \\ &= 9x - 180 \end{aligned}$$

L'inéquation est donc $9x - 180 \geq 270$.

Résolution. On isole x :

- on ajoute 180 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 9 ; ce nombre est strictement positif, donc le sens ne change pas.

$$\begin{aligned} 9x - 180 &\geq 270 \\ 9x &\geq 450 \\ x &\geq 50 \end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x \geq 50$.

4. 1,25 pts

Le stand ne peut pas contenir plus de 60 savons. Combien de savons la coopérative peut-elle vendre pour atteindre son objectif ? Donne toutes les possibilités.

INDICE

Point délicat : le nombre de savons est un entier, au moins égal à 50 et au plus égal à 60.

CORRIGÉ

Les conditions. Le nombre x de savons est un entier. D'après la question 3, il faut $x \geq 50$. Le stand contient au plus 60 savons. Ainsi, $x \geq 50$ et $x \leq 60$.

Les possibilités. Les valeurs possibles sont 50, 51, 52, et ainsi de suite jusqu'à 60 : il y en a 11, car $60 - 50 + 1 = 11$.

Vérification : pour 50 savons, $R - D = 9 \times 50 - 180 = 270$, l'objectif est atteint. Pour 49 savons, $R - D = 261$, ce qui est insuffisant.

Conclusion. La coopérative atteint son objectif si elle vend entre 50 et 60 savons, soit 11 possibilités.

Exercice 4 5 pts

Comparer deux expressions

Niveau examen régional. Pour tout nombre x, on considère les expressions :

$$A = \frac{2x - 1}{3}$$

$$B = \frac{x + 4}{2}$$

1. 1 pts

Calcule A et B pour $x = 2$, puis pour $x = 14$. Dans chaque cas, compare A et B.

INDICE

Outil : remplace x par le nombre dans chaque expression, calcule le numérateur, puis divise.

CORRIGÉ

Pour $x = 2$. On remplace x par 2 dans chaque expression :

$$A = \frac{2 \times 2 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$B = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

On a $1 < 3$, donc $A < B$ pour $x = 2$.

Pour $x = 14$. On remplace x par 14 :

$$A = \frac{2 \times 14 - 1}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

$$B = \frac{14 + 4}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Conclusion. Pour $x = 2$, on a $A < B$. Pour $x = 14$, les deux expressions sont égales : $A = B$.

2. 1,5 pts

Résous l'inéquation $A < B$.

INDICE

Début : pour supprimer les dénominateurs 3 et 2, multiplie les deux membres par 6 ; ce nombre est strictement positif.

CORRIGÉ

L'inéquation s'écrit :

$$\frac{2x-1}{3} < \frac{x+4}{2}$$

Suppression des dénominateurs. On multiplie les deux membres par 6, qui est strictement positif ; le sens ne change pas. Comme 6 est le double de 3 et le triple de 2, on obtient $2(2x-1) < 3(x+4)$.

Résolution. On développe chaque membre :

$$\begin{aligned} 2(2x-1) &< 3(x+4) \\ 4x-2 &< 3x+12 \end{aligned}$$

Ensuite :

- on retranche $3x$ aux deux membres ;
- on ajoute 2 aux deux membres.

$$\begin{aligned} x-2 &< 12 \\ x &< 14 \end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x < 14$.

3. 1 pts

Le nombre 14 est-il une solution de l'inéquation $A < B$? Déduis-en la représentation de ses solutions sur une droite graduée : position du trait épais, sens du crochet en 14.

INDICE

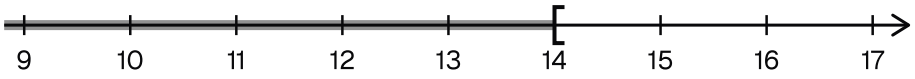
Outil : utilise la question 1 : que vaut A comparé à B pour $x = 14$?

CORRIGÉ

Le nombre 14. Le nombre 14 n'est pas solution : d'après la question 1, pour $x = 14$, on a $A = B$, et non $A < B$.

Le trait. D'après la question 2, les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 14. On trace un trait épais sur tous les nombres situés à gauche de 14.

Conclusion. En 14, le crochet est donc tourné vers l'extérieur.



Les solutions de A < B, soit x < 14 : trait épais à gauche de 14, crochet en 14 tourné vers l'extérieur.

4. 1,5 pts

Sans refaire de calcul, déduis de la question 2 tous les nombres x pour lesquels $A \geq B$. Décris la représentation de ces solutions sur une droite graduée, puis contrôle ta réponse avec $x = 20$.

INDICE

Point délicat : pour un nombre x, on a soit $A < B$, soit $A \geq B$: les solutions de $A \geq B$ sont les nombres qui ne sont pas solutions de $A < B$.

CORRIGÉ

Déduction. Pour un nombre x donné, on a soit $A < B$, soit $A \geq B$, et jamais les deux à la fois.

D'après la question 2, on a $A < B$ exactement quand $x < 14$. Donc on a $A \geq B$ exactement quand on n'a pas $x < 14$, c'est-à-dire quand $x \geq 14$.

Représentation. On trace un trait épais sur tous les nombres situés à droite de 14. Le nombre 14 est solution, car $A = B$ pour $x = 14$ (question 1) : en 14, le crochet est donc tourné vers les solutions.

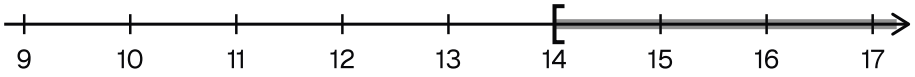
Contrôle avec $x = 20$. On remplace x par 20 :

$$A = \frac{2 \times 20 - 1}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

$$B = \frac{20 + 4}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

On a $13 \geq 12$, donc 20 est solution. C'est en accord avec le résultat, car $20 \geq 14$.

Conclusion. Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x \geq 14$.



Les solutions de A ≥ B, soit x ≥ 14 : trait épais à droite de 14, crochet en 14 tourné vers les solutions.

Exercice 5 5 pts

La parcelle d'un champ

Niveau examen régional. Près de Meknès, un agriculteur possède une parcelle carrée.

Il la transforme en une parcelle rectangulaire : il allonge la parcelle de 3 mètres dans un sens et la raccourcit de 3 mètres dans l'autre sens.

1. 1 pts

Choisis une inconnue. Exprime avec elle la longueur et la largeur de la parcelle rectangulaire, en mètres.

INDICE

Début : l'inconnue est une longueur de la parcelle carrée que l'énoncé ne donne pas.

CORRIGÉ

Choix de l'inconnue. Soit x la longueur du côté de la parcelle carrée, en mètres.

Longueur. Un côté est allongé de 3 mètres : la longueur de la parcelle rectangulaire est $x + 3$.

Largeur. L'autre côté est raccourci de 3 mètres : la largeur de la parcelle rectangulaire est $x - 3$.

Conclusion. En mètres, la parcelle rectangulaire a pour longueur $x + 3$ et pour largeur $x - 3$.

2. 1 pts

La largeur de la parcelle rectangulaire doit être strictement positive. Traduis cette condition par une inéquation, puis résous-la.

INDICE

Outil : « strictement positive » veut dire « strictement plus grande que 0 ».

CORRIGÉ

La largeur est $x - 3$, et elle doit être strictement positive. La condition s'écrit donc :

$$x - 3 > 0$$

On ajoute 3 aux deux membres : $x > 3$.

Conclusion. Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x > 3$.

3. 1,5 pts

L'agriculteur affirme : « La transformation n'a changé ni le périmètre ni l'aire de la parcelle. » Pour le périmètre, puis pour l'aire, écris une équation qui traduit son affirmation et résous-la. A-t-il raison ?

INDICE

Outil : rappel du chapitre « Calcul numérique » : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

CORRIGÉ

Périmètre. Le périmètre du carré est $4x$. Celui du rectangle est :

$$\begin{aligned} 2\big((x+3)+(x-3)\big) &= 2\times 2x \\ &= 4x \end{aligned}$$

L'équation qui traduit l'affirmation est $4x=4x$. On retranche $4x$ aux deux membres :

$$0\times x=0$$

Cette égalité est vraie quel que soit x : tout nombre est solution. Le périmètre n'a donc pas changé.

Aire. L'aire du carré est x^2. D'après l'identité $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, celle du rectangle est $(x+3)(x-3)=x^2-9$.

L'équation qui traduit l'affirmation est $x^2-9=x^2$. On retranche x^2 aux deux membres :

$$-9=0$$

Cette égalité est fausse quel que soit x : l'équation n'a aucune solution. En fait, l'aire a diminué de 9 mètres carrés.

Conclusion. L'agriculteur a raison pour le périmètre, mais il a tort pour l'aire.

4. 1,5 pts

L'agriculteur veut que la parcelle rectangulaire ait une aire de 40 mètres carrés. Quelle doit être la longueur du côté de la parcelle carrée ?

INDICE

Point délicat : une équation peut avoir une solution qui ne convient pas à la situation ; pense à la condition de la question 2.

CORRIGÉ

Mise en équation. D'après la question 3, l'aire du rectangle est $x^2 - 9$. L'équation est $x^2 - 9 = 40$.

Résolution. On procède en deux étapes :

- on retranche 40 aux deux membres ;
- comme $49 = 7^2$, on factorise avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, où $a = x$ et $b = 7$.

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 40 \\ x^2 - 49 &= 0 \\ (x - 7)(x + 7) &= 0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation équivaut à : $x - 7 = 0$ ou $x + 7 = 0$.

Première équation : on ajoute 7 aux deux membres, $x = 7$.

Seconde équation : on retranche 7 aux deux membres, $x = -7$.

Vérification : pour $x = 7$, $7^2 - 9 = 49 - 9 = 40$; pour $x = -7$, $(-7)^2 - 9 = 49 - 9 = 40$.

Les solutions de l'équation sont 7 et -7.

Retour à la situation. Le nombre -7 ne convient pas : d'après la question 2, il faut $x > 3$. Le nombre 7 convient, car $7 > 3$. La parcelle rectangulaire mesure alors 10 mètres sur 4 mètres, et $10 \times 4 = 40$.

Conclusion. Le côté de la parcelle carrée doit mesurer 7 mètres.