BURHAN

Équations et inéquations du premier degré : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/equations-et-inequations/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Équations et inéquations du premier degré	Entraînement	7

Exercice 1

Parenthèses et fractions

Résous chaque équation, vérifie la solution, puis conclus.

1.

$$3(2x-1)-4(x+2)=5$$

INDICE

Début : développe chaque produit ; attention au signe moins devant $4(x+2)$.

CORRIGÉ

On résout l'équation en quatre étapes. D'abord :

- on développe chaque produit ; le signe moins devant $4(x+2)$ change le signe des deux termes ;
- on réduit le membre de gauche, en regroupant les termes en x puis les nombres.

$$\begin{aligned} 6x-3-4x-8&=5\\ 2x-11&=5 \end{aligned}$$

Ensuite :

- on ajoute 11 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 2.

$$\begin{aligned} 2x&=16\\ x&=8 \end{aligned}$$

Vérification : pour $x=8$, on a $2x-1=15$ et $x+2=10$. Le membre de gauche vaut donc $3\times 15-4\times 10=45-40=5$, comme le membre de droite.

Conclusion. La solution de l'équation est 8.

2.

$$\frac{x+1}{2} = \frac{2x-3}{5}$$

INDICE

Début : multiplie les deux membres par 10, multiple commun de 2 et de 5.

CORRIGÉ

On résout l'équation en quatre étapes. D'abord :

- on multiplie les deux membres par 10 ; comme $10 = 2 \times 5$, les dénominateurs disparaissent ;
- on développe les deux membres.

$$5(x+1) = 2(2x-3)$$
$$5x + 5 = 4x - 6$$

Ensuite :

- on retranche $4x$ aux deux membres ;
- on retranche 5 aux deux membres.

$$x + 5 = -6$$
$$x = -11$$

Vérification : pour $x = -11$, le membre de gauche vaut $\frac{-11+1}{2} = -5$ et le membre de droite vaut $\frac{-22-3}{5} = -5$: on trouve bien la même valeur.

Conclusion. La solution de l'équation est -11.

Exercice 2

Quand l'inconnue disparaît

Pour chaque équation, développe et réduis, puis conclus.

1.

$$4(x-3)+2=4x-10$$

INDICE

Outil : développe, puis retranche les termes en x aux deux membres.

Point délicat : regarde ce qui reste quand les termes en x disparaissent.

CORRIGÉ

On transforme l'équation en trois étapes. D'abord, on développe $4(x-3)$, puis on réduit le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 4x-12+2&=4x-10\\ 4x-10&=4x-10 \end{aligned}$$

Ensuite :

- on retranche $4x$ aux deux membres ; il reste 0 fois x ;
- on ajoute 10 aux deux membres.

$$\begin{aligned} 0\times x-10&=-10\\ 0\times x&=0 \end{aligned}$$

Pour tout nombre x, le produit $0\times x$ vaut 0 : cette égalité est donc vraie pour tout nombre x.

Contrôle avec $x=0$: à gauche, $4\times(-3)+2=-10$; à droite, $4\times 0-10=-10$.

Conclusion. Tout nombre est solution de l'équation.

2.

$$2(3x+1) = 6x - 5$$

INDICE

Outil : même travail qu'à la question 1.

Point délicat : compare ensuite les deux nombres qui restent.

CORRIGÉ

On transforme l'équation en trois étapes :

- on développe le membre de gauche ;
- on retranche $6x$ aux deux membres ;
- on retranche 2 aux deux membres.

$$\begin{aligned} 6x + 2 &= 6x - 5 \\ 0 \times x + 2 &= -5 \\ 0 \times x &= -7 \end{aligned}$$

Pour tout nombre x, le produit $0 \times x$ vaut 0, et 0 est différent de -7. Donc aucun nombre ne vérifie cette égalité.

Conclusion. L'équation n'a aucune solution.

Exercice 3

Factoriser par un facteur commun

Résous chaque équation en commençant par une factorisation.

1.

$$(2x+1)(x-4) - (2x+1)(3x+2) = 0$$

INDICE

Outil : le facteur $2x+1$ figure dans les deux produits ; mets-le en facteur, puis réduis l'autre facteur.

CORRIGÉ

Factorisation. Le facteur $2x+1$ figure dans les deux produits. On le met en facteur :

$$(2x+1)\big((x-4) - (3x+2)\big) = 0$$

On réduit le second facteur, en changeant les signes de $3x+2$ à cause du signe moins : $x-4-3x-2 = -2x-6$. L'équation devient :

$$(2x+1)(-2x-6) = 0$$

Produit nul. D'après la règle du produit nul, $2x+1=0$ ou $-2x-6=0$.

Première équation. On résout $2x+1=0$:

- on retranche 1 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 2.

$$\begin{aligned} 2x+1 &= 0 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Seconde équation. On résout $-2x-6=0$:

- on ajoute 6 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par -2.

$$\begin{aligned} -2x-6 &= 0 \\ -2x &= 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Vérification : pour $x=-3$, on a $2x+1=-5$, $x-4=-7$ et $3x+2=-7$, donc le membre de gauche vaut $(-5)\times(-7)-(-5)\times(-7)=0$. Pour $x=-\frac{1}{2}$, le facteur $2x+1$ est nul, donc les deux produits sont nuls.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont $-\frac{1}{2}$ et -3.

2.

$$7x^2 = 3x$$

INDICE

Point délicat : ne divise pas par x, car x peut être nul ; retranche $3x$ aux deux membres.

CORRIGÉ

On ne divise pas par x, car x peut être nul. On procède ainsi :

- on retranche $3x$ aux deux membres ;
- on met x en facteur, car $7x^2 = x \times 7x$.

$$\begin{aligned} 7x^2 &= 3x \\ 7x^2 - 3x &= 0 \\ x(7x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Produit nul. D'après la règle du produit nul, $x = 0$ ou $7x - 3 = 0$.

Seconde équation. On résout $7x - 3 = 0$:

- on ajoute 3 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 7.

$$\begin{aligned} 7x - 3 &= 0 \\ 7x &= 3 \\ x &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Vérification : pour $x = \frac{3}{7}$, on a $x^2 = \frac{9}{49}$, donc $7 \times \frac{9}{49} = \frac{9}{7}$; et $3 \times \frac{3}{7} = \frac{9}{7}$. Pour $x = 0$, les deux membres valent 0.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont 0 et $\frac{3}{7}$.

Exercice 4

Factoriser par une identité remarquable

Rappel du chapitre « Calcul numérique » : pour tous nombres a et b,

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

1.

Résous l'équation $x^2 - 10x + 25 = 0$.

INDICE

Outil : $25 = 5^2$ et $10x = 2 \times x \times 5$.

CORRIGÉ

On a $25 = 5^2$ et $10x = 2 \times x \times 5$. On reconnaît donc le carré d'une différence, avec $a = x$ et $b = 5$:

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$$

L'équation s'écrit donc :

$$(x-5)(x-5) = 0$$

Les deux facteurs sont égaux. D'après la règle du produit nul, $x - 5 = 0$, c'est-à-dire $x = 5$.

Vérification : $5^2 - 10 \times 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$.

Conclusion. La solution de l'équation est 5.

2.

Résous l'équation $(x+3)^2 - 16 = 0$.

INDICE

Outil : écris $16 = 4^2$ et prends $a = x + 3$, $b = 4$.

CORRIGÉ

On écrit $16 = 4^2$. On reconnaît une différence de deux carrés, avec $a = x + 3$ et $b = 4$: $(x+3)^2 - 4^2 = (x + 3 - 4)(x + 3 + 4)$.

On réduit chaque facteur. L'équation devient :

$$(x-1)(x+7) = 0$$

Produit nul. D'après la règle du produit nul, $x - 1 = 0$ ou $x + 7 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -7$.

Vérification : $(1+3)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$ et $(-7+3)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont 1 et -7.

Exercice 5

Diviser par un nombre négatif

On considère l'inéquation $5 - 3(x + 2) \geq 2x + 9$.

1.

Trouve toutes les solutions de l'inéquation.

INDICE

Outil : développe, regroupe les termes en x, puis divise.

Point délicat : à la dernière étape, tu divises par un nombre strictement négatif ; le sens de l'inégalité change.

CORRIGÉ

On développe $3(x + 2)$; le signe moins change le signe des deux termes : $5 - 3x - 6 \geq 2x + 9$.

On réduit le membre de gauche, puis on retranche $2x$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} -3x - 1 &\geq 2x + 9 \\ -5x - 1 &\geq 9 \end{aligned}$$

Ensuite :

- on ajoute 1 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par -5 ; ce nombre est strictement négatif, donc le sens de l'inégalité change.

$$\begin{aligned} -5x &\geq 10 \\ x &\leq -2 \end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x \leq -2$.

2.

Sur une droite graduée, où places-tu le trait épais et dans quel sens tournes-tu le crochet ? Réponds en mots.

INDICE

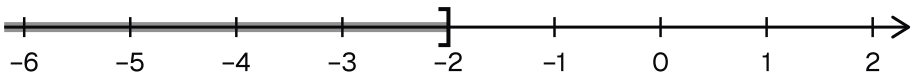
Outil : le nombre -2 est-il solution ?

CORRIGÉ

On trace un trait épais sur tous les nombres situés à gauche de -2.

Le nombre -2 est-il solution ? Pour $x = -2$, le membre de gauche vaut $5 - 3 \times (-2 + 2) = 5 - 3 \times 0 = 5$ et le membre de droite vaut $2 \times (-2) + 9 = 5$. Comme $5 \geq 5$ est vrai, -2 est une solution.

En -2, le crochet est donc tourné vers les solutions.



Les solutions trouvées, x ≤ -2 : un trait épais à gauche de -2, et un crochet en -2 tourné vers ce trait.

3.

Contrôle ton résultat avec $x = -3$, puis avec $x = 0$.

INDICE

Outil : calcule séparément les deux membres de l'inéquation de départ.

CORRIGÉ

Pour $x = -3$. À gauche, $5 - 3 \times (-1) = 8$; à droite, $2 \times (-3) + 9 = 3$. On a $8 \geq 3$: -3 est solution. C'est cohérent, car $-3 \leq -2$.

Pour $x = 0$. À gauche, $5 - 6 = -1$; à droite, 9. On n'a pas $-1 \geq 9$: 0 n'est pas solution. C'est cohérent, car $0 > -2$.

Conclusion. Les deux contrôles sont en accord avec le résultat de la question 1.

Exercice 6

Le jardin de la famille Bennani

Le jardin de la famille Bennani a la forme d'un rectangle.

Sa longueur dépasse sa largeur de 7 mètres. Son périmètre mesure 58 mètres.

1.

On note x la largeur du jardin, en mètres. Exprime sa longueur, puis son périmètre, avec x.

INDICE

Outil : le périmètre d'un rectangle est le double de la somme de sa longueur et de sa largeur.

CORRIGÉ

La longueur dépasse la largeur de 7 mètres : elle mesure $x + 7$ mètres.

Le périmètre est le double de la somme de la longueur et de la largeur : il mesure $2(x + x + 7)$ mètres.

On réduit la somme entre parenthèses, puis on développe :

$$2(2x + 7) = 4x + 14$$

Conclusion. La longueur mesure $x + 7$ mètres et le périmètre mesure $4x + 14$ mètres.

2.

Écris une équation, résous-la et donne les dimensions du jardin.

INDICE

Début : le périmètre trouvé à la question 1 doit valoir 58.

CORRIGÉ

Équation. Le périmètre mesure 58 mètres, donc :

$$4x + 14 = 58$$

Résolution. On isole x :

- on retranche 14 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 4.

$$\begin{aligned} 4x + 14 &= 58 \\ 4x &= 44 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Vérification : la longueur vaut $11 + 7 = 18$ mètres et le périmètre vaut $2 \times (11 + 18) = 58$ mètres. La largeur 11 est positive : elle convient.

Conclusion. Le jardin mesure 11 mètres de large et 18 mètres de long.

Exercice 7

Deux forfaits de téléphone

Ilyas hésite entre deux forfaits mensuels.

Forfait Atlas : 49 dirhams, plus $0{,}5$ dirham par minute d'appel.

Forfait Rif : 99 dirhams, appels sans limite.

1.

On note x le nombre de minutes d'appel dans le mois. Exprime le prix de chaque forfait.

INDICE

Outil : pour le forfait Atlas, ajoute le prix fixe et le prix des minutes.

CORRIGÉ

Avec le forfait Atlas, Ilyas paie le prix fixe plus $0{,}5$ dirham pour chacune des x minutes : il paie $49 + 0{,}5x$ dirhams.

Avec le forfait Rif, il paie 99 dirhams, quel que soit le nombre x de minutes.

2.

Pour comparer les prix, on pose $D = 99 - (49 + 0{,}5x)$: c'est la différence entre le prix du forfait Rif et celui du forfait Atlas. Réduis D.

INDICE

Début : supprime les parenthèses précédées du signe moins en changeant les signes.

CORRIGÉ

On supprime les parenthèses précédées du signe moins, en changeant le signe de chaque terme :

$$D = 99 - 49 - 0{,}5x$$

On calcule $99 - 49 = 50$:

$$D = 50 - 0{,}5x$$

Conclusion. Pour tout nombre x, $D = 50 - 0{,}5x$.

3.

Étudie le signe de $50 - 0{,}5x$ selon les valeurs de x.

INDICE

Outil : cherche le nombre qui annule l'expression, puis regarde le signe du nombre qui multiplie x.

CORRIGÉ

Le nombre qui annule l'expression. On résout $50 - 0{,}5x = 0$:

- on retranche 50 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par $-0{,}5$.

$$\begin{aligned} 50 - 0{,}5x &= 0 \\ -0{,}5x &= -50 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Le signe. Le nombre qui multiplie x est $-0{,}5$: il est strictement négatif.

Donc $50 - 0{,}5x$ est strictement positif quand $x < 100$, nul quand $x = 100$, strictement négatif quand $x > 100$.

Contrôle : pour $x = 0$, l'expression vaut 50, qui est strictement positif ; c'est cohérent, car $0 < 100$.

4.

Pour quels nombres de minutes le forfait Atlas est-il strictement moins cher ? Traduis la question par une inéquation et réponds par une phrase.

INDICE

Ensuite : le forfait Atlas est moins cher quand son prix est strictement inférieur à 99 dirhams ; compare avec le signe de D.

CORRIGÉ

Inéquation. Le forfait Atlas est strictement moins cher quand son prix est strictement inférieur à 99 dirhams. On cherche donc les nombres x tels que :

$$49 + 0{,}5x < 99$$

On retranche $49 + 0{,}5x$ aux deux membres : cette inéquation équivaut à $99 - (49 + 0{,}5x) > 0$, c'est-à-dire à $D > 0$, ou encore à $50 - 0{,}5x > 0$.

Résolution. D'après la question 3, ses solutions sont tous les nombres x tels que $x < 100$.

Vérification : pour 80 minutes, Atlas coûte $49 + 40 = 89$ dirhams, moins que 99 ; pour 120 minutes, il coûte $49 + 60$, soit 109 dirhams, plus que 99.

Conclusion. Le forfait Atlas est strictement moins cher pour moins de 100 minutes d'appel dans le mois ; au-delà, le forfait Rif est le meilleur choix.