BURHAN

Calcul des volumes : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/calcul-des-volumes/exercices/entrainement

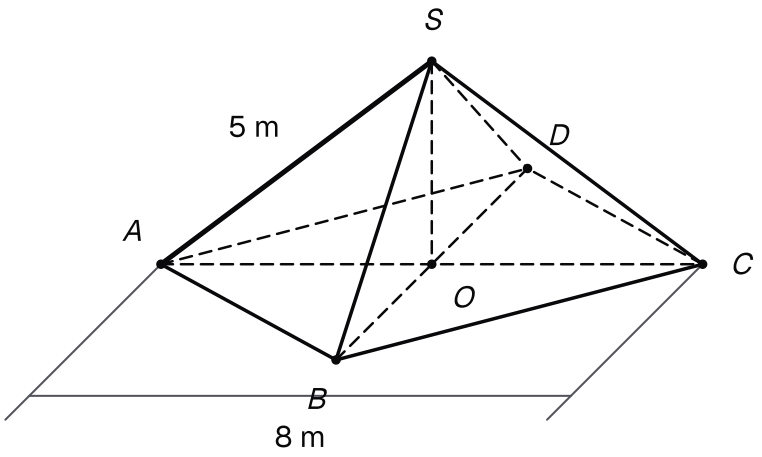
Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des volumes	Entraînement	7

Exercice 1

Le toit pyramidal d'un kiosque

Le toit d'un kiosque est une pyramide régulière $SABCD$. Une pyramide **régulière** a pour base un polygone régulier, comme un carré, et sa hauteur aboutit au centre de cette base.

Ici, la base est un carré $ABCD$ de centre O, et la hauteur est $[SO]$. On sait que $AC = 8\ \text{m}$ et que chaque arête latérale mesure $SA = 5\ \text{m}$. Dessine la pyramide sur ton cahier.



Le toit du kiosque : la pyramide régulière SABCD, de base le carré ABCD de centre O, avec AC = 8 m et SA = 5 m.

1.

Calculer OA.

INDICE

Outil : les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu.

2.

Justifier que le triangle SOA est rectangle en O. En déduire la hauteur SO.

INDICE

Outil : la hauteur (SO) est perpendiculaire au plan de la base.

Début : l'hypoténuse est l'arête $[SA]$.

3.

Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. Calculer AB^2, puis l'aire du carré $ABCD$.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

Point délicat : $AB = BC$, et l'aire du carré vaut AB^2.

4.

Calculer le volume du toit.

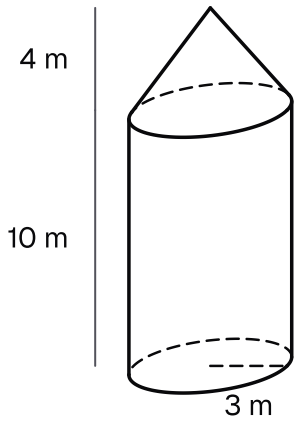
INDICE

Outil : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$, avec les questions 2 et 3.

Exercice 2

Un silo formé d'un cylindre et d'un cône

Un silo est formé d'un cylindre de révolution de rayon $3\ \mathrm{m}$ et de hauteur $10\ \mathrm{m}$. Il est surmonté d'un cône de révolution de même rayon et de hauteur $4\ \mathrm{m}$.



Le silo : un cylindre de rayon 3 m et de hauteur 10 m, surmonté d'un toit conique de même rayon et de hauteur 4 m.

1.

Calculer la valeur exacte du volume de la partie cylindrique.

INDICE

Outil : $V = \pi r^2 h$.

2.

Calculer la valeur exacte du volume du cône.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Point délicat : la hauteur du cône est $4\ \mathrm{m}$, pas $14\ \mathrm{m}$.

3.

En déduire le volume du silo : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Début : additionne les valeurs exactes.

Point délicat : n'arrondis qu'à la fin.

4.

Le toit conique est recouvert de tôle. Calculer la longueur d'une génératrice du cône, puis l'aire de tôle : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : appelle S le sommet du cône, O le centre de sa base et M un point du cercle ; utilise le triangle SOM.

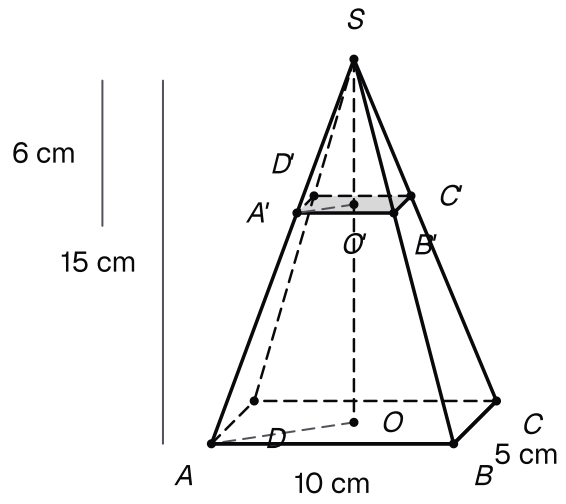
Ensuite : l'aire latérale d'un cône vaut $\pi r a$.

Exercice 3

Une pyramide de bois coupée

Un artisan taille une pyramide de bois $SABCD$. Sa base est un rectangle $ABCD$ de centre O, avec $AB = 10\ \text{cm}$ et $BC = 5\ \text{cm}$. Sa hauteur est $SO = 15\ \text{cm}$.

Il scie la pyramide parallèlement à sa base. Le trait de scie passe par le point O' de $[SO]$ tel que $SO' = 6\ \text{cm}$. La section est le rectangle $A'B'C'D'$, avec A' sur $[SA]$ et B' sur $[SB]$.



La pyramide de bois SABCD, de base le rectangle ABCD de 10 cm sur 5 cm, de hauteur SO = 15 cm, sciée au niveau de O', avec SO' = 6 cm.

1.

Calculer le rapport de réduction k.

INDICE

Outil : $k = \dfrac{SO'}{SO}$.

2.

Calculer $\dfrac{SA'}{SA}$ avec le théorème de Thalès dans le triangle SOA. Dans la face SAB, les droites $(A'B')$ et (AB) sont parallèles : en déduire $A'B'$.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès, deux fois.

Début : dans le triangle SOA, les droites $(O'A')$ et (OA) sont parallèles : la section est dans un plan parallèle au plan de base.

3.

Calculer l'aire de la base $ABCD$, puis celle de la section.

INDICE

Outil : les aires sont multipliées par k^2.

Début : $k^2 = \dfrac{4}{25}$.

4.

Calculer le volume de la grande pyramide, celui de la petite pyramide $SA'B'C'D'$, puis celui du tronc.

INDICE

Outil : les volumes sont multipliés par $k^3 = \dfrac{8}{125}$.

Point délicat : le tronc est la différence des deux pyramides.

Exercice 4

Des bouteilles et des boîtes de même forme

Une petite bouteille de $250\ \text{mL}$ et une grande bouteille de $2\ \text{L}$ ont exactement la même forme : la grande est un agrandissement de la petite.

1.

Calculer le quotient du volume de la grande bouteille par celui de la petite. En déduire le rapport d'agrandissement k.

INDICE

Début : écris les deux volumes dans la même unité.

Outil : ce quotient vaut k^3.

2.

La petite bouteille mesure $12\ \text{cm}$ de haut, et son étiquette a une aire de $45\ \text{cm}^2$. Calculer la hauteur de la grande bouteille et l'aire de son étiquette.

INDICE

Outil : longueurs multipliées par k, aires par k^2.

3.

Deux boîtes ont la même forme. Le fond de la petite a une aire de $36\ \text{cm}^2$, celui de la grande $100\ \text{cm}^2$.

La petite mesure $9\ \text{cm}$ de haut. Calculer la hauteur de la grande.

INDICE

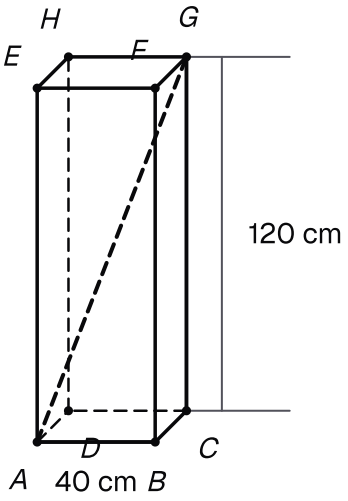
Outil : le quotient des aires vaut k^2.

Point délicat : cherche le nombre positif dont le carré vaut ce quotient.

Exercice 5

Une canne à pêche dans un carton

Un carton est un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. On a $AB = 40\ \text{cm}$, $BC = 30\ \text{cm}$ et $CG = 120\ \text{cm}$. L'arête $[CG]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$.



Le carton ABCDEFGH : AB = 40 cm, BC = 30 cm, CG = 120 cm, et le segment [AG] qui le traverse.

1.

Calculer la diagonale AC de la face $ABCD$.

INDICE

Outil : le triangle ABC est rectangle en B.

2.

Justifier que le triangle ACG est rectangle en C. En déduire la longueur AG.

INDICE

Outil : une arête perpendiculaire à une face est perpendiculaire à toute droite de cette face.

Début : la droite (AC) est dans la face $ABCD$.

3.

Une canne à pêche rigide mesure $1{,}25\ \text{m}$. Peut-on la ranger dans le carton fermé ?

INDICE

Début : convertis en centimètres.

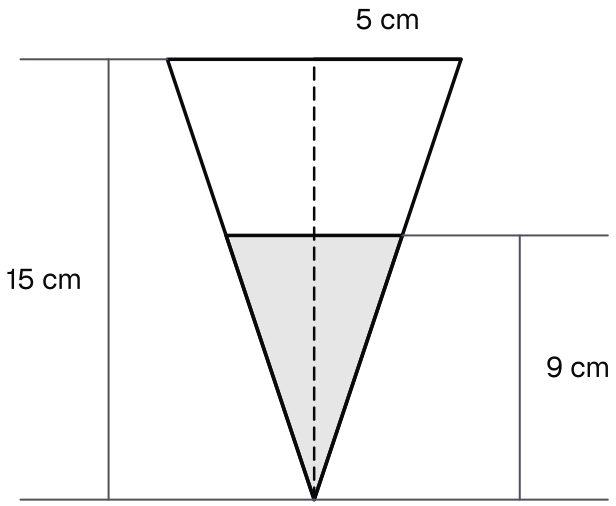
Point délicat : le plus long segment à l'intérieur du carton est sa grande diagonale.

Exercice 6

Un verre conique rempli aux trois cinquièmes de sa hauteur

Un verre a la forme d'un cône de révolution, pointe en bas. Son rayon mesure $5\ \text{cm}$ et sa profondeur $15\ \text{cm}$.

On y verse du jus jusqu'à $9\ \text{cm}$ de hauteur. Le jus forme un petit cône, réduction du verre.



Le verre vu de face, pointe en bas : rayon 5 cm, profondeur 15 cm, et le jus, teinté, jusqu'à 9 cm de hauteur.

1.

Calculer le volume du verre : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

2.

Calculer le rapport de réduction k, puis le rayon de la surface du jus.

INDICE

Outil : k est le quotient des hauteurs.

Début : $\dfrac{9}{15}$ se simplifie.

3.

En déduire le volume de jus : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième. Le verre est-il à moitié plein ?

INDICE

Outil : le volume est multiplié par k^3.

Point délicat : compare k^3 à $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 7

Agrandir un cylindre : une preuve courte

Un cylindre de révolution a un rayon r et une hauteur h. Son volume est $V = \pi r^2 h$. On l'agrandit dans le rapport k, où k est un nombre strictement positif : le nouveau cylindre a pour rayon kr et pour hauteur kh.

1.

Démontrer que le volume V' du nouveau cylindre vérifie $V' = k^3 V$.

INDICE

Outil : la formule du cylindre, avec le rayon kr et la hauteur kh.

Point délicat : $(kr)^2 = k^2 r^2$.

2.

Démontrer de même que l'aire latérale est multipliée par k^2.

INDICE

Outil : l'aire latérale d'un cylindre vaut $2\pi r h$.

Début : remplace r par kr et h par kh.

3.

Une canette a un rayon de $3\ \text{cm}$ et une hauteur de $7\ \text{cm}$. On double ses dimensions. Calculer les deux volumes et vérifier le résultat de la question 1.

INDICE

Début : ici $k = 2$.

Ensuite : calcule 2^3.