BURHAN

Équations et inéquations du premier degré

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/equations-et-inequations/cours

Chapitre	Semestre
Équations et inéquations du premier degré	Semestre 2

Le prix oublié

Au souk de Fès, Yassine achète 3 kilos d'oranges. Il paie avec un billet de 50 dirhams, et le marchand lui rend 26 dirhams.

Le soir, sa mère lui demande le prix d'un kilo. Yassine a oublié l'étiquette. Peut-il retrouver ce prix sans essayer tous les prix un par un ?

Devine : Le prix d'un kilo

Avant tout calcul, fais une prédiction : combien coûte un kilo d'oranges ?

A. 24 dirhams

Faux.
24 dirhams, c'est ce que Yassine a payé pour les 3 kilos ensemble : $50 - 26 = 24$. Il reste à partager entre les 3 kilos.

B. 8 dirhams

Juste.
Yassine a payé $50 - 26 = 24$ dirhams pour 3 kilos, et $24 \div 3 = 8$.

C. On ne peut pas le savoir sans essayer des prix

Faux.
Essayer marche ici, mais c'est long. Les données suffisent : on peut raisonner à l'envers, sans tâtonner.

Correction

Un kilo coûte 8 dirhams.

Yassine a dépensé $50 - 26 = 24$ dirhams pour 3 kilos. Donc un kilo coûte $24 \div 3 = 8$ dirhams.

Contrôle : $3 \times 8 + 26 = 24 + 26 = 50$.

Appelons x le prix d'un kilo, en dirhams. L'histoire de Yassine s'écrit alors :

$$3x + 26 = 50$$

C'est une **équation** : une égalité qui contient un nombre inconnu.

Dans ce chapitre, tu apprends à résoudre ces égalités pas à pas, puis à vérifier ta réponse.

Tu verras aussi des **inéquations** : ce sont des inégalités qui contiennent un nombre inconnu. Elles répondent à des questions comme « combien de kilos au plus avec 50 dirhams ? ».

Équation du premier degré

Tester un nombre

Rappel de 2e année. Une égalité a deux **membres** : celui de gauche et celui de droite du signe $=$.

Une égalité reste vraie quand :

- on ajoute ou on retranche un même nombre aux deux membres ;
- on ajoute ou on retranche un même terme en x, comme $2x$;
- on multiplie ou on divise les deux membres par un même nombre non nul.

Devine : Quel nombre convient ?

Mets chaque nombre à la place de x dans l'égalité $4x - 7 = 2x + 5$. Lequel la rend vraie ?

A. $x = -1$

Faux.
Pour $x = -1$, le membre de gauche vaut $4 \times (-1) - 7 = -11$ et celui de droite $2 \times (-1) + 5 = 3$. Les deux membres sont différents.

B. $x = 6$

Juste.
Pour $x = 6$, on a $4 \times 6 - 7 = 17$ et $2 \times 6 + 5 = 17$. Les deux membres sont égaux.

C. $x = 12$

Faux.
Pour $x = 12$, on a $4 \times 12 - 7 = 41$ et $2 \times 12 + 5 = 29$. Les deux membres sont différents.

Correction
Seul 6 rend l'égalité vraie.

Pour $x = 6$, le membre de gauche vaut $4 \times 6 - 7 = 24 - 7 = 17$. Le membre de droite vaut $2 \times 6 + 5 = 12 + 5 = 17$.

Pour tester un nombre, on calcule séparément chaque membre, puis on compare.

Ce qu'est une équation

L'égalité $4x - 7 = 2x + 5$ contient un nombre inconnu, noté x. Elle est vraie pour $x = 6$, et fausse pour d'autres nombres. Voici le vocabulaire exact.

Définition : Équation du premier degré à une inconnue

Une **équation** est une égalité qui contient un nombre inconnu, désigné par une lettre, par exemple x. Cette lettre s'appelle l'**inconnue**.

Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres connus et $a \neq 0$.

Une **solution** de l'équation est un nombre qui, mis à la place de x, rend l'égalité vraie. **Résoudre** l'équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Exemple : Reconnaître une équation du premier degré

$5x - 3 = 0$ est une équation du premier degré : ici $a = 5$ et $b = -3$. Le nombre a, qui multiplie x, s'appelle le **coefficient** de x : ici, le coefficient de x est 5.

$\frac{1}{2}x + 4 = 0$ en est une aussi : $a = \frac{1}{2}$ et $b = 4$.

$4x - 7 = 2x + 5$ en est une : on retranche $2x$ et 5 aux deux membres, et on obtient $2x - 12 = 0$.

Combien de solutions

Devine : Combien de solutions ?

Combien de solutions l'équation $3x + 12 = 0$ a-t-elle ?

A. Aucune

Faux.

Il y en a au moins une : pour $x = -4$, on obtient $3 \times (-4) + 12 = -12 + 12 = 0$.

B. Deux : 4 et -4

Faux.

Pour $x = 4$, on obtient $3 \times 4 + 12 = 24$, et non 0. Seul -4 convient.

C. Une seule : -4

Juste.

Pour $x = -4$, on obtient bien $3 \times (-4) + 12 = 0$, et c'est le seul nombre qui convient.

Correction

L'équation a une seule solution : -4.

En effet, $3 \times (-4) + 12 = -12 + 12 = 0$.

L'énoncé qui suit dit que c'est toujours ainsi quand le nombre qui multiplie x n'est pas nul.

Propriété : Résolution de l'équation ax + b = 0

Soit a et b deux nombres, avec $a \neq 0$. L'équation $ax + b = 0$ a **une seule solution** : le nombre $-\frac{b}{a}$.

Cas particulier. Si, après réduction, le nombre qui multiplie x est nul, l'équation s'écrit $0 \times x = c$, où c est un nombre connu :

- si $c \neq 0$, l'équation n'a **aucune solution** ;
- si $c = 0$, **tout nombre** est solution.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : Appliquer l'énoncé

Pour $7x - 21 = 0$: on ajoute 21 aux deux membres, donc $7x = 21$.

On divise les deux membres par 7, donc $x = 3$.

L'énoncé donne le même résultat : $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-21}{7} = 3$.

Vérification : $7 \times 3 - 21 = 21 - 21 = 0$. La solution de l'équation est 3.

Pour $6x + 4 = 0$: on retranche 4 aux deux membres, donc $6x = -4$.

On divise les deux membres par 6, puis on simplifie la fraction par 2, donc $x = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

Vérification : $6 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 4 = -4 + 4 = 0$. La solution de l'équation est $-\dfrac{2}{3}$.

À toi

À toi : Deux équations

Résous $5x + 8 = 0$, puis $-2x + 9 = 0$. Vérifie chaque solution et conclus par une phrase.

Indice 1
Dans chaque équation, repère le nombre a qui multiplie x et le nombre b.
Indice 2
Pour la première, retranche 8 aux deux membres, puis divise les deux membres par 5.
Indice 3
Point délicat : dans la seconde équation, $a = -2$ est négatif. Un quotient de deux nombres négatifs est positif.

Réponse
Première équation. On retranche 8 aux deux membres, donc $5x = -8$.

On divise les deux membres par 5, donc $x = -\dfrac{8}{5}$.

Vérification : $5 \times \left(-\frac{8}{5}\right) + 8 = -8 + 8 = 0$. La solution de l'équation est $-\frac{8}{5}$.

Seconde équation. On retranche 9 aux deux membres, donc $-2x = -9$.

On divise les deux membres par -2, donc $x = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$. Le quotient de deux nombres négatifs est positif.

L'énoncé donne le même résultat : $-\frac{9}{-2} = \frac{9}{2}$.

Vérification : $-2 \times \frac{9}{2} + 9 = -9 + 9 = 0$. La solution de l'équation est $\frac{9}{2}$.

Tu sais maintenant reconnaître une équation du premier degré et prévoir sa solution. Mais une équation n'arrive pas toujours sous la forme $ax + b = 0$. La section suivante montre comment l'y amener, une règle à la fois.

Résoudre une équation du premier degré

Les cinq gestes

Trouve l'erreur : La résolution de Karim

Karim résout $2(x + 3) = 14$. Il écrit d'abord $2x + 3 = 14$, puis $2x = 11$, et trouve $x = \frac{11}{2}$. Où est son erreur ?

A. Il devait diviser par 3, et non par 2

Faux.
Diviser par 2 est juste : c'est 2 qui multiplie x. L'erreur est avant.

B. Il n'y a pas d'erreur

Faux.
Vérifie : $2 \times \left(\frac{11}{2} + 3\right) = 2 \times \frac{17}{2} = 17$, et non 14.

C. En développant : $2(x + 3) = 2x + 6$

Juste.
Le 2 multiplie x **et** 3. Karim a oublié de multiplier 3 par 2.

Correction
Karim a oublié de multiplier 3 par 2. Voici la bonne résolution. On développe d'abord le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 2(x + 3) &= 14 \\ 2x + 6 &= 14 \end{aligned}$$

Puis :

- on retranche 6 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 2.

$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Vérification : $2 \times (4 + 3) = 2 \times 7 = 14$. La solution de l'équation est 4.

Méthode : résoudre une équation

1. **Développer et réduire** chaque membre, si l'équation contient des parenthèses.
2. **Regrouper** : on ajoute ou on retranche le même terme aux deux membres. Les termes en x vont à gauche, les nombres à droite.
3. **Diviser** les deux membres par le nombre qui multiplie x, s'il n'est pas nul.
4. **Vérifier** : on remplace x par la valeur trouvée dans l'équation de départ, et on compare les deux membres.
5. **Conclure** par une phrase : « La solution de l'équation est … ».

Exemple : Exemple guidé : une ligne, une règle

Résolvons $5(x - 2) - 3 = 2x + 8$.

On développe, puis on réduit le membre de gauche :

$$5x - 10 - 3 = 2x + 8$$
$$5x - 13 = 2x + 8$$

On termine en trois gestes :

- on retranche $2x$ aux deux membres ;
- on ajoute 13 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 3.

$$3x - 13 = 8$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

Vérification : $5 \times (7 - 2) - 3 = 22$ et $2 \times 7 + 8 = 22$. Les deux membres sont égaux.

La solution de l'équation est 7.

Avec des fractions

Exemple : chasser les dénominateurs

Résolvons $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + 1$.

On multiplie d'abord les deux membres par 12, un multiple commun de 3, de 2 et de 4. Chaque terme est multiplié par 12 : $12 \times \frac{x}{3} = 4x$, $12 \times \frac{1}{2} = 6$, $12 \times \frac{x}{4} = 3x$ et $12 \times 1 = 12$.

Puis :

- on retranche $3x$ aux deux membres ;
- on retranche 6 aux deux membres.

$$\begin{aligned} 4x + 6 &= 3x + 12 \\ x + 6 &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Vérification : $\frac{6}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $\frac{6}{4} + 1 = \frac{5}{2}$.

La solution de l'équation est 6.

Attention : multiplier tous les termes

✗ $\frac{x}{3} + 1 = 2$ devient $x + 1 = 6$.

✓ $\frac{x}{3} + 1 = 2$ devient $x + 3 = 6$.

Quand on multiplie un membre par 3, **chaque terme** de ce membre est multiplié par 3, y compris le nombre 1.

La bonne solution est 3 : $\frac{3}{3} + 1 = 2$. La ligne fausse mène à $x = 5$, qui ne convient pas : $\frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$, et non 2.

À toi : Une fraction à chasser

Résous $\frac{2x - 1}{3} = x - 2$. Vérifie ta solution et conclus par une phrase.

Indice 1

Commence par multiplier les deux membres par 3.

Indice 2

Tu obtiens $2x - 1 = 3x - 6$. Regroupe ensuite les termes en x dans un membre.

Indice 3

Point délicat : tout le membre de droite est multiplié par 3 : $3(x - 2) = 3x - 6$, et non $3x - 2$.

Réponse

- on multiplie les deux membres par 3 ;
- on retranche $3x$ aux deux membres.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 3x - 6 \\ -x - 1 &= -6 \end{aligned}$$

Puis :

- on ajoute 1 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par -1.

$$\begin{aligned} -x &= -5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vérification : $\dfrac{2 \times 5 - 1}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$ et $5 - 2 = 3$.

La solution de l'équation est 5.

Signes et cas particuliers

Vérifie : Un nombre négatif devant x

Quelle est la solution de l'équation $-3x + 5 = 17$?

A. -4

Juste.
On retranche 5 : $-3x = 12$. On divise par -3 : $x = -4$. Vérification : $-3 \times (-4) + 5 = 17$.

B. 4

Faux.
Le signe s'est perdu en divisant par -3 : $\dfrac{12}{-3} = -4$. Contrôle : $-3 \times 4 + 5 = -7$.

C. $-\dfrac{22}{3}$

Faux.
On a ajouté 5 au lieu de le retrancher. Pour faire disparaître $+5$, on retranche 5 aux deux membres.

Correction

- on retranche 5 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par -3.

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= 17 \\ -3x &= 12 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Vérification : $-3 \times (-4) + 5 = 12 + 5 = 17$. La solution de l'équation est -4.

Devine : Une équation étrange

Résous $2(x + 4) = 2x + 5$. Que constates-tu ?

A. La solution est 0

Faux.
Pour $x = 0$, on obtient $2 \times 4 = 8$ d'un côté et 5 de l'autre.

B. Tout nombre est solution

Faux.
Essaie $x = 0$: 8 et 5 sont différents. Un seul nombre qui ne convient pas suffit pour dire que les nombres ne sont pas tous solutions.

C. Aucun nombre n'est solution

Juste.
En développant, on obtient $2x + 8 = 2x + 5$. En retranchant $2x$, il reste $8 = 5$, qui est faux.

Correction
On développe le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 2(x + 4) &= 2x + 5 \\ 2x + 8 &= 2x + 5 \end{aligned}$$

Puis :

- on retranche $2x$ aux deux membres ;
- on retranche 8 aux deux membres.

$$\begin{aligned} 0 \times x + 8 &= 5 \\ 0 \times x &= -3 \end{aligned}$$

Un nombre multiplié par 0 donne toujours 0, jamais -3. L'équation n'a aucune solution.

Exemple : tout nombre est solution

Résolvons $3(x - 2) + x = 4x - 6$:

- on développe le membre de gauche ;
- on réduit le membre de gauche.

$$\begin{aligned} 3(x - 2) + x &= 4x - 6 \\ 3x - 6 + x &= 4x - 6 \\ 4x - 6 &= 4x - 6 \end{aligned}$$

On retranche $4x$ aux deux membres. On arrive à $-6 = -6$: c'est vrai, quelle que soit la valeur de x. Tout nombre est solution de l'équation.

Contrôle avec $x = 1$: à gauche, $3 \times (-1) + 1 = -2$; à droite, $4 - 6 = -2$.

La règle du produit nul

Quand un produit vaut-il zéro

Devine : Deux nombres mystère

Nadia pense à deux nombres. Leur produit vaut 0. Que peux-tu affirmer ?

A. Au moins un des deux est nul

Juste.

Essaie : $0 \times 9 = 0$ et $0 \times 0 = 0$, mais $3 \times 4 = 12$. Un facteur nul suffit.

B. Les deux nombres sont nuls

Faux.

Pas forcément : $0 \times 9 = 0$, et 9 n'est pas nul.

C. On ne peut rien affirmer

Faux.

On peut affirmer quelque chose : avec deux nombres non nuls, comme 3 et 4, le produit n'est pas nul.

Correction

L'un au moins des deux nombres est nul.

Par exemple, $0 \times 9 = 0$ et $0 \times 0 = 0$. En revanche, $3 \times 4 = 12$ et $(-2) \times 5 = -10$ ne sont pas nuls.

Fais d'autres essais. $7 \times 0 = 0$ et $0 \times (-3) = 0$: un facteur nul rend le produit nul.

Avec deux facteurs non nuls, comme $(-2) \times 5 = -10$ ou $\frac{1}{4} \times 8 = 2$, le produit n'est pas nul.

La règle

Propriété : Règle du produit nul

Soit A et B deux nombres.

- Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
- Réciproquement, si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $A \times B = 0$.

Autrement dit, un produit est nul **si, et seulement si,** l'un au moins de ses facteurs est nul.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : un facteur connu

Résolvons $4(x - 6) = 0$.

C'est un produit nul, et le facteur 4 n'est pas nul. D'après la règle du produit nul, l'autre facteur est nul. On ajoute ensuite 6 aux deux membres :

$$\begin{aligned} x - 6 &= 0 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Vérification : $4 \times (6 - 6) = 4 \times 0 = 0$.

La solution de l'équation est 6.

Le petit mot ou

Dans la règle, « ou » ne veut pas dire « l'un, mais pas l'autre ». Les deux facteurs peuvent être nuls en même temps : $0 \times 0 = 0$. Retiens donc : **au moins un** des facteurs est nul.

Vérifie : Un facteur donné

On sait que $A \times B = 0$ et que $A = 5$. Que vaut B ?

A. $B = -5$

Faux.

Avec $B = -5$, c'est la somme $A + B$ qui est nulle. Le produit vaut $5 \times (-5) = -25$.

B. B peut valoir n'importe quel nombre

Faux.

Avec $B = 1$, le produit vaut 5, et non 0.

C. $B = 0$

Juste.

Le facteur $A = 5$ n'est pas nul, donc l'autre facteur est nul : $B = 0$.

Correction

D'après la règle du produit nul, $A = 0$ ou $B = 0$.

Or $A = 5$ n'est pas nul. Donc $B = 0$.

Contrôle : $5 \times 0 = 0$.

Seulement avec zéro

Attention : la règle ne marche qu'avec zéro

✗ $(x - 1)(x + 2) = 10$, donc $x - 1 = 10$ ou $x + 2 = 10$.

✓ La règle du produit nul ne s'applique que si le produit vaut **zéro**. Ici, le produit vaut 10 : on ne peut pas séparer les facteurs.

La fausse règle donne $x = 11$ ou $x = 8$. Or, pour $x = 11$, le produit vaut $10 \times 13 = 130$. Pour $x = 8$, il vaut $7 \times 10 = 70$. Aucun des deux ne vaut 10.

De plus, elle rate les nombres 3 et -4, qui conviennent : $2 \times 5 = 10$ et $(-5) \times (-2) = 10$.

À toi : Zéro ou pas zéro

Résous chaque équation. a) $(x + 2) \times 9 = 0$; b) $(x + 2) \times 9 = 18$.

Indice 1
Regarde d'abord le membre de droite de chaque équation.
Indice 2
Dans a), le facteur 9 n'est pas nul : c'est donc l'autre facteur qui est nul.
Indice 3
Point délicat : dans b), le produit vaut 18, et non 0. La règle du produit nul ne s'applique pas.

Réponse
a) Le produit est nul et $9 \neq 0$. D'après la règle du produit nul, l'autre facteur est nul : $x + 2 = 0$.

On retranche 2 aux deux membres : $x = -2$.

Vérification : $(-2 + 2) \times 9 = 0 \times 9 = 0$. La solution de l'équation est -2.

b) Le produit vaut 18 : la règle du produit nul ne s'applique pas. On divise les deux membres par 9 : $x + 2 = 2$.

On retranche 2 aux deux membres : $x = 0$.

Vérification : $(0 + 2) \times 9 = 18$. La solution de l'équation est 0.

Équations qui se ramènent au premier degré

Un produit égal à zéro

Devine : Deux facteurs

Quels nombres rendent vraie l'égalité $(x - 2)(x + 5) = 0$?

A. 2 seulement
Faux.
2 convient, mais l'autre facteur peut aussi être nul : pour $x = -5$, $x + 5 = 0$.

B. -2 et 5
Faux.
Pour $x = -2$, on obtient $(-4) \times 3 = -12$. Les signes sont inversés.

C. 2 et -5
Juste.

Pour $x = 2$, le premier facteur est nul ; pour $x = -5$, c'est le second.

Correction

D'après la règle du produit nul, $x - 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$.

On ajoute 2 aux deux membres de la première : $x = 2$. On retranche 5 aux deux membres de la seconde : $x = -5$.

Vérification : pour $x = 2$, on obtient $0 \times 7 = 0$; pour $x = -5$, on obtient $(-7) \times 0 = 0$.

Les solutions de l'équation sont 2 et -5.

Un produit de deux facteurs est nul quand l'un au moins des facteurs est nul, et seulement dans ce cas.

Une seule équation devient donc deux petites équations du premier degré, que tu sais déjà résoudre.

L'équation-produit

Propriété : Équation-produit

Soit a, b, c et d des nombres, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$. L'équation

$$(ax + b)(cx + d) = 0$$

s'appelle une **équation-produit**. Ses solutions sont la solution de l'équation $ax + b = 0$ et la solution de l'équation $cx + d = 0$, c'est-à-dire les nombres $-\dfrac{b}{a}$ et $-\dfrac{d}{c}$. Si ces deux nombres sont égaux, l'équation a une seule solution.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : une équation-produit

Résolvons $(3x - 6)(2x + 7) = 0$. D'après la règle du produit nul :

$$3x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 7 = 0$$

Première équation.

- on ajoute 6 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 3.

$$\begin{aligned} 3x - 6 &= 0 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Seconde équation.

- on retranche 7 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 2.

$$\begin{aligned} 2x + 7 &= 0 \\ 2x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Vérification : $3 \times 2 - 6 = 0$ et $2 \times \left(-\frac{7}{2}\right) + 7 = 0$. À chaque fois, un facteur est nul.

Les solutions de l'équation sont 2 et $-\frac{7}{2}$.

Tout dans un membre, puis factoriser

Rappel du chapitre « Calcul numérique » de 3e année. **Factoriser**, c'est écrire une somme sous forme de produit. Un **facteur commun** est un facteur présent dans chaque terme de la somme.

Dans $7 \times 4 + 7 \times 5$, le facteur commun est 7. On le met en facteur : $7 \times 4 + 7 \times 5 = 7 \times (4 + 5)$.

Méthode : se ramener au premier degré

1. **Tout rassembler** dans le membre de gauche, pour obtenir « … $= 0$ ».
2. **Factoriser** ce membre, par un facteur commun ou par une identité remarquable.
3. **Appliquer la règle du produit nul** : on écrit que l'un ou l'autre facteur est nul.
4. **Résoudre** chaque équation du premier degré obtenue, puis vérifier.
5. **Conclure** par une phrase qui donne toutes les solutions.

Exemple : un facteur commun

Résolvons $(x + 1)(2x - 3) = (x + 1)(x + 4)$.

On retranche $(x + 1)(x + 4)$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} &(x + 1)(2x - 3) \\ &\quad - (x + 1)(x + 4) = 0 \end{aligned}$$

On met en facteur $x + 1$, puis on réduit le second facteur, car $2x - 3 - x - 4 = x - 7$:

$$\begin{aligned} (x + 1)\big((2x - 3) - (x + 4)\big) &= 0 \\ (x + 1)(x - 7) &= 0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, $x + 1 = 0$ ou $x - 7 = 0$, c'est-à-dire $x = -1$ ou $x = 7$.

Vérification : pour $x = -1$, les deux membres valent 0 ; pour $x = 7$, ils valent $8 \times 11 = 88$.

Les solutions de l'équation sont -1 et 7.

Avec une identité remarquable

Rappel du chapitre « Calcul numérique » de 3e année. Pour tous nombres a et b :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Exemple : une différence de deux carrés

Résolvons $(2x - 1)^2 - 9 = 0$. Le membre de gauche est de la forme $a^2 - b^2$, avec $a = 2x - 1$ et $b = 3$.

On factorise avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$(2x - 1 - 3)(2x - 1 + 3) = 0$$

On réduit chaque facteur :

$$(2x - 4)(2x + 2) = 0$$

D'après la règle du produit nul, $2x - 4 = 0$ ou $2x + 2 = 0$.

Première équation : on ajoute 4 aux deux membres, $2x = 4$, puis on divise par 2, $x = 2$.

Seconde équation : on retranche 2 aux deux membres, $2x = -2$, puis on divise par 2, $x = -1$.

Vérification : $(2 \times 2 - 1)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$ et $(2 \times (-1) - 1)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$.

Les solutions de l'équation sont 2 et -1.

Vérifie : Un carré parfait

Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$?

A. 3 seulement

Juste.

On factorise : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$. Les deux facteurs sont égaux, et chacun donne $x = 3$.

B. 3 et -3

Faux.

Pour $x = -3$, on obtient $9 + 18 + 9 = 36$, et non 0.

C. Aucune solution

Faux.

Pour $x = 3$, on obtient $9 - 18 + 9 = 0$: 3 est une solution.

Correction

On reconnaît $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$: en effet, $6x = 2 \times x \times 3$ et $9 = 3^2$.

L'équation s'écrit donc $(x - 3)(x - 3) = 0$.

D'après la règle du produit nul, $x - 3 = 0$. On ajoute 3 aux deux membres : $x = 3$.

Vérification : $3^2 - 6 \times 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$. La solution de l'équation est 3.

Ne pas diviser par x

Attention : on ne divise pas par x

✗ $x^2 = 7x$. On divise par x : $x = 7$.

✓ On retranche $7x$ aux deux membres : $x^2 - 7x = 0$. On met x en facteur : $x(x - 7) = 0$. Donc $x = 0$ ou $x = 7$.

Diviser par x fait perdre la solution 0 : on ne divise jamais par une expression qui peut être nulle. Vérification : $0^2 = 7 \times 0$.

À toi : À toi de factoriser

Résous $(x + 3)^2 = 4(x + 3)$. Vérifie chaque solution et conclus par une phrase.

Indice 1
Commence par tout passer dans le membre de gauche.
Indice 2
Le facteur commun est $x + 3$: mets-le en facteur dans $(x + 3)^2 - 4(x + 3)$.
Indice 3
Point délicat : ne divise pas les deux membres par $x + 3$. Tu perdrais la solution qui annule ce facteur.

Réponse

- on retranche $4(x + 3)$ aux deux membres ;
- on met en facteur $x + 3$;
- on réduit le second facteur.

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - 4(x + 3) &= 0\\(x + 3)(x + 3 - 4) &= 0\\(x + 3)(x - 1) &= 0\end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, $x + 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = -3$ ou $x = 1$.

Vérification : pour $x = -3$, les deux membres valent 0 ; pour $x = 1$, ils valent 16.

Les solutions de l'équation sont -3 et 1.

Inéquation du premier degré

Tester des nombres

Rappel du chapitre « Ordre et opérations » de 3e année. $a < b$ se lit « a est strictement inférieur à b ». $a \leq b$ se lit « a est inférieur ou égal à b » : l'égalité est permise.

Avec $<$ ou $>$, l'inégalité est **stricte**. Avec $\leq$ ou $\geq$, elle est **large**.

Devine : Lesquels conviennent ?

Parmi les nombres -5, 0, 3 et 4, lesquels vérifient l'inégalité $2x + 1 < 9$?

A. 3 et 4 seulement

Faux.
Pour $x = 4$, on obtient $2 \times 4 + 1 = 9$, et $9 < 9$ est faux.

B. -5, 0 et 3

Juste.
On obtient -9, 1 et 7, tous strictement inférieurs à 9. Pour 4, on obtient 9.

C. Un seul d'entre eux

Faux.
Calcule pour chacun : -5 donne -9, 0 donne 1, 3 donne 7. Trois nombres conviennent.

Correction
On calcule $2x + 1$ pour chaque nombre :

- pour $x = -5$, on obtient -9 ;
- pour $x = 0$, on obtient 1 ;
- pour $x = 3$, on obtient 7 ;
- pour $x = 4$, on obtient 9.

Les trois premiers résultats sont strictement inférieurs à 9. Pour 4, $9 < 9$ est faux.

Les nombres -5, 0 et 3 conviennent.

Ce qu'est une inéquation

Une équation du premier degré a une seule solution. Une inégalité comme $2x + 1 < 9$ en a beaucoup plus : 2, -1, $\frac{7}{2}$ ou -100 conviennent aussi. Voici le vocabulaire exact.

Définition : Inéquation du premier degré à une inconnue

Une **inéquation** est une inégalité qui contient une inconnue, par exemple x.

Une **inéquation du premier degré à une inconnue** est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes $ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ ou $ax + b \geq 0$, où a et b sont des nombres connus et $a \neq 0$.

Une **solution** de l'inéquation est un nombre qui, mis à la place de x, rend l'inégalité vraie. En général, une inéquation a une infinité de solutions. **Résoudre** l'inéquation, c'est trouver toutes ses solutions ; on les représente sur une droite graduée.

Exemple : solution ou pas ?

$3x - 2 \geq 0$ est une inéquation du premier degré : $a = 3$ et $b = -2$.

Le nombre 1 en est une solution, car $3 \times 1 - 2 = 1$ et $1 \geq 0$.

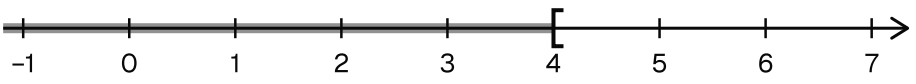
Le nombre 0 n'en est pas une, car $3 \times 0 - 2 = -2$, et $-2 \geq 0$ est faux.

Représenter sur une droite graduée

Rappel de 1re année : sur une droite graduée, les nombres grandissent de gauche à droite. Pour montrer tous les nombres x tels que $x < 4$, on trace un **trait épais** à gauche de 4.

Sur ton cahier, trace une droite graduée et place le nombre 4. Repasse en trait épais toute la partie de la droite située à gauche de 4. Là où le trait s'arrête, en 4, dessine un petit **crochet** : un court trait vertical avec deux petites branches, tournées d'un seul côté.

Si le nombre 4 est une solution, le crochet est tourné vers les solutions, c'est-à-dire vers le trait épais. Sinon, il est tourné de l'autre côté, vers l'extérieur. Pour $x < 4$, le nombre 4 n'est pas une solution : le crochet en 4 est tourné vers l'extérieur, donc vers la droite.



Les nombres x tels que x < 4 : un trait épais à gauche de 4, et en 4 un crochet tourné vers l'extérieur, car 4 n'en fait pas partie.

Vérifie : Le dessin de Hamza

Hamza représente les solutions de $x \geq -2$ sur une droite graduée. Que doit-il dessiner ?

A. Un trait épais à droite de -2, et en -2 un crochet tourné vers les solutions

Juste.

-2 est une solution, car $-2 \geq -2$ est vrai. Les solutions sont les nombres plus grands que -2, à sa droite.

B. Un trait épais à droite de -2, et en -2 un crochet tourné vers l'extérieur

Faux.

L'inégalité est large : $-2 \geq -2$ est vrai, donc -2 est une solution.

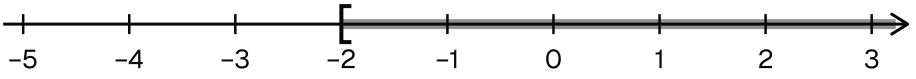
C. Un trait épais à gauche de -2, et en -2 un crochet tourné vers les solutions

Faux.

Les nombres supérieurs à -2 sont à droite de -2 sur la droite graduée. Par exemple, $0 \geq -2$.

Correction

Les solutions sont tous les nombres x tels que $x \geq -2$. Hamza trace un trait épais à droite de -2. Comme -2 est une solution, le crochet en -2 est tourné vers les solutions, c'est-à-dire vers la droite.



Le dessin attendu de Hamza pour x ≥ -2 : un trait épais à droite de -2, et en -2 un crochet tourné vers les solutions.

Strict ou large

Attention : strict ou large

✗ Le nombre 5 est une solution de $x > 5$.

✓ $5 > 5$ est faux : 5 n'est pas une solution de $x > 5$. En revanche, 5 est une solution de $x \geq 5$, car $5 \geq 5$ est vrai.

Sur la droite graduée, le crochet en 5 est tourné vers l'extérieur pour $x > 5$, et vers les solutions pour $x \geq 5$.

À toi : Décrire des solutions

Dessine sur ton cahier une droite graduée, puis représente les solutions de l'inéquation $x \leq -1$. Décris aussi en mots ces solutions et ton dessin. Les nombres $-\frac{3}{2}$, -1 et 0 sont-ils des solutions ?

Indice 1

Les solutions sont les nombres inférieurs ou égaux à -1.

Indice 2

Compare chaque nombre à -1 : $-\frac{3}{2}$ est à gauche de -1, et 0 est à droite.

Indice 3

Point délicat : l'inégalité est large, donc -1 est une solution, et le crochet en -1 est tourné vers les solutions.

Réponse

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x \leq -1$.

Sur le cahier, on place le nombre -1 sur la droite graduée. On repasse en trait épais toute la partie située à gauche de -1. En -1, on dessine un crochet tourné vers les solutions, donc vers la gauche.

Le nombre $-\frac{3}{2}$ est une solution, car $-\frac{3}{2} \leq -1$.

Le nombre -1 est une solution, car $-1 \leq -1$.

Le nombre 0 n'est pas une solution, car $0 > -1$.

Résoudre une inéquation du premier degré

Que devient une inégalité

Rappel du chapitre « Ordre et opérations » de 3e année. Pars de l'inégalité vraie $2 < 6$.

En ajoutant 5 aux deux membres, on obtient $7 < 11$: le sens ne change pas.

En multipliant les deux membres par 3, on obtient $6 < 18$: le sens ne change pas non plus.

Devine : Et avec un nombre négatif ?

On multiplie les deux membres de $2 < 6$ par -3. Quelle inégalité vraie obtient-on ?

A. $-6 < -18$

Faux.

Sur la droite graduée, -18 est à gauche de -6 : $-6 < -18$ est faux.

B. $-6 > -18$

Juste.

-6 est à droite de -18 sur la droite graduée. Le sens de l'inégalité a changé.

C. $6 < 18$

Faux.

C'est le résultat d'une multiplication par 3. Avec -3, les produits sont -6 et -18.

Correction

On a $2 \times (-3) = -6$ et $6 \times (-3) = -18$. Or $-6 > -18$.

Multiplier par un nombre strictement négatif a changé le sens de l'inégalité.

Les règles

Propriété : Transformer une inéquation

On obtient une inéquation qui a **les mêmes solutions** :

- en ajoutant ou en retranchant un même nombre, ou un même terme en x, aux deux membres ;
- en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre **strictement positif**, sans changer le sens de l'inégalité ;
- en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre **strictement négatif**, à condition de **changer le sens** de l'inégalité.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : une règle à la fois

$x + 4 < 10$: on retranche 4 aux deux membres, et on obtient $x < 6$.

$\frac{x}{2} \geq 3$: on multiplie les deux membres par 2, strictement positif, et on obtient $x \geq 6$.

$-x > 3$: on multiplie les deux membres par -1, strictement négatif, et on change le sens : $x < -3$.

La méthode

Méthode : résoudre une inéquation

1. **Développer et réduire** chaque membre, si besoin.
2. **Regrouper** les termes en x dans un membre et les nombres dans l'autre, en ajoutant ou en retranchant un même terme.
3. **Diviser** par le nombre qui multiplie x ; s'il est strictement négatif, on **change le sens** de l'inégalité.
4. **Conclure** par une phrase : « Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que … ».
5. **Représenter** les solutions : un trait épais, et un crochet tourné vers les solutions si l'extrémité en fait partie, vers l'extérieur sinon.

Exemple : Exemple guidé

Résolvons $5x - 3 \leq 2x + 9$. On retranche d'abord $2x$ aux deux membres :

$$5x - 3 \leq 2x + 9$$
$$3x - 3 \leq 9$$

Puis :

- on ajoute 3 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 3, strictement positif : le sens ne change pas.

$$3x \leq 12$$
$$x \leq 4$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x \leq 4$.

Sur la droite graduée : trait épais à gauche de 4, et crochet en 4 tourné vers les solutions.

Contrôle avec $x = 0$: $-3 \leq 9$ est vrai, et $0 \leq 4$ aussi.

Diviser par un nombre négatif

Exemple : le sens change

Résolvons $3 - 4x > 11$:

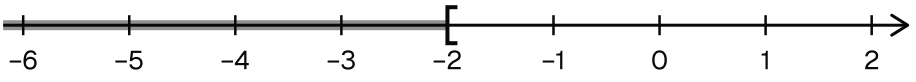
- on retranche 3 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par -4, strictement négatif : on change le sens.

$$-4x > 8$$
$$x < -2$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x < -2$.

Sur la droite graduée : trait épais à gauche de -2, et crochet en -2 tourné vers l'extérieur.

Contrôle avec $x = -3$: on calcule $3 - 4 \times (-3)$, soit $3 + 12 = 15$, et $15 > 11$.



Les solutions de 3 - 4x > 11, c'est-à-dire x < -2 : le trait épais part vers la gauche, et le crochet en -2 regarde vers l'extérieur.

Attention : diviser par un nombre négatif

✗ $-5x \leq 15$, donc $x \leq -3$.

✓ $-5x \leq 15$, donc $x \geq -3$: on divise par -5, qui est strictement négatif, et on change le sens.

Contrôle avec $x = 0$: $-5 \times 0 = 0$, et $0 \leq 15$ est vrai. Donc 0 est une solution. Or $0 \geq -3$ est vrai, alors que $0 \leq -3$ est faux.

Trouve l'erreur : La copie d'Inès

Inès résout $7 - 2x \geq 1$. Elle écrit $-2x \geq -6$, puis $x \geq 3$. Que penses-tu de sa résolution ?

A. La première ligne est fausse, la seconde est juste

Faux.

En retranchant 7 aux deux membres, on obtient bien $-2x \geq 1 - 7$, c'est-à-dire $-2x \geq -6$.

B. La seconde ligne est fausse : on obtient $x \leq 3$

Juste.

On divise par -2, strictement négatif : le sens change.

C. Les deux lignes sont justes

Faux.

Contrôle avec $x = 4$: $7 - 8 = -1$, et $-1 \geq 1$ est faux. Pourtant $4 \geq 3$.

Correction

- on retranche 7 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par -2, strictement négatif : on change le sens.

$$\begin{aligned} 7 - 2x &\geq 1 \\ -2x &\geq -6 \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$

Inès a oublié de changer le sens. Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x \leq 3$.

Contrôle avec $x = 0$: $7 \geq 1$ est vrai, et $0 \leq 3$ aussi.

À toi : À toi de résoudre

Résous $2(x - 3) > 5x + 3$. Conclus par une phrase et décris la représentation des solutions.

Indice 1

Développe le membre de gauche, puis regroupe les termes en x à gauche.

Indice 2

Après avoir regroupé les termes en x à gauche, tu as un nombre négatif devant x.

Indice 3

Point délicat : tu divises par -3, strictement négatif ; le sens de l'inégalité change.

Réponse

- on développe le membre de gauche ;
- on retranche $5x$ aux deux membres.

$$\begin{aligned} 2(x - 3) &> 5x + 3 \\ 2x - 6 &> 5x + 3 \\ -3x - 6 &> 3 \end{aligned}$$

Puis :

- on ajoute 6 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par -3, strictement négatif : on change le sens.

$$\begin{aligned} -3x &> 9 \\ x &< -3 \end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x < -3$. Sur la droite graduée : trait épais à gauche de -3, et crochet en -3 tourné vers l'extérieur.

Contrôle avec $x = -4$: à gauche, $2 \times (-7) = -14$; à droite, $5 \times (-4) + 3 = -17$; et $-14 > -17$.

Signe de ax + b

Positif ou négatif

Devine : Un signe qui change

Calcule $2x - 6$ pour $x = 0$, $x = 3$ et $x = 5$. Pour quels nombres x est-il strictement positif ?

A. Pour $x > 0$

Faux.

Pour $x = 1$, on obtient $2 - 6 = -4$, qui est négatif.

B. Pour $x < 3$

Faux.

Pour $x = 0$, on obtient -6, qui est négatif.

C. Pour $x > 3$

Juste.

On obtient -6, 0 et 4 : le signe change en $x = 3$.

Correction

On trouve -6 pour $x = 0$, 0 pour $x = 3$ et 4 pour $x = 5$.

On résout $2x - 6 > 0$:

- on ajoute 6 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 2, strictement positif.

$$\begin{aligned} 2x - 6 &> 0 \\ 2x &> 6 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Donc $2x - 6$ est strictement positif quand $x > 3$.

Avec $-x+4$, c'est l'inverse. Pour $x=0$, on obtient 4, positif ; pour $x=6$, on obtient -2, négatif. Le côté positif dépend du signe du nombre qui multiplie x.

L'énoncé

Propriété : Signe de ax + b

Soit a et b deux nombres, avec $a \neq 0$. On note $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ le nombre pour lequel $ax+b=0$.

- Si $a>0$: $ax+b$ est strictement négatif quand $x<x_0$, nul quand $x=x_0$, strictement positif quand $x>x_0$.
- Si $a<0$: $ax+b$ est strictement positif quand $x<x_0$, nul quand $x=x_0$, strictement négatif quand $x>x_0$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : un nombre a négatif

Étudions le signe de $-3x+12$. Ici $a=-3$ et $b=12$.

Le nombre qui annule l'expression. On résout $-3x+12=0$. On retranche 12 aux deux membres : $-3x=-12$. On divise par -3 : $x_0=4$.

Le signe. Comme $a<0$, $-3x+12$ est :

- strictement positif quand $x<4$;
- nul quand $x=4$;
- strictement négatif quand $x>4$.

Contrôle avec $x=0$: $-3\times 0+12=12$, strictement positif, et $0<4$.

La méthode

Méthode : trouver le signe de ax + b

1. **Résoudre** $ax+b=0$: on obtient le nombre x_0.
2. **Lire le signe** du coefficient de x, c'est-à-dire du nombre a qui multiplie x.
3. **Conclure** : si $a>0$, l'expression est strictement négative à gauche de x_0 et strictement positive à droite ; si $a<0$, c'est l'inverse.

4. **Contrôler** avec une valeur simple de x, par exemple $x = 0$.

Exemple : Exemple guidé

Étudions le signe de $5x + 2$.

Le nombre qui annule l'expression. On résout $5x + 2 = 0$. On retranche 2 aux deux membres : $5x = -2$. On divise par 5 : $x_0 = -\dfrac{2}{5}$.

Le signe. Le nombre $a = 5$ est strictement positif. Donc $5x + 2$ est :

- strictement négatif quand $x < -\dfrac{2}{5}$;
- nul quand $x = -\dfrac{2}{5}$;
- strictement positif quand $x > -\dfrac{2}{5}$.

Contrôle avec $x = 0$: $5 \times 0 + 2 = 2$, positif, et $0 > -\dfrac{2}{5}$.

Contrôler

Vérifie : L'affirmation de Youssef

Youssef affirme : « $-2x + 7$ est strictement positif quand $x > \dfrac{7}{2}$ ». Fais le contrôle avec $x = 4$. Que conclus-tu ?

A. $-2 \times 4 + 7 = -1$ est négatif, alors que $4 > \dfrac{7}{2}$: Youssef se trompe

Juste.
Comme $a = -2$ est strictement négatif, $-2x + 7$ est strictement positif quand $x < \dfrac{7}{2}$.

B. $-2 \times 4 + 7 = -1$, mais un seul contrôle ne suffit pas : Youssef a raison

Faux.
Un seul nombre qui contredit l'affirmation suffit : $4 > \dfrac{7}{2}$ et pourtant $-2 \times 4 + 7 = -1$ est négatif.

C. $-2 \times 4 + 7 = 1$ est positif : Youssef a raison

Faux.
$-2 \times 4 = -8$, donc $-2 \times 4 + 7 = -1$.

Correction

On résout $-2x + 7 = 0$: on retranche 7 aux deux membres, puis on divise par -2, donc $x_0 = \dfrac{7}{2}$.

Comme $a = -2 < 0$, $-2x + 7$ est :

- strictement positif quand $x < \dfrac{7}{2}$;
- nul quand $x = \dfrac{7}{2}$;

- strictement négatif quand $x > \frac{7}{2}$.

Le contrôle en $x = 4$ le confirme : $4 > \frac{7}{2}$ et $-2 \times 4 + 7 = -1 < 0$. Youssef s'est trompé de côté.

À toi : Le signe d'une expression

Donne le signe de $\frac{1}{2}x - 3$ selon les valeurs de x.

Indice 1

Commence par résoudre $\frac{1}{2}x - 3 = 0$.

Indice 2

Pour trouver x_0, ajoute 3 aux deux membres, puis multiplie les deux membres par 2. Regarde ensuite le signe du coefficient de x.

Indice 3

Point délicat : $\frac{1}{2}$ est strictement positif, même s'il est petit. Contrôle avec $x = 0$: $\frac{1}{2} \times 0 - 3 = -3$, négatif, et $0 < 6$.

Réponse

On résout $\frac{1}{2}x - 3 = 0$.

On ajoute 3 aux deux membres : $\frac{1}{2}x = 3$. On multiplie les deux membres par 2 : $x_0 = 6$.

Le nombre $a = \frac{1}{2}$ est strictement positif. Donc $\frac{1}{2}x - 3$ est :

- strictement négatif quand $x < 6$;
- nul quand $x = 6$;
- strictement positif quand $x > 6$.

Problèmes : mise en équation et mise en inéquation

Mettre en équation

Devine : Traduire un énoncé

Leila a 3 fois l'âge de sa sœur Hiba. Ensemble, elles ont 32 ans. On appelle x l'âge de Hiba, en années. Quelle équation traduit l'énoncé ?

A. $3x = 32$

Faux.

$3x$ est l'âge de Leila seule. L'énoncé parle des deux âges ensemble.

B. $x + 3x = 32$

Juste.

Hiba a x ans et Leila $3x$ ans ; la somme des deux âges vaut 32.

C. $x + 3 = 32$

Faux.

« 3 fois l'âge » se traduit par $3x$, et non par $x + 3$.

Correction

L'équation est $x + 3x = 32$.

- on réduit le membre de gauche ;
- on divise les deux membres par 4.

$$\begin{aligned} x + 3x &= 32 \\ 4x &= 32 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Vérification : $8 + 24 = 32$, et $24 = 3 \times 8$. Hiba a 8 ans et Leila a 24 ans.

Méthode : résoudre un problème

1. **Choisir l'inconnue** : dire ce que représente la lettre, avec son unité.
2. **Traduire** l'énoncé par une équation ou une inéquation.
3. **Résoudre** cette équation ou cette inéquation.
4. **Vérifier** que le résultat convient au problème : nombre entier, positif, plausible.
5. **Répondre** à la question posée par une phrase.

Exemple : au souk

Rachid achète 2 kilos d'amandes et 3 kilos de dattes. Il paie 245 dirhams. Un kilo d'amandes coûte 40 dirhams de plus qu'un kilo de dattes. Quel est le prix d'un kilo de dattes ?

On choisit l'inconnue : x est le prix d'un kilo de dattes, en dirhams. Un kilo d'amandes coûte alors $x + 40$ dirhams. On traduit :

$$2(x + 40) + 3x = 245$$

On résout :

- on développe, puis on réduit le membre de gauche ;
- on retranche 80 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 5.

$$\begin{aligned} 5x + 80 &= 245 \\ 5x &= 165 \\ x &= 33 \end{aligned}$$

Un kilo d'amandes coûte $33 + 40 = 73$ dirhams. Vérification : $2 \times 73 + 3 \times 33 = 146 + 99 = 245$.

Un kilo de dattes coûte 33 dirhams.

Vérifier que la réponse convient

Exemple : le jardin de Fatima

Le jardin rectangulaire de Fatima a un périmètre de 54 mètres. Sa longueur mesure 3 mètres de moins que le double de sa largeur. Quelles sont ses dimensions ?

On choisit l'inconnue : x est la largeur, en mètres. La longueur est $2x - 3$. Le périmètre est le double de la somme des deux dimensions :

$$2\big(x + (2x - 3)\big) = 54$$

On résout :

- on réduit dans la parenthèse, puis on développe ;
- on ajoute 6 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 6.

$$\begin{aligned} 6x - 6 &= 54 \\ 6x &= 60 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

La longueur vaut $2 \times 10 - 3 = 17$. Vérification : $2 \times (10 + 17) = 54$, et les deux mesures sont positives.

Le jardin mesure 10 mètres de large et 17 mètres de long.

Attention : une solution doit convenir au problème

✗ Des amis achètent des tickets de bus à 4 dirhams l'un et dépensent 90 dirhams. Avec n le nombre de tickets, $4n = 90$, donc ils ont acheté $\dfrac{45}{2}$ tickets.

✓ Un nombre de tickets est un nombre entier. Or $\dfrac{90}{4} = \dfrac{45}{2}$ n'est pas entier : la situation est impossible, ou l'énoncé contient une erreur. Avant de répondre, vérifie toujours que le résultat a un sens.

Vérifie : Les âges de Karima et d'Adam

Karima a 12 ans de plus que son frère Adam. Dans 5 ans, elle aura le double de l'âge d'Adam. Quel âge a Adam aujourd'hui ?

A. 7 ans

Juste.
Avec x l'âge d'Adam : $x + 12 + 5 = 2(x + 5)$, donc $x + 17 = 2x + 10$ et $x = 7$.

B. 17 ans
Faux.
Ce résultat vient de $x + 17 = 2x$: les 5 ans ont été ajoutés à Karima, mais pas à Adam.

C. 2 ans
Faux.
Ce résultat vient de $x + 12 = 2(x + 5)$: les 5 ans ont été ajoutés à Adam, mais pas à Karima.

Correction
On appelle x l'âge d'Adam, en années. Karima a $x + 12$ ans.

Dans 5 ans, Adam aura $x + 5$ ans et Karima $x + 17$ ans. On traduit « elle aura le double de l'âge d'Adam » :

$$x + 17 = 2(x + 5)$$

On résout :

- on développe le membre de droite ;
- on retranche x aux deux membres ;
- on retranche 10 aux deux membres.

$$\begin{aligned} x + 17 &= 2x + 10 \\ 17 &= x + 10 \\ 7 &= x \end{aligned}$$

Donc $x = 7$. Vérification : dans 5 ans, Adam aura 12 ans et Karima 24 ans, le double. Adam a 7 ans aujourd'hui.

Mettre en inéquation

Les mots « au plus », « au moins » ou « moins cher que » annoncent une **inéquation**. On suit la même méthode. À la fin, on garde seulement les solutions qui ont un sens dans le problème.

Exemple : deux forfaits

Meryem hésite entre deux forfaits de téléphone. Forfait A : 30 dirhams par mois, plus 1 dirham par minute d'appel. Forfait B : 90 dirhams par mois, appels compris. À partir de combien de minutes le forfait B est-il moins cher ?

On choisit l'inconnue : x est le nombre de minutes d'appel dans le mois. Le forfait A coûte alors $30 + x$ dirhams. On traduit « B est moins cher que A », puis on retranche 30 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 90 &< 30 + x \\ 60 &< x \end{aligned}$$

Lire « $60 < x$ », c'est lire « $x > 60$ » : x est plus grand que 60.

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x > 60$. Vérification : pour 61 minutes, A coûte 91 dirhams et B 90 dirhams.

Le forfait B est moins cher dès que Meryem appelle plus de 60 minutes dans le mois.

Exemple : un budget

Amine dispose de 200 dirhams. Il achète un cartable à 74 dirhams et des cahiers à 9 dirhams l'un. Combien de cahiers peut-il acheter au plus ?

On choisit l'inconnue : n est le nombre de cahiers. On traduit « la dépense ne dépasse pas 200 dirhams », puis on résout :

- on retranche 74 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 9, strictement positif.

$$\begin{aligned} 74 + 9n &\leq 200 \\ 9n &\leq 126 \\ n &\leq 14 \end{aligned}$$

Le nombre de cahiers est un entier, positif ou nul : n peut valoir 0, 1, 2, et ainsi de suite jusqu'à 14.

Vérification : $74 + 9 \times 14 = 200$, alors que $74 + 9 \times 15 = 209$ dépasse 200.

Amine peut acheter au plus 14 cahiers.

À toi

Vérifie : Une phrase à traduire

« Le triple d'un nombre, diminué de 4, est au moins égal à 11. » Si x est ce nombre, quelle inéquation traduit la phrase ?

A. $3x - 4 \geq 11$

Juste.
Le triple de x est $3x$; diminué de 4, il devient $3x - 4$; « au moins égal » se traduit par $\geq$.

B. $3(x - 4) \geq 11$

Faux.
Ici, c'est le nombre diminué de 4 qui est triplé. La phrase diminue le triple, et non le nombre.

C. $3x - 4 \leq 11$

Faux.
« Au moins égal à 11 » veut dire « supérieur ou égal à 11 ».

Correction

L'inéquation est $3x - 4 \geq 11$.

- on ajoute 4 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 3, strictement positif : le sens ne change pas.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &\geq 11 \\ 3x &\geq 15 \\ x &\geq 5 \end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres x tels que $x \geq 5$.

À toi : La course en taxi

Un taxi facture 7 dirhams au départ, puis 3 dirhams par kilomètre. Sanaa a 40 dirhams. Quelle distance peut-elle parcourir au plus ?

Indice 1
Choisis l'inconnue : d, la distance parcourue, en kilomètres.
Indice 2
Le prix de la course, c'est 7 dirhams plus 3 dirhams par kilomètre. Compare ce prix à l'argent de Sanaa.
Indice 3
Point délicat : la réponse finale est une phrase sur la distance, et pas seulement une inégalité.

Réponse
On choisit l'inconnue : d est la distance, en kilomètres. La course coûte $7 + 3d$ dirhams, et ce prix ne doit pas dépasser 40 dirhams. On traduit, puis on résout :

- on retranche 7 aux deux membres ;
- on divise les deux membres par 3, strictement positif.

$$\begin{aligned} 7 + 3d &\leq 40 \\ 3d &\leq 33 \\ d &\leq 11 \end{aligned}$$

Vérification : pour 11 kilomètres, la course coûte $7 + 3 \times 11 = 40$ dirhams.

Sanaa peut parcourir au plus 11 kilomètres.

Ce qu'il faut retenir

À retenir

- Pour résoudre une équation, on écrit **une règle par ligne** : développer, regrouper, diviser, puis vérifier et conclure par une phrase.

- Un produit est nul quand l'un au moins de ses facteurs est nul : on factorise, puis chaque facteur donne une équation du premier degré à résoudre.
- Dans une inéquation, diviser par un nombre strictement négatif **change le sens** de l'inégalité.
- Les solutions d'une inéquation se décrivent par une phrase et se représentent sur une droite graduée.
- Pour trouver le signe de $ax + b$, on cherche le nombre qui annule l'expression, puis on regarde si a est strictement positif ou strictement négatif.
- Dans un problème, on choisit l'inconnue, on traduit, on résout, on vérifie, puis on répond par une phrase.

Ces outils te serviront vite. Bientôt, tu résoudras des systèmes de deux équations à deux inconnues. Plus tard, le signe de $ax + b$ t'aidera à étudier les fonctions affines.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Équations et inéquations du premier degré » (3ac · general · mathematiques)