BURHAN

Résumé : Calcul des volumes

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/calcul-des-volumes/resume

Chapitre	Semestre
Calcul des volumes	Semestre 2

La carte du chapitre

À retenir : Trois questions, un chapitre

Ce chapitre répond à trois questions.

- **Combien de place** occupe un solide ? C'est son volume.
- **Combien de matière** faut-il pour l'emballer ? C'est son aire.
- **Que devient** un solide quand on change son échelle ? On multiplie par k, k^2 ou k^3.

Pour trouver une longueur cachée, tu utilises le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès.

Remarque : Des formules admises

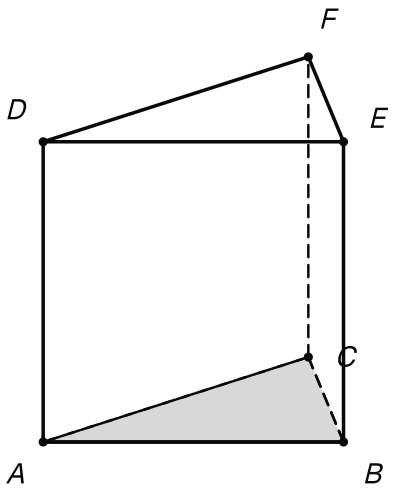
Les formules d'aires et de volumes de ce chapitre sont **admises**. Tu les appliques sans les justifier. Ton travail est de bien choisir la base, la hauteur et l'unité.

Solides usuels et aires

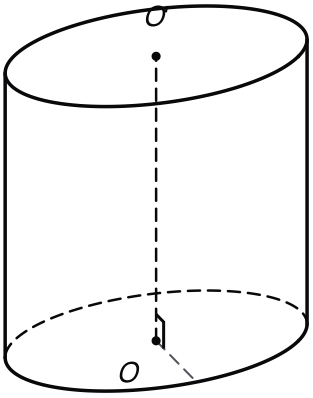
Définition : Les solides usuels

Un **solide** est un objet de l'espace limité par des surfaces. Voici les solides usuels du collège.

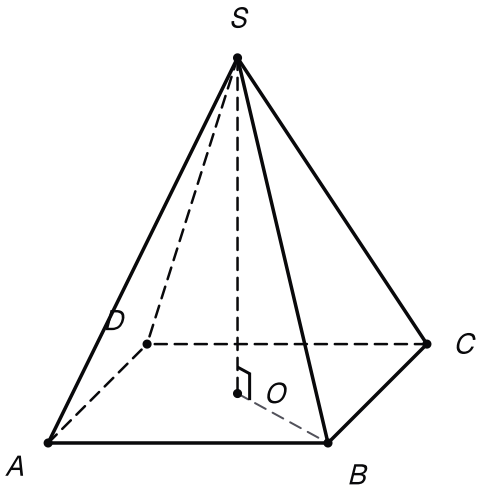
- Un **prisme droit** a deux **bases** parallèles et superposables, qui sont des polygones. Ses **faces latérales** sont des rectangles. Sa **hauteur** est la distance entre les deux bases.
- Un **parallélépipède rectangle** (ou pavé droit) est un prisme droit dont les six faces sont des rectangles. Un **cube** est un parallélépipède rectangle dont les six faces sont des carrés.
- Un **cylindre de révolution** (ou cylindre droit) a deux bases parallèles qui sont des disques de même rayon. La droite qui joint leurs centres est perpendiculaire aux bases. Sa hauteur est la distance entre les centres des deux bases.
- Une **pyramide** a pour base un polygone. Ses faces latérales sont des triangles qui ont un sommet commun : le **sommet** de la pyramide. Sa hauteur est la distance du sommet au plan de la base.
- Un **cône de révolution** a pour base un disque de centre O et un sommet S tel que la droite (SO) est perpendiculaire à la base. Sa hauteur est SO. Une **génératrice** est un segment $[SM]$, où M est un point du cercle de base.



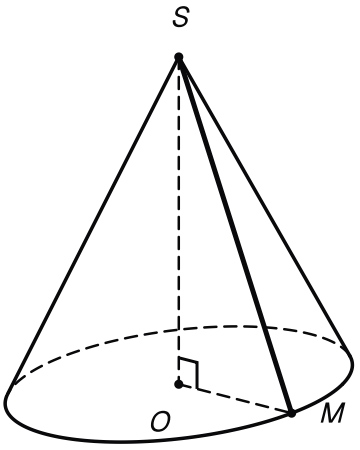
Prisme droit à bases triangulaires : les bases ABC et DEF sont parallèles et superposables, les faces latérales sont des rectangles.



Cylindre de révolution : deux disques de même rayon, de centres O et O', et la hauteur OO' perpendiculaire aux bases.



Pyramide SABCD à base carrée : quatre faces triangulaires de sommet commun S, et la hauteur [SO] perpendiculaire à la base.

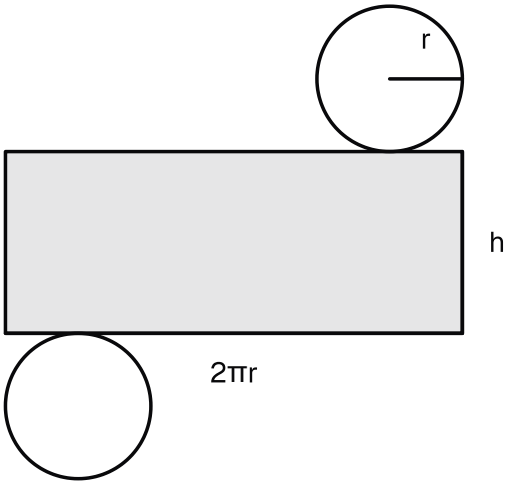


Cône de révolution de sommet S : la base est le disque de centre O, [SO] est la hauteur et [SM] une génératrice.

Propriété : Aire latérale et aire totale

- L'**aire latérale** d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution est égale au **périmètre de la base** multiplié par la **hauteur**. Pour un cylindre de rayon r et de hauteur h, l'aire latérale vaut $2\pi rh$.
- L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires de ses faces latérales.
- L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon r et de génératrice de longueur a vaut πra.

- L'**aire totale** d'un solide est la somme de son aire latérale et de l'aire de sa base, ou de ses deux bases.



Patron d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : un rectangle de côtés 2πr et h, avec un disque de rayon r sur chaque grand côté.

Remarque : Ce résultat est admis

Ces formules d'aires sont admises. Le patron d'un cylindre aide à retenir l'aire latérale : un rectangle dont la longueur est le périmètre du disque de base.

Exemple

Énoncé. Un pot à crayons est un cylindre sans couvercle. Son rayon mesure $7\ \text{cm}$ et sa hauteur $10\ \text{cm}$. Quelle est l'aire de carton utilisée ?

Aire latérale. On applique la formule $2\pi r h$:

$$2\pi \times 7 \times 10 = 140\pi\ \text{cm}^2$$

Fond. Il n'y a qu'une base, un disque de rayon $7\ \text{cm}$:

$$\pi \times 7^2 = 49\pi\ \text{cm}^2$$

Total. On ajoute le fond à l'aire latérale :

$$140\pi + 49\pi = 189\pi\ \text{cm}^2$$

L'aire de carton utilisée est $189\pi\ \text{cm}^2$, soit environ $593{,}8\ \text{cm}^2$, arrondie au dixième.

Volume d'un prisme droit et d'un cylindre

Propriété : Volume d'un prisme droit et d'un cylindre

Le volume V d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution est égal à l'aire B de sa base multipliée par sa hauteur h :

$$V = B \times h.$$

En particulier :

- parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c : $V = a \times b \times c$;
- cube d'arête a : $V = a^3$;
- cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h : $V = \pi r^2 h$.

Les longueurs sont exprimées dans la même unité. Le volume s'exprime alors dans l'unité de volume correspondante : en cm^3 si les longueurs sont en cm.

Remarque : Ce résultat est admis

Ces formules de volume sont admises. Retiens l'image : le volume, c'est l'aire de la base empilée sur toute la hauteur.

Méthode : calculer un volume

1. **Nomme** le solide.
2. **Trouve** la base. Calcule son aire B.
3. **Trouve** la hauteur h. Elle fait un angle droit avec la base.
4. **Choisis** la formule : $B \times h$ pour un prisme droit ou un cylindre. Pour une pyramide ou un cône, prends le tiers.
5. **Contrôle** l'unité : des longueurs en cm donnent un volume en cm^3.

Méthode : unités de volume et de capacité

1. **Mets** toutes les longueurs dans la même unité avant de calculer.
2. **Change** d'unité de volume avec un facteur $1\,000$: $1\ \mathrm{m}^3 = 1\,000\ \mathrm{dm}^3$ et $1\ \mathrm{dm}^3 = 1\,000\ \mathrm{cm}^3$.
3. **Passe** aux litres : $1\ \mathrm{dm}^3 = 1\ \mathrm{L}$, et $1\ \mathrm{cm}^3 = 1\ \mathrm{mL}$.

Exemple

Énoncé. Une jardinière est un parallélépipède rectangle. Ses dimensions intérieures sont $90\ \text{cm}$, $20\ \text{cm}$ et $25\ \text{cm}$. Combien de litres de terre contient-elle, remplie à ras bord ?

Volume. On multiplie les trois dimensions :

$$90 \times 20 \times 25 = 45\,000\ \text{cm}^3$$

Litres. On divise par $1\,000$ pour passer aux dm^3, c'est-à-dire aux litres :

$$\begin{aligned} 45\,000\ \text{cm}^3 &= 45\ \text{dm}^3 \\ &= 45\ \text{L} \end{aligned}$$

La jardinière contient $45\ \text{L}$ de terre.

Attention : Le facteur des volumes est 1 000

Un litre est le volume d'un cube de $1\ \text{dm}$ d'arête, soit $10\ \text{cm}$. Ce cube contient donc :

$$10 \times 10 \times 10 = 1\,000\ \text{cm}^3$$

Ainsi $2{,}5\ \text{dm}^3 = 2\,500\ \text{cm}^3$, et non $25\ \text{cm}^3$. Pour les volumes, on avance de trois rangs à chaque unité.

Attention : Le rayon, pas le diamètre

Une boîte cylindrique a un diamètre de $18\ \text{cm}$ et une hauteur de $2\ \text{cm}$. Son rayon est la moitié du diamètre : $9\ \text{cm}$. Son volume vaut :

$$\pi \times 9^2 \times 2 = 162\pi\ \text{cm}^3$$

Le calcul avec 18 donnerait $648\pi\ \text{cm}^3$: quatre fois trop.

Volume d'une pyramide et d'un cône

Propriété : Volume d'une pyramide et d'un cône

Le volume V d'une pyramide ou d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de l'aire B de sa base par sa hauteur h :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h.$$

Pour un cône de révolution de rayon r et de hauteur h :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Remarque : Ce résultat est admis

Ce résultat est admis. Une pyramide remplit le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

Exemple

Énoncé. Un presse-papier est une pyramide à base carrée. Le côté du carré mesure $5\ \text{cm}$ et la hauteur $6\ \text{cm}$.

Base. $B = 5 \times 5 = 25\ \text{cm}^2$.

Volume. La formule de la pyramide donne :

$$V = \frac{1}{3} \times 25 \times 6 = 50\ \text{cm}^3$$

Attention : **N'oublie pas le tiers**

Un cône a un rayon de $2\ \text{cm}$ et une hauteur de $6\ \text{cm}$. Son volume vaut :

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 6 = 8\pi\ \text{cm}^3$$

Sans le tiers, on trouve $24\pi\ \text{cm}^3$. C'est le volume du cylindre de mêmes dimensions, trois fois trop grand.

Le théorème de Pythagore dans les solides

Méthode : **une longueur cachée dans un solide**

1. **Repère** un triangle rectangle qui contient la longueur cherchée. Il peut être sur une face ou à l'intérieur du solide.
2. **Justifie** l'angle droit par une phrase : une arête perpendiculaire à une face, ou une hauteur perpendiculaire à la base.
3. **Écris** l'égalité de Pythagore et calcule.
4. **Réutilise** la longueur trouvée dans une formule d'aire ou de volume.

Exemple

Énoncé. Un cône de sommet S a une base de centre O et de rayon $OM = 12\ \text{cm}$. Sa génératrice mesure $SM = 20\ \text{cm}$.

Angle droit. La hauteur (SO) est perpendiculaire à la base : le triangle SOM est rectangle en O.

Hauteur. D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse étant $[SM]$:

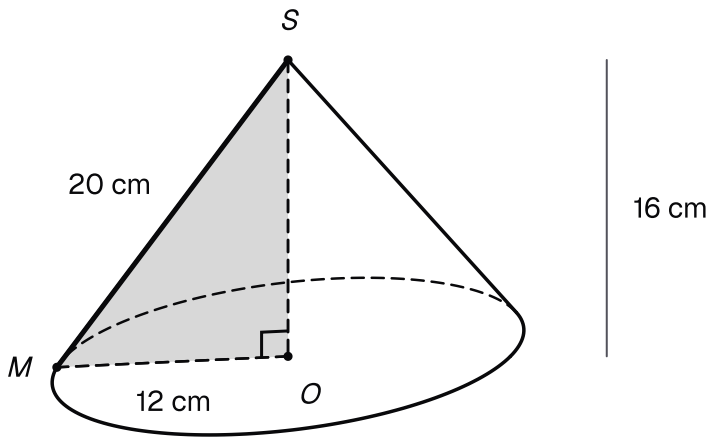
$$\begin{aligned} SO^2 &= 20^2 - 12^2 \\ &= 400 - 144 = 256 \end{aligned}$$

Donc $SO = 16\ \text{cm}$.

Volume. On applique la formule du cône :

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 16$$
$$= 768\pi \text{ cm}^3$$

Le volume vaut environ $2\,412{,}7 \text{ cm}^3$, arrondi au dixième.



Le cône de l'exemple : OM = 12 cm, SM = 20 cm, d'où la hauteur SO = 16 cm dans le triangle SOM, rectangle en O.

Exemple

Énoncé. Le pavé $ABCDEFGH$ a pour dimensions $AB = 2$, $BC = 3$ et $CG = 6$, en centimètres. Calcule la grande diagonale AG.

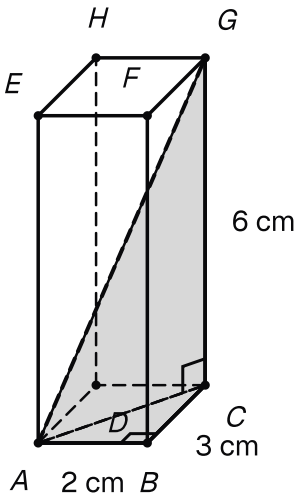
Sur la face. Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

Dans le pavé. L'arête $[CG]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$: le triangle ACG est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore :

$$AG^2 = 13 + 6^2 = 49$$

Donc $AG = 7 \text{ cm}$.



Le pavé de 2 cm sur 3 cm sur 6 cm et ses deux triangles rectangles : ABC sur la face du bas, puis ACG, d'hypoténuse AG = 7 cm.

Attention : Une génératrice n'est pas une hauteur

Un cône a un rayon de $20\ \text{cm}$ et une génératrice de $29\ \text{cm}$. Sa hauteur n'est pas $29\ \text{cm}$.

Le triangle formé par la hauteur, le rayon et la génératrice est rectangle. Donc la hauteur vaut $21\ \text{cm}$, car :

$$\begin{aligned} 29^2 - 20^2 &= 841 - 400 \\ &= 441 = 21^2 \end{aligned}$$

Agrandissement et réduction

Définition : Agrandissement et réduction

Soit k un nombre strictement positif. **Agrandir ou réduire** une figure ou un solide dans le **rapport** k, c'est construire une figure ou un solide de même forme dont **toutes les longueurs** sont multipliées par k. Les angles ne changent pas.

- Si $k > 1$, c'est un **agrandissement**.
- Si $0 < k < 1$, c'est une **réduction**.

Le rapport k est le quotient d'une longueur de la nouvelle figure par la longueur correspondante de la figure de départ.

Propriété : Effet sur les longueurs, les aires et les volumes

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- les **longueurs** sont multipliées par k ;
- les **aires** sont multipliées par k^2 ;
- les **volumes** sont multipliés par k^3.

La démonstration est faite pour les figures et les solides usuels. Pour une figure quelconque, la propriété est admise.

Méthode : trouver et utiliser le rapport k

1. **Divise** une longueur de la nouvelle figure par la longueur qui lui correspond au départ : c'est k.
2. **Conclus** : $k > 1$ indique un agrandissement, $0 < k < 1$ une réduction.
3. **Applique** le bon facteur : k pour une longueur, k^2 pour une aire, k^3 pour un volume.
4. **Remonte** à k si l'on te donne un rapport d'aires ou de volumes : cherche le nombre positif dont le carré, ou le cube, vaut ce rapport.

Exemple

Énoncé. Une boîte est agrandie dans le rapport $k = \dfrac{3}{2}$. Une arête mesure $8\ \text{cm}$, une face a une aire de $40\ \text{cm}^2$, et la boîte a un volume de $64\ \text{cm}^3$.

Longueur. Une longueur est multipliée par k : $8 \times \dfrac{3}{2} = 12\ \text{cm}$.

Aire. Une aire est multipliée par k^2 :

$$40 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 40 \times \frac{9}{4} = 90\ \text{cm}^2$$

Volume. Un volume est multiplié par k^3 :

$$64 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 64 \times \frac{27}{8} = 216\ \text{cm}^3$$

Exemple

Énoncé. Le volume d'une maquette est mille fois plus petit que celui du vrai bateau. Quel est le rapport de réduction ?

Cube. On cherche k tel que $k^3 = \dfrac{1}{1\,000}$. Or $10^3 = 1\,000$, donc $k = \dfrac{1}{10}$.

Conséquence. Les longueurs sont divisées par 10 et les aires par 100.

Attention : Tripler les longueurs ne triple pas le volume

Une pyramide a un volume de $5\ \text{cm}^3$. On triple toutes ses longueurs. Son volume n'est pas $15\ \text{cm}^3$.

Il est multiplié par $3^3 = 27$: il vaut $135\ \text{cm}^3$. Les aires, elles, sont multipliées par $3^2 = 9$.

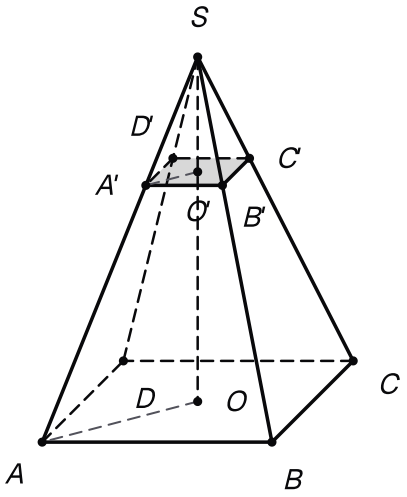
Pyramide ou cône coupé parallèlement à la base

Propriété : Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base

On coupe une pyramide, ou un cône de révolution, de sommet S et de hauteur $[SO]$ par un plan **parallèle à sa base**. Ce plan coupe la hauteur en un point O'.

- La **section** obtenue est une réduction de la base, de rapport $k = \dfrac{SO'}{SO}$.
- La petite pyramide, ou le petit cône, de sommet S est une réduction de la grande pyramide, ou du grand cône, dans le même rapport k.

Dans chaque face latérale, le côté de la section est parallèle au côté de la base : le théorème de Thalès permet d'y calculer les longueurs.



Une pyramide de sommet S coupée parallèlement à sa base au niveau de O' : la section teintée A'B'C'D' réduit la base ABCD.

Remarque : Ce résultat est admis

Ce résultat est admis. Pour une pyramide, le théorème de Thalès dans une face latérale donne les longueurs de la section. Pour un cône, on l'applique dans un triangle formé par le sommet, le centre de la base et un point du cercle.

Méthode : solide coupé parallèlement à la base

1. **Vérifie** que la coupe se fait parallèlement à la base.
2. **Forme** le rapport $k = \dfrac{SO'}{SO}$, toujours petit sur grand.
3. **Calcule** : longueurs de la section avec k, aire de la section avec k^2, volume du petit solide avec k^3.
4. **Pour le tronc**, enlève le petit solide du grand.

Exemple

Énoncé. Une pyramide de sommet S a pour base un carré de côté $9\ \text{cm}$. Sa hauteur est $SO = 12\ \text{cm}$. On la coupe parallèlement à la base, à $SO' = 4\ \text{cm}$ du sommet.

Rapport. $k = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

Section. C'est un carré de côté $9 \times \dfrac{1}{3} = 3\ \text{cm}$. Son aire est celle de la base multipliée par k^2 : $81 \times \dfrac{1}{9} = 9\ \text{cm}^2$.

Grande pyramide. Son volume vaut :

$$\frac{1}{3} \times 81 \times 12 = 324\ \text{cm}^3$$

Petite pyramide. Son volume est multiplié par k^3 :

$$324 \times \frac{1}{27} = 12\ \text{cm}^3$$

Tronc. On enlève le petit volume du grand : $324 - 12 = 312\ \text{cm}^3$.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Un volume** : base, hauteur, formule ; le tiers pour une pyramide ou un cône.
- **Une aire d'emballage** : aire latérale, puis une ou deux bases.
- **Des litres** : passe par les dm^3.
- **Une longueur cachée** : un triangle rectangle, l'angle droit justifié, Pythagore.
- **Une section parallèle à la base** : le rapport k, puis Thalès dans un triangle qui contient le sommet.
- **Une maquette** : le rapport k, puis k, k^2 ou k^3.
- **Un rapport d'aires ou de volumes** : remonte à k par le carré ou le cube.

Prisme droit ou cylindre

$$V = B \times h$$

Parallélépipède rectangle

$$V = a \times b \times c$$

Cube d'arête a

$$V = a^3$$

Cylindre de rayon r

$$V = \pi r^2 h$$

Pyramide ou cône

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

Cône de rayon r

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Aire latérale d'un cylindre

$$2\pi r h$$

Aire latérale d'un cône de génératrice a

$$\pi r a$$

Rapport k : aire

$$\text{aire} \times k^2$$

Rapport k : volume

$$\text{volume} \times k^3$$

Unités

$$1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3 = 1\ \text{L}$$

À retenir : Rédiger en devoir

Écris la formule avant d'y mettre les nombres. Donne la valeur exacte en π, puis la valeur approchée annoncée.

Justifie chaque angle droit par une phrase. Termine par l'unité et une phrase de réponse.