BURHAN

Calcul des volumes : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/calcul-des-volumes/exercices/examen

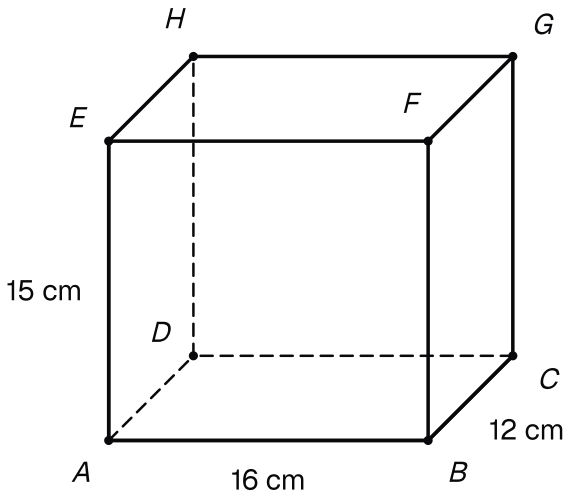
Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des volumes	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une boîte, une pyramide et une baguette

Une boîte a la forme d'un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les arêtes $[AE]$ et $[DH]$ sont perpendiculaires à la face $ABCD$.

On donne $AB = 16\ \text{cm}$, $AD = 12\ \text{cm}$ et $AE = 15\ \text{cm}$. Dessine la boîte sur ton cahier.



La boîte ABCDEFGH : AB = 16 cm, AD = 12 cm et AE = 15 cm.

1. 1,5 pts

Calculer le volume de la boîte en cm^3, puis en litres.

INDICE

Outil : $V = a \times b \times c$.

Ensuite : $1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3$.

CORRIGÉ

Volume. La boîte est un parallélépipède rectangle : son volume est le produit de ses trois dimensions.

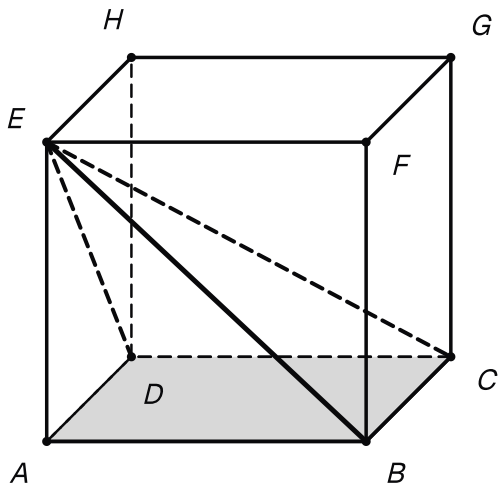
$$\begin{aligned} V &= 16 \times 12 \times 15 \\ &= 2\,880\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Litres. Comme $1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3$, on divise par $1\,000$.

Conclusion. La boîte a un volume de $2\,880\ \text{cm}^3$, soit $2{,}88\ \text{L}$.

2. 1 pts

On considère la pyramide $EABCD$, de sommet E et de base $ABCD$. Calculer son volume. Quelle fraction du volume de la boîte représente-t-il ?



La pyramide EABCD dans la boîte : son sommet est E, sa base est le fond ABCD.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$.

Point délicat : la hauteur est $[EA]$, perpendiculaire à la base.

CORRIGÉ

Base. La base $ABCD$ est un rectangle : $B = 16 \times 12 = 192 \text{ cm}^2$.

Hauteur. La droite (EA) est perpendiculaire à la face $ABCD$: la hauteur de la pyramide est $EA = 15 \text{ cm}$.

Volume. On applique la formule $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 192 \times 15 \\ &= 960 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Fraction. On divise par le volume de la boîte, trouvé à la question 1 :

$$\frac{960}{2\,880} = \frac{1}{3}$$

Conclusion. La pyramide $EABCD$ a un volume de 960 cm^3 : c'est le tiers du volume de la boîte.

3. 0,5 pts

Calculer la longueur BD.

INDICE

Outil : le triangle ABD est rectangle en A, car $ABCD$ est un rectangle.

CORRIGÉ

Angle droit. $ABCD$ est un rectangle, donc le triangle ABD est rectangle en A, d'hypoténuse $[BD]$.

Théorème de Pythagore. Avec $AB^2 = 16^2 = 256$ et $AD^2 = 12^2 = 144$:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ &= 256 + 144 \\ &= 400 \end{aligned}$$

Conclusion. $BD = 20\ \text{cm}$, car $20^2 = 400$.

4. 1 pts

Justifier que le triangle BDH est rectangle en D. En déduire la longueur BH.

INDICE

Outil : l'arête $[DH]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$.

Début : la droite (BD) est dans cette face ; utilise la question 3.

CORRIGÉ

Angle droit. L'arête $[DH]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$, qui contient la droite (BD). Donc le triangle BDH est rectangle en D.

Longueur DH. On a $DH = AE = 15\ \text{cm}$, car $ADHE$ est un rectangle.

Théorème de Pythagore. L'hypoténuse est $[BH]$. Avec $BD^2 = 400$ (question 3) et $DH^2 = 225$:

$$\begin{aligned} BH^2 &= BD^2 + DH^2 \\ &= 400 + 225 \\ &= 625 \end{aligned}$$

Conclusion. Le triangle BDH est rectangle en D, et $BH = 25\ \text{cm}$, car $25^2 = 625$.

5. 1 pts

Une baguette rigide mesure $24\ \text{cm}$. Peut-on la ranger dans la boîte fermée ? Justifier.

INDICE

Début : cherche le plus long segment qui tient dans la boîte fermée.

CORRIGÉ

Plus long segment. Dans la boîte fermée, le plus long segment joint deux sommets opposés : c'est une grande diagonale, comme $[BH]$. D'après la question 4, elle mesure $25\ \text{cm}$.

Comparaison. La baguette mesure $24\ \text{cm}$, et $24 < 25$.

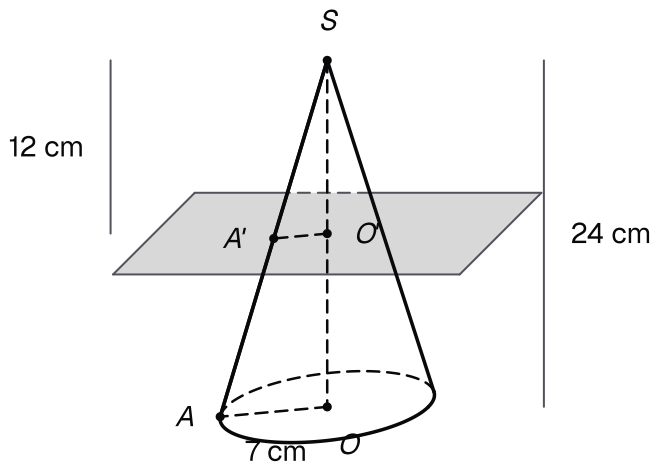
Conclusion. Oui : la baguette tient dans la boîte fermée, posée le long de la diagonale $[BH]$.

Exercice 2 5 pts

Le volume d'un abat-jour

Un cône de révolution a pour sommet S et pour base un disque de centre O et de rayon $OA = 7\ \text{cm}$. Sa hauteur est $SO = 24\ \text{cm}$.

Un plan parallèle à la base rencontre $[SO]$ en O' et $[SA]$ en A', avec $SO' = 12\ \text{cm}$. La partie située sous ce plan est un tronc de cône : c'est la forme d'un abat-jour.



Le cône de sommet S, de rayon OA = 7 cm et de hauteur SO = 24 cm, coupé par un plan parallèle à la base au niveau de O', avec SO' = 12 cm.

1. 1 pts

Calculer la longueur de la génératrice SA.

INDICE

Outil : le triangle SOA est rectangle en O, car la hauteur est perpendiculaire à la base.

CORRIGÉ

Angle droit. La droite (SO) est perpendiculaire à la base, qui contient la droite (OA). Le triangle SOA est donc rectangle en O, d'hypoténuse $[SA]$.

Théorème de Pythagore. On a $SA^2 = SO^2 + OA^2$, donc :

$$\begin{aligned} SA^2 &= 24^2 + 7^2 \\ &= 576 + 49 \\ &= 625 \end{aligned}$$

Conclusion. La génératrice mesure $SA = 25\ \text{cm}$, car $25^2 = 625$.

2. 1 pts

Calculer la valeur exacte du volume du grand cône.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

CORRIGÉ

Le grand cône a pour rayon $OA = 7\ \text{cm}$ et pour hauteur $SO = 24\ \text{cm}$. Avec $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi \times 7^2 \times 24 \\ &= \frac{1}{3} \times 49 \times 24 \times \pi \\ &= 392\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

En effet, $49 \times 24 = 1\,176$ et $1\,176 \div 3 = 392$.

Conclusion. Le grand cône a un volume exact de $392\pi\ \text{cm}^3$.

3. 1 pts

En déduire l'aire latérale du grand cône : valeur exacte.

INDICE

Outil : l'aire latérale d'un cône vaut $\pi r a$, où a est la génératrice.

Début : utilise la question 1.

CORRIGÉ

La génératrice mesure $SA = 25\ \text{cm}$ (question 1) et le rayon $7\ \text{cm}$. L'aire latérale d'un cône vaut $\pi r a$:

$$\pi \times 7 \times 25 = 175\pi\ \text{cm}^2$$

Conclusion. L'aire latérale du grand cône vaut exactement $175\pi\ \text{cm}^2$.

4. 1 pts

Calculer le rapport de réduction k. En déduire le rayon $O'A'$ de la section avec le théorème de Thalès.

INDICE

Outil : $k = \dfrac{SO'}{SO}$.

Début : dans le triangle SOA, les droites $(O'A')$ et (OA) sont parallèles.

CORRIGÉ

Rapport. Le petit cône de sommet S est une réduction du grand. Le rapport est le quotient des hauteurs :

$$k = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Parallèles. Dans le triangle SOA, le point O' est sur $[SO]$ et A' sur $[SA]$. Les droites $(O'A')$ et (OA) sont parallèles, car la section est dans un plan parallèle au plan de base.

Thalès. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2}$$

On multiplie OA par ce quotient :

$$O'A' = 7 \times \frac{1}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

Conclusion. Le rapport vaut $k = \dfrac{1}{2}$, et la section a pour rayon $O'A' = 3{,}5$ cm.

5. 1 pts

Calculer le volume de l'abat-jour : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Début : l'abat-jour est le grand cône privé d'un petit cône de sommet S.

Point délicat : n'arrondis qu'à la fin.

CORRIGÉ

Découpage. L'abat-jour est le grand cône privé du petit cône de sommet S. La base de ce petit cône est le disque de centre O' et de rayon $O'A'$.

Petit cône. C'est une réduction du grand cône de rapport $k = \dfrac{1}{2}$ (question 4). Les volumes sont multipliés par $k^3 = \dfrac{1}{8}$:

$$392\pi \times \frac{1}{8} = 49\pi \text{ cm}^3$$

Contrôle direct. Le petit cône a pour rayon $3{,}5 \text{ cm}$ et pour hauteur 12 cm :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \times \pi \times 3{,}5^2 \times 12 \\ &= 49\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Abat-jour. On retranche le volume du petit cône :

$$392\pi - 49\pi = 343\pi \text{ cm}^3$$

La calculatrice donne $343\pi \approx 1\,077{,}57$.

Conclusion. L'abat-jour a un volume de $343\pi \text{ cm}^3$, soit environ $1\,077{,}6 \text{ cm}^3$, arrondi au dixième.

Exercice 3 5 pts

Le bassin d'une fontaine et sa maquette

Le bassin d'une fontaine est un cylindre de révolution de diamètre $8\ \text{m}$ et de profondeur $1\ \text{m}$. L'architecte en a construit une maquette : le diamètre de la maquette mesure $20\ \text{cm}$.

1. 1,5 pts

Calculer le volume du bassin : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième de m^3.

INDICE

Outil : $V = \pi r^2 h$.

Point délicat : le rayon est la moitié du diamètre.

CORRIGÉ

Rayon. Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 8 \div 2 = 4\ \text{m}$.

Volume. La profondeur joue le rôle de la hauteur, $h = 1\ \text{m}$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \times 4^2 \times 1 \\ &= 16\pi\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

La calculatrice donne $16\pi \approx 50{,}27$.

Conclusion. Le bassin a un volume de $16\pi\ \text{m}^3$, soit environ $50{,}3\ \text{m}^3$, arrondi au dixième.

2. 1 pts

Calculer le rapport k de la maquette par rapport au bassin. Est-ce un agrandissement ou une réduction ?

INDICE

Outil : quotient de deux longueurs correspondantes.

Début : $8\ \text{m} = 800\ \text{cm}$.

CORRIGÉ

Même unité. $8\ \text{m} = 800\ \text{cm}$.

Rapport. On divise le diamètre de la maquette par celui du bassin :

$$k = \frac{20}{800} = \frac{1}{40}$$

Nature. Le nombre k est compris entre 0 et 1.

Conclusion. Le rapport vaut $k = \dfrac{1}{40}$: la maquette est une réduction du bassin.

3. 0,5 pts

Calculer la profondeur de la maquette en centimètres.

INDICE

Outil : une longueur est multipliée par k.

CORRIGÉ

La profondeur du bassin vaut $1\ \text{m}$, soit $100\ \text{cm}$. C'est une longueur, multipliée par k :

$$100 \times \frac{1}{40} = 2{,}5\ \text{cm}$$

Conclusion. La maquette a une profondeur de $2{,}5\ \text{cm}$.

4. 1 pts

En utilisant k^3, calculer la valeur exacte du volume de la maquette en cm^3. Contrôler ce résultat par un calcul direct.

INDICE

Outil : un volume est multiplié par k^3.

Début : $1\ \text{m}^3 = 1\,000\,000\ \text{cm}^3$.

Point délicat : calcule $40^3 = 40 \times 40 \times 40$.

CORRIGÉ

Conversion. Comme $1\ \text{m}^3 = 1\,000\,000\ \text{cm}^3$:

$$\begin{aligned} &16\pi\ \text{m}^3 \\ &= 16\,000\,000\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Coefficient. On a $k^3 = \left(\frac{1}{40}\right)^3$. Or $40 \times 40 \times 40 = 64\,000$, donc $k^3 = \frac{1}{64\,000}$.

Avec k^3. Le volume de la maquette vaut :

$$\begin{aligned} &16\,000\,000\pi \times \frac{1}{64\,000} \\ &= 250\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Contrôle. La maquette est un cylindre de rayon $10\ \text{cm}$, moitié de $20\ \text{cm}$, et de profondeur $2{,}5\ \text{cm}$ (question 3) :

$$\begin{aligned} &\pi \times 10^2 \times 2{,}5 \\ &= 250\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Conclusion. La maquette a un volume exact de $250\pi\ \text{cm}^3$; le calcul direct donne le même résultat.

5. 1 pts

Un autre bassin est un agrandissement du premier. Son fond a une aire de $36\pi\ \mathrm{m}^2$. En déduire le rapport d'agrandissement, puis le volume de ce bassin : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Début : le fond du premier bassin a une aire de $16\pi\ \mathrm{m}^2$.

Outil : le quotient des aires vaut k^2.

CORRIGÉ

Rapport. Le fond du premier bassin est un disque de rayon $4\ \mathrm{m}$, d'aire $16\pi\ \mathrm{m}^2$. Le quotient des aires des fonds vaut k^2 :

$$\frac{36\pi}{16\pi} = \frac{9}{4}$$

Donc $k^2 = \dfrac{9}{4}$. Or $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$, et k est positif : $k = \dfrac{3}{2}$.

Volume. Le volume est multiplié par k^3 :

$$\begin{aligned} V &= 16\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\ &= 16\pi \times \frac{27}{8} \\ &= 54\pi\ \mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

La calculatrice donne $54\pi \approx 169{,}65$.

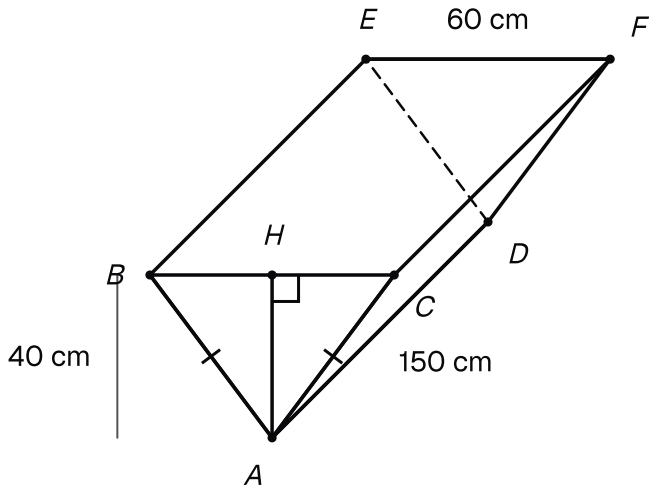
Conclusion. Le rapport d'agrandissement vaut $k = \dfrac{3}{2}$, et ce bassin a un volume de $54\pi\ \mathrm{m}^3$, soit environ $169{,}6\ \mathrm{m}^3$, arrondi au dixième.

Exercice 4 5 pts

Un abreuvoir et son niveau d'eau

Un abreuvoir en tôle, sans couvercle, a la forme d'un prisme droit $ABCDEF$. Ses bases sont les triangles ABC et DEF, isocèles en A et en D. Les arêtes $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont perpendiculaires aux bases et mesurent $150\ \text{cm}$. L'abreuvoir est posé sur des supports, l'arête $[AD]$ en bas ; la face $BCFE$, horizontale, est l'ouverture.

On donne $BC = 60\ \text{cm}$. Le point H est le milieu de $[BC]$, et $[AH]$ est la hauteur du triangle ABC issue de A : la droite (AH) est perpendiculaire à (BC) et $AH = 40\ \text{cm}$. Dessine l'abreuvoir sur ton cahier.



L'abreuvoir ABCDEF posé l'arête [AD] en bas : la face avant ABC est isocèle en A, avec BC = 60 cm, H milieu de [BC] et AH = 40 cm ; les arêtes latérales mesurent 150 cm.

1. 1,5 pts

Calculer l'aire du triangle ABC, puis le volume de l'abreuvoir en cm^3 et en litres.

INDICE

Outil : $V = B \times h$, où B est l'aire d'une base et h la longueur d'une arête latérale.

Ensuite : $1\ \mathrm{L} = 1\,000\ \mathrm{cm}^3$.

CORRIGÉ

Base. Le segment $[AH]$ est la hauteur du triangle ABC relative au côté $[BC]$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{BC \times AH}{2} \\ &= \frac{60 \times 40}{2} \\ &= 1\,200\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Volume. La hauteur du prisme est la longueur d'une arête latérale, $150\ \mathrm{cm}$:

$$\begin{aligned} V &= 1\,200 \times 150 \\ &= 180\,000\ \mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

Litres. On divise par $1\,000$: cela fait $180\ \mathrm{dm}^3$, c'est-à-dire $180\ \mathrm{L}$.

Conclusion. Le triangle ABC a une aire de $1\,200\ \mathrm{cm}^2$, et l'abreuvoir a un volume de $180\,000\ \mathrm{cm}^3$, soit $180\ \mathrm{L}$.

2. 1 pts

Calculer la longueur AB.

INDICE

Outil : le triangle ABH est rectangle en H.

Point délicat : BH est la moitié de BC.

CORRIGÉ

Angle droit. La droite (AH) est perpendiculaire à (BC) : le triangle ABH est rectangle en H, d'hypoténuse $[AB]$.

Longueur BH. Le point H est le milieu de $[BC]$, donc $BH = 60 \div 2 = 30\ \mathrm{cm}$.

Calcul. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ &= 1\,600 + 900 \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Conclusion. $AB = 50\ \mathrm{cm}$, car $50^2 = 2\,500$.

3. 0,5 pts

En déduire l'aire de tôle de l'abreuvoir : les deux faces rectangulaires $ABED$ et $ACFD$, et les deux bases.

INDICE

Début : la face $ABED$ est un rectangle de côtés AB et AD.

Point délicat : $AC = AB$, car le triangle ABC est isocèle en A.

CORRIGÉ

Faces rectangulaires. Le triangle ABC est isocèle en A, donc $AC = AB = 50\ \text{cm}$. Les faces $ABED$ et $ACFD$ sont des rectangles de côtés $50\ \text{cm}$ et $150\ \text{cm}$. Chacune a pour aire :

$$50 \times 150 = 7\,500\ \text{cm}^2$$

Total. La face $BCFE$ est l'ouverture : elle ne compte pas. On ajoute les deux bases, d'aire $1\,200\ \text{cm}^2$ chacune :

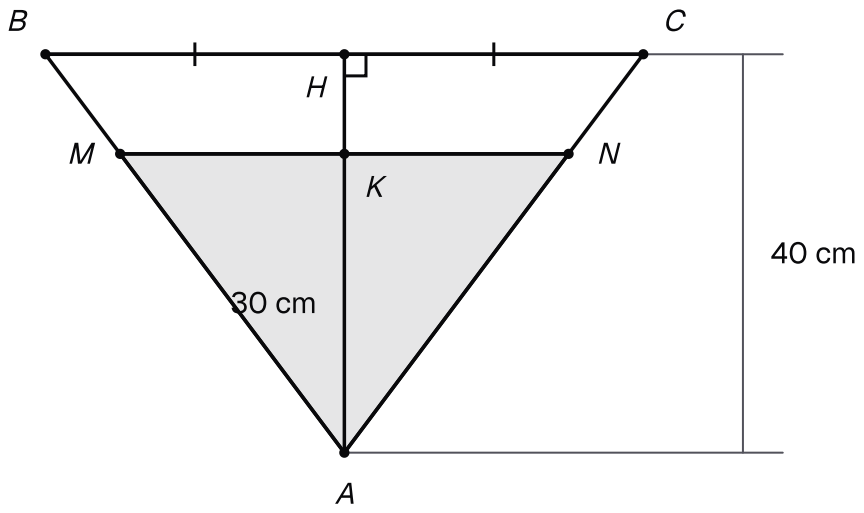
$$\begin{aligned} &2 \times 7\,500 + 2 \times 1\,200 \\ &= 15\,000 + 2\,400 \\ &= 17\,400\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Mètres carrés. Comme $1\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$, on divise par $10\,000$.

Conclusion. L'abreuvoir demande $17\,400\ \text{cm}^2$ de tôle, soit $1{,}74\ \text{m}^2$.

4. 1 pts

On verse de l'eau dans l'abreuvoir. Dans la face avant ABC, la surface de l'eau est le segment $[MN]$, avec M sur $[AB]$, N sur $[AC]$ et (MN) parallèle à (BC). Le segment $[MN]$ coupe $[AH]$ en K, et la profondeur de l'eau est $AK = 30\ \text{cm}$. Calculer KM avec le théorème de Thalès. En déduire la largeur MN de la surface de l'eau.



Dans la face avant ABC, la surface de l'eau est [MN], parallèle à [BC] ; elle coupe [AH] en K, avec AK = 30 cm.

INDICE

Outil : dans le triangle ABH, les droites (KM) et (HB) sont parallèles.

Point délicat : fais de même dans le triangle ACH, puis additionne.

CORRIGÉ

Parallèles. Dans le triangle ABH, le point K est sur $[AH]$ et M sur $[AB]$. La droite (KM) est parallèle à (HB), car (MN) est parallèle à (BC).

Thalès. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{KM}{HB} = \frac{AK}{AH} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

Avec $HB = 30\ \text{cm}$:

$$KM = 30 \times \frac{3}{4} = 22{,}5\ \text{cm}$$

Largeur. De même, dans le triangle ACH, avec $HC = 30\ \text{cm}$, on obtient $KN = 22{,}5\ \text{cm}$. Le point K est sur $[MN]$, donc :

$$\begin{aligned} MN &= 22{,}5 + 22{,}5 \\ &= 45\ \text{cm} \end{aligned}$$

Conclusion. $KM = 22{,}5\ \text{cm}$, et la surface de l'eau a une largeur de $45\ \text{cm}$.

5. 1 pts

Le fermier affirme : « L'eau monte aux trois quarts de la hauteur, donc l'abreuvoir est rempli aux trois quarts. » Calculer le volume d'eau en litres, puis dire si le fermier a raison.

INDICE

Début : quelle forme a l'eau dans l'abreuvoir ? Cherche sa base dans la face avant.

Point délicat : compare des fractions de la capacité, pas des hauteurs.

CORRIGÉ

Forme de l'eau. L'eau occupe un prisme droit de longueur $150\ \text{cm}$, dont la base est le triangle AMN.

Aire de la base. La droite (AK) est perpendiculaire à (MN), car (AH) est perpendiculaire à (BC) et (MN) est parallèle à (BC). Le segment $[AK]$ est donc la hauteur du triangle AMN issue de A :

$$\begin{aligned}&\frac{MN \times AK}{2}\\ &= \frac{45 \times 30}{2}\\ &= 675\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

Volume d'eau. On multiplie par la longueur du prisme :

$$\begin{aligned}&675 \times 150\\ &= 101\,250\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

soit $101{,}25\ \text{L}$.

Comparaison. L'abreuvoir contient $180\ \text{L}$ quand il est plein (question 1) :

$$\frac{101{,}25}{180} = \frac{9}{16}$$

Les trois quarts valent $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, et $\frac{9}{16} < \frac{12}{16}$.

Contrôle. D'après le théorème de Thalès dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned}\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} &= \frac{MN}{BC}\\ &= \frac{45}{60} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC de rapport $k = \frac{3}{4}$. Son aire est multipliée par $k^2 = \frac{9}{16}$, et l'on retrouve $1\,200 \times \frac{9}{16} = 675$. La longueur du prisme ne change pas : le volume d'eau est multiplié par k^2, pas par k^3.

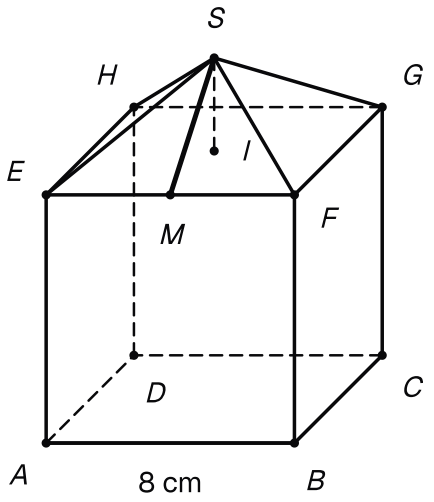
Conclusion. Le volume d'eau vaut $101{,}25\ \text{L}$: le fermier a tort, l'abreuvoir n'est rempli qu'aux neuf seizièmes.

Exercice 5 — 5 pts

Un trophée en verre

Un trophée en verre plein est formé d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête $8\ \text{cm}$, posé sur sa face $ABCD$, et d'une pyramide régulière $SEFGH$ collée sur la face $EFGH$. La base de la pyramide est le carré $EFGH$, de centre I, et sa hauteur est $[SI]$: la droite (SI) est perpendiculaire à la face $EFGH$.

Les quatre faces latérales de la pyramide sont des triangles isocèles identiques. Le point M est le milieu de $[EF]$, et $[SM]$ est la hauteur du triangle SEF issue de S, avec $SM = 5\ \text{cm}$. Dessine le trophée sur ton cahier.



Le trophée : le cube ABCDEFGH de 8 cm d'arête, posé sur ABCD, et la pyramide SEFGH collée sur la face du haut, avec I centre de EFGH, M milieu de [EF] et SM = 5 cm.

1. — 1,5 pts

Calculer le volume du cube en cm^3, puis en dm^3.

INDICE

Outil : le volume d'un cube d'arête a vaut $a \times a \times a$.

Ensuite : $1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.

CORRIGÉ

Le volume d'un cube d'arête a vaut $a \times a \times a$. Avec $a = 8\ \text{cm}$:

$$\begin{aligned} V &= 8 \times 8 \times 8 \\ &= 512\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Comme $1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$, on divise par $1\,000$.

Conclusion. Le cube a un volume de $512\ \text{cm}^3$, soit $0{,}512\ \text{dm}^3$.

2. 1 pts

Calculer l'aire latérale de la pyramide $SEFGH$.

INDICE

Outil : l'aire du triangle SEF vaut $\dfrac{EF \times SM}{2}$.

Point délicat : $[SM]$ est la hauteur d'une face, pas celle de la pyramide.

CORRIGÉ

Une face. Le triangle SEF a pour base $EF = 8\ \text{cm}$ et pour hauteur $SM = 5\ \text{cm}$. Son aire vaut :

$$\frac{8 \times 5}{2} = 20\ \text{cm}^2$$

Quatre faces. Les quatre faces latérales sont identiques :

$$4 \times 20 = 80\ \text{cm}^2$$

Conclusion. L'aire latérale de la pyramide $SEFGH$ vaut $80\ \text{cm}^2$.

3. 0,5 pts

En déduire l'aire de la surface extérieure du trophée, face posée sur la table comprise.

INDICE

Point délicat : la face $EFGH$ du cube est cachée sous la pyramide : elle ne compte pas.

CORRIGÉ

Faces du cube. La face $EFGH$ est cachée sous la pyramide. Le cube montre donc cinq faces carrées, dont celle posée sur la table. Chacune a pour aire $8 \times 8 = 64\ \text{cm}^2$:

$$5 \times 64 = 320\ \text{cm}^2$$

Pyramide. On ajoute l'aire latérale trouvée à la question 2 :

$$320 + 80 = 400\ \text{cm}^2$$

Conclusion. La surface extérieure du trophée a une aire de $400\ \text{cm}^2$.

4. 1 pts

Justifier que le triangle SIM est rectangle en I. En déduire la hauteur SI de la pyramide, puis le volume du trophée.

INDICE

Outil : la droite (SI) est perpendiculaire à la face $EFGH$.

Début : I est le centre du carré et M le milieu de $[EF]$; calcule d'abord IM.

CORRIGÉ

Angle droit. La droite (SI) est perpendiculaire à la face $EFGH$, qui contient la droite (IM). Le triangle SIM est donc rectangle en I, d'hypoténuse $[SM]$.

Longueur IM. I est le centre du carré $EFGH$ et M le milieu du côté $[EF]$: IM est la moitié du côté, $IM = 8 \div 2 = 4\ \text{cm}$.

Hauteur. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} SI^2 &= SM^2 - IM^2 \\ &= 25 - 16 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Donc $SI = 3\ \text{cm}$.

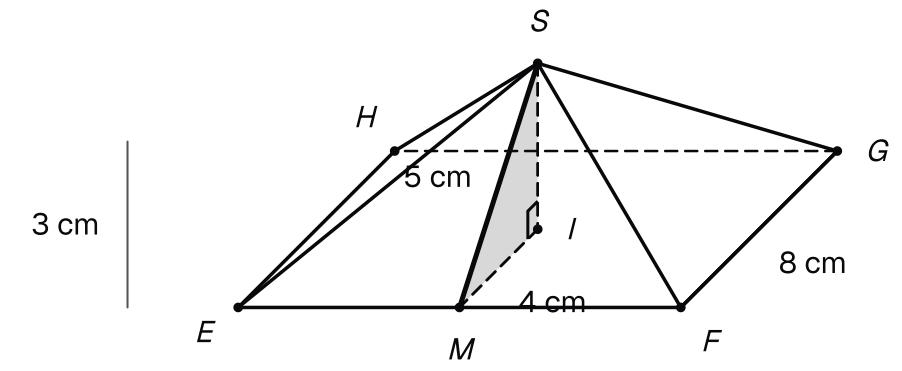
Volume. La pyramide a pour base le carré $EFGH$, d'aire $64\ \text{cm}^2$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \times 64 \times 3 \\ &= 64\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Le trophée réunit le cube et la pyramide :

$$512 + 64 = 576\ \text{cm}^3$$

Conclusion. Le triangle SIM est rectangle en I, la pyramide a pour hauteur $SI = 3\ \text{cm}$, et le trophée a un volume de $576\ \text{cm}^3$.



La pyramide SEFGH du trophée, dessinée seule : le triangle SIM est rectangle en I, avec IM = 4 cm, SM = 5 cm et SI = 3 cm.

5. 1 pts

Un autre modèle garde le même cube et une pyramide régulière de même base $EFGH$, mais plus haute : cet objet a un volume de $640\ \text{cm}^3$. Quelle est la hauteur de sa pyramide ?

INDICE

Début : retire d'abord le volume du cube.

Point délicat : écris le volume de la pyramide avec sa hauteur h, inconnue, sans oublier le tiers.

CORRIGÉ

Volume de la pyramide. On retire le volume du cube : $640 - 512 = 128\ \text{cm}^3$.

Équation. Soit h la hauteur de la nouvelle pyramide, en centimètres. Sa base mesure toujours $64\ \text{cm}^2$, donc :

$$\frac{1}{3} \times 64 \times h = 128$$

Résolution. On multiplie les deux membres par 3, car $3 \times 128 = 384$:

$$64 \times h = 384$$

Puis on divise les deux membres par 64 :

$$h = 384 \div 64 = 6\ \text{cm}$$

Contrôle. $\frac{1}{3} \times 64 \times 6 = 128$, et $512 + 128 = 640\ \text{cm}^3$.

Conclusion. La pyramide de cet autre modèle a une hauteur de $6\ \text{cm}$.