BURHAN

Calcul des volumes : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/calcul-des-volumes/exercices/entrainement

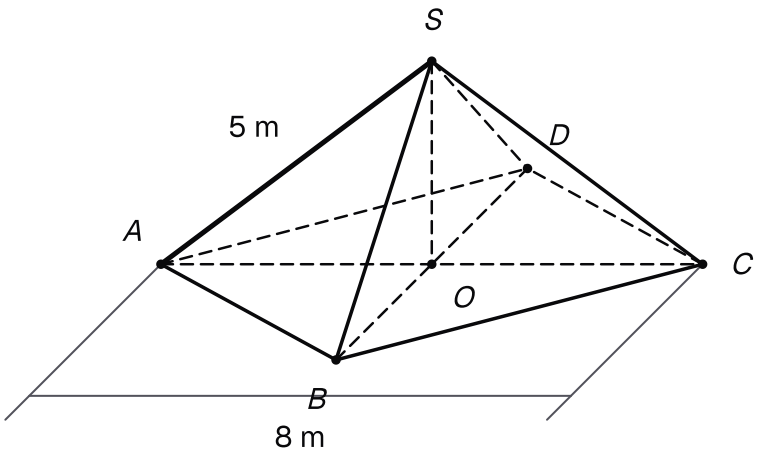
Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des volumes	Entraînement	7

Exercice 1

Le toit pyramidal d'un kiosque

Le toit d'un kiosque est une pyramide régulière $SABCD$. Une pyramide **régulière** a pour base un polygone régulier, comme un carré, et sa hauteur aboutit au centre de cette base.

Ici, la base est un carré $ABCD$ de centre O, et la hauteur est $[SO]$. On sait que $AC = 8\ \text{m}$ et que chaque arête latérale mesure $SA = 5\ \text{m}$. Dessine la pyramide sur ton cahier.



Le toit du kiosque : la pyramide régulière SABCD, de base le carré ABCD de centre O, avec AC = 8 m et SA = 5 m.

1.

Calculer OA.

INDICE

Outil : les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu.

CORRIGÉ

Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, qui est le centre du carré. Le point O est donc le milieu de $[AC]$:

$$OA = 8 \div 2 = 4\ \text{m}$$

Conclusion. $OA = 4\ \text{m}$.

2.

Justifier que le triangle SOA est rectangle en O. En déduire la hauteur SO.

INDICE

Outil : la hauteur (SO) est perpendiculaire au plan de la base.

Début : l'hypoténuse est l'arête $[SA]$.

CORRIGÉ

Angle droit. La hauteur (SO) est perpendiculaire au plan de la base, et ce plan contient la droite (OA). Le triangle SOA est donc rectangle en O.

Théorème de Pythagore. L'hypoténuse est l'arête $[SA]$. On a $SA^2 = 25$ et $OA^2 = 16$:

$$\begin{aligned} SO^2 &= SA^2 - OA^2 \\ &= 25 - 16 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Conclusion. Le triangle SOA est rectangle en O, et la hauteur du toit vaut $SO = 3\ \text{m}$, car $3^2 = 9$.

3.

Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. Calculer AB^2, puis l'aire du carré $ABCD$.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

Point délicat : $AB = BC$, et l'aire du carré vaut AB^2.

CORRIGÉ

Théorème de Pythagore. Le triangle ABC est rectangle en B, d'hypoténuse $[AC]$:
$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Côtés égaux. Il est aussi isocèle en B, donc $AB = BC$. Avec $AC^2 = 8^2 = 64$, l'égalité devient :

$$2 \times AB^2 = 64$$

En divisant les deux membres par 2, on obtient $AB^2 = 32$.

Aire. Le carré $ABCD$ a pour côté AB : son aire vaut AB^2.

Conclusion. $AB^2 = 32$, et l'aire du carré $ABCD$ vaut $AB^2 = 32\ \text{m}^2$.

4.

Calculer le volume du toit.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$, avec les questions 2 et 3.

CORRIGÉ

La base a pour aire $32\ \mathrm{m}^2$ (question 3), et la hauteur vaut $3\ \mathrm{m}$ (question 2). Le volume d'une pyramide vaut $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$:

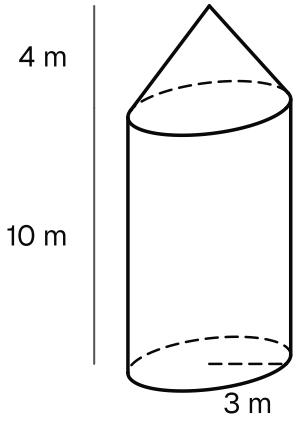
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 32 \times 3 \\ &= 32\ \mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Conclusion. Le toit du kiosque a un volume de $32\ \mathrm{m}^3$.

Exercice 2

Un silo formé d'un cylindre et d'un cône

Un silo est formé d'un cylindre de révolution de rayon $3\ \mathrm{m}$ et de hauteur $10\ \mathrm{m}$. Il est surmonté d'un cône de révolution de même rayon et de hauteur $4\ \mathrm{m}$.



Le silo : un cylindre de rayon 3 m et de hauteur 10 m, surmonté d'un toit conique de même rayon et de hauteur 4 m.

1.

Calculer la valeur exacte du volume de la partie cylindrique.

INDICE

Outil : $V = \pi r^2 h$.

CORRIGÉ

Le volume d'un cylindre vaut $V = \pi r^2 h$, avec ici $r = 3\ \mathrm{m}$ et $h = 10\ \mathrm{m}$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \times 3^2 \times 10 \\ &= 90\pi\ \mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Conclusion. La partie cylindrique a un volume exact de $90\pi\ \mathrm{m}^3$.

2.

Calculer la valeur exacte du volume du cône.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Point délicat : la hauteur du cône est $4\ \text{m}$, pas $14\ \text{m}$.

CORRIGÉ

Le cône a le même rayon que le cylindre, $3\ \text{m}$, et une hauteur de $4\ \text{m}$. Avec $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 \\ &= \frac{36\pi}{3} \\ &= 12\pi\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

Conclusion. Le cône a un volume exact de $12\pi\ \text{m}^3$.

3.

En déduire le volume du silo : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Début : additionne les valeurs exactes.

Point délicat : n'arrondis qu'à la fin.

CORRIGÉ

Somme. Le silo réunit les deux solides : son volume est la somme de leurs volumes. On ajoute les valeurs exactes :

$$\begin{aligned} V &= 90\pi + 12\pi \\ &= 102\pi\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

Valeur approchée. On n'arrondit qu'à la fin : $102\pi \approx 320{,}44$.

Conclusion. Le silo a un volume de $102\pi\ \text{m}^3$, soit environ $320{,}4\ \text{m}^3$, arrondi au dixième.

4.

Le toit conique est recouvert de tôle. Calculer la longueur d'une génératrice du cône, puis l'aire de tôle : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : appelle S le sommet du cône, O le centre de sa base et M un point du cercle ; utilise le triangle SOM.

Ensuite : l'aire latérale d'un cône vaut $\pi r a$.

CORRIGÉ

Notations. Soit S le sommet du cône, O le centre de sa base et M un point du cercle de base. Le segment $[SM]$ est une génératrice.

Angle droit. La hauteur (SO) est perpendiculaire à la base, qui contient la droite (OM). Le triangle SOM est donc rectangle en O, avec $SO = 4\ \text{m}$ et $OM = 3\ \text{m}$.

Génératrice. D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse étant $[SM]$:

$$\begin{aligned} SM^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Donc $SM = 5\ \text{m}$.

Tôle. L'aire de tôle est l'aire latérale du cône, $\pi r a$, avec $r = 3\ \text{m}$ et $a = 5\ \text{m}$:

$$\pi \times 3 \times 5 = 15\pi\ \text{m}^2$$

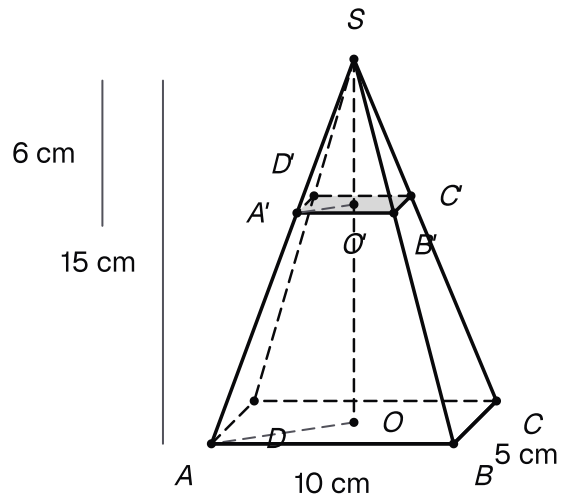
Conclusion. Une génératrice mesure $5\ \text{m}$, et l'aire de tôle vaut $15\pi\ \text{m}^2$, soit environ $47{,}1\ \text{m}^2$, arrondie au dixième.

Exercice 3

Une pyramide de bois coupée

Un artisan taille une pyramide de bois $SABCD$. Sa base est un rectangle $ABCD$ de centre O, avec $AB = 10\ \text{cm}$ et $BC = 5\ \text{cm}$. Sa hauteur est $SO = 15\ \text{cm}$.

Il scie la pyramide parallèlement à sa base. Le trait de scie passe par le point O' de $[SO]$ tel que $SO' = 6\ \text{cm}$. La section est le rectangle $A'B'C'D'$, avec A' sur $[SA]$ et B' sur $[SB]$.



La pyramide de bois SABCD, de base le rectangle ABCD de 10 cm sur 5 cm, de hauteur SO = 15 cm, sciée au niveau de O', avec SO' = 6 cm.

1.

Calculer le rapport de réduction k.

INDICE

Outil : $k = \dfrac{SO'}{SO}$.

CORRIGÉ

La petite pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de la grande. Le rapport est le quotient de leurs hauteurs SO' et SO :

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

On a simplifié la fraction par 3.

Conclusion. Le rapport de réduction vaut $k = \dfrac{2}{5}$.

2.

Calculer $\frac{SA'}{SA}$ avec le théorème de Thalès dans le triangle SOA. Dans la face SAB, les droites $(A'B')$ et (AB) sont parallèles : en déduire $A'B'$.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès, deux fois.

Début : dans le triangle SOA, les droites $(O'A')$ et (OA) sont parallèles : la section est dans un plan parallèle au plan de base.

CORRIGÉ

Triangle SOA. Le point O' est sur $[SO]$ et A' sur $[SA]$. Les droites $(O'A')$ et (OA) sont parallèles, car la section est dans un plan parallèle au plan de base. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{2}{5}$$

Face SAB. Le point A' est sur $[SA]$, B' sur $[SB]$, et $(A'B')$ est parallèle à (AB). Le théorème de Thalès dans le triangle SAB donne :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{2}{5}$$

Longueur. On multiplie AB par ce quotient :

$$A'B' = 10 \times \frac{2}{5} = 4 \text{ cm}$$

Conclusion. $\frac{SA'}{SA} = \frac{2}{5}$ et $A'B' = 4$ cm.

3.

Calculer l'aire de la base $ABCD$, puis celle de la section.

INDICE

Outil : les aires sont multipliées par k^2.

Début : $k^2 = \frac{4}{25}$.

CORRIGÉ

Base. La base $ABCD$ est un rectangle : son aire vaut $10 \times 5 = 50$ cm^2.

Section. La section est la base réduite dans le rapport $k = \frac{2}{5}$. Son aire est donc multipliée par $k^2 = \frac{4}{25}$:

$$50 \times \frac{4}{25} = 8 \text{ cm}^2$$

Contrôle. De même, $B'C' = 5 \times \frac{2}{5} = 2$ cm. La section est un rectangle de côtés 4 cm et 2 cm, et $4 \times 2 = 8$.

Conclusion. La base a une aire de 50 cm^2, et la section une aire de 8 cm^2.

4.

Calculer le volume de la grande pyramide, celui de la petite pyramide $SA'B'C'D'$, puis celui du tronc.

INDICE

Outil : les volumes sont multipliés par $k^3 = \dfrac{8}{125}$.

Point délicat : le tronc est la différence des deux pyramides.

CORRIGÉ

Grande pyramide. Sa base a une aire de $50\ \text{cm}^2$ et sa hauteur mesure $15\ \text{cm}$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 50 \times 15 \\ &= 250\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Petite pyramide. C'est une réduction de rapport $k = \dfrac{2}{5}$: son volume est multiplié par $k^3 = \dfrac{8}{125}$.

$$250 \times \frac{8}{125} = 16\ \text{cm}^3$$

Tronc. Le tronc est la grande pyramide privée de la petite :

$$250 - 16 = 234\ \text{cm}^3$$

Conclusion. La grande pyramide a un volume de $250\ \text{cm}^3$, la petite de $16\ \text{cm}^3$ et le tronc de $234\ \text{cm}^3$.

Exercice 4

Des bouteilles et des boîtes de même forme

Une petite bouteille de $250\ \text{mL}$ et une grande bouteille de $2\ \text{L}$ ont exactement la même forme : la grande est un agrandissement de la petite.

1.

Calculer le quotient du volume de la grande bouteille par celui de la petite. En déduire le rapport d'agrandissement k.

INDICE

Début : écris les deux volumes dans la même unité.

Outil : ce quotient vaut k^3.

CORRIGÉ

Même unité. $2\ \text{L} = 2\,000\ \text{mL}$.

Quotient. On divise le volume de la grande bouteille par celui de la petite :

$$\frac{2\,000}{250} = 8$$

Rapport. Dans un agrandissement de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3. Donc $k^3 = 8$. Or $2^3 = 8$, et 2 est le seul nombre positif dont le cube vaut 8 : $k = 2$.

Conclusion. Le quotient des volumes vaut 8, et le rapport d'agrandissement est $k = 2$.

2.

La petite bouteille mesure $12\ \text{cm}$ de haut, et son étiquette a une aire de $45\ \text{cm}^2$. Calculer la hauteur de la grande bouteille et l'aire de son étiquette.

INDICE

Outil : longueurs multipliées par k, aires par k^2.

CORRIGÉ

Hauteur. Une longueur est multipliée par $k = 2$:

$$12 \times 2 = 24\ \text{cm}$$

Étiquette. Une aire est multipliée par k^2 :

$$\begin{aligned} &45 \times 2^2 \\ &= 45 \times 4 \\ &= 180\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Conclusion. La grande bouteille mesure $24\ \text{cm}$ de haut, et son étiquette a une aire de $180\ \text{cm}^2$.

3.

Deux boîtes ont la même forme. Le fond de la petite a une aire de $36\ \text{cm}^2$, celui de la grande $100\ \text{cm}^2$.

La petite mesure $9\ \text{cm}$ de haut. Calculer la hauteur de la grande.

INDICE

Outil : le quotient des aires vaut k^2.

Point délicat : cherche le nombre positif dont le carré vaut ce quotient.

CORRIGÉ

Rapport. La grande boîte est un agrandissement de la petite, de rapport k. Le quotient des aires des fonds vaut k^2 :

$$k^2 = \frac{100}{36} = \frac{25}{9}$$

Or $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$, et k est positif. Donc $k = \frac{5}{3}$.

Hauteur. La hauteur est une longueur, multipliée par k :

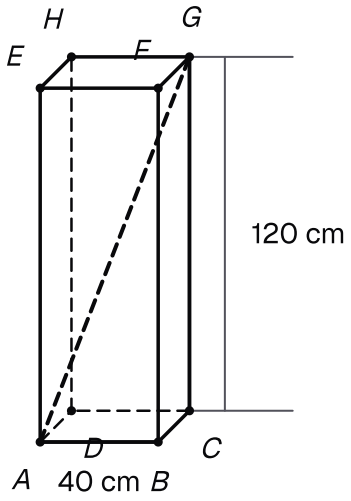
$$9 \times \frac{5}{3} = 15\ \text{cm}$$

Conclusion. La grande boîte mesure $15\ \text{cm}$ de haut.

Exercice 5

Une canne à pêche dans un carton

Un carton est un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. On a $AB = 40\ \text{cm}$, $BC = 30\ \text{cm}$ et $CG = 120\ \text{cm}$. L'arête $[CG]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$.



Le carton ABCDEFGH : AB = 40 cm, BC = 30 cm, CG = 120 cm, et le segment [AG] qui le traverse.

1.

Calculer la diagonale AC de la face $ABCD$.

INDICE

Outil : le triangle ABC est rectangle en B.

CORRIGÉ

Angle droit. La face $ABCD$ est un rectangle, donc le triangle ABC est rectangle en B, d'hypoténuse $[AC]$.

Théorème de Pythagore. On a $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc :

$$\begin{aligned} AC^2 &= 40^2 + 30^2 \\ &= 1\,600 + 900 \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Conclusion. La diagonale mesure $AC = 50\ \text{cm}$, car $50^2 = 2\,500$.

2.

Justifier que le triangle ACG est rectangle en C. En déduire la longueur AG.

INDICE

Outil : une arête perpendiculaire à une face est perpendiculaire à toute droite de cette face.

Début : la droite (AC) est dans la face $ABCD$.

CORRIGÉ

Angle droit. L'arête $[CG]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$. Elle est donc perpendiculaire à toute droite de cette face passant par C, en particulier à (AC). Le triangle ACG est rectangle en C.

Théorème de Pythagore. L'hypoténuse est $[AG]$, et $CG^2 = 120^2 = 14\,400$:

$$\begin{aligned} AG^2 &= AC^2 + CG^2 \\ &= 2\,500 + 14\,400 \\ &= 16\,900 \end{aligned}$$

Conclusion. Le triangle ACG est rectangle en C, et $AG = 130\ \text{cm}$, car $130^2 = 16\,900$.

3.

Une canne à pêche rigide mesure $1{,}25\ \text{m}$. Peut-on la ranger dans le carton fermé ?

INDICE

Début : convertis en centimètres.

Point délicat : le plus long segment à l'intérieur du carton est sa grande diagonale.

CORRIGÉ

Conversion. $1{,}25\ \text{m} = 125\ \text{cm}$.

Comparaison. Le plus long segment qui tient dans le carton fermé est sa grande diagonale $[AG]$, de longueur $130\ \text{cm}$ (question 2). Or $125 < 130$.

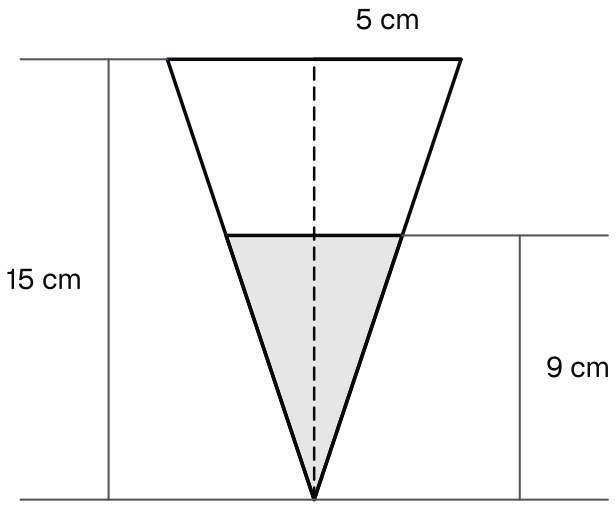
Conclusion. Oui : la canne tient dans le carton fermé, posée le long de la diagonale $[AG]$.

Exercice 6

Un verre conique rempli aux trois cinquièmes de sa hauteur

Un verre a la forme d'un cône de révolution, pointe en bas. Son rayon mesure $5\ \text{cm}$ et sa profondeur $15\ \text{cm}$.

On y verse du jus jusqu'à $9\ \text{cm}$ de hauteur. Le jus forme un petit cône, réduction du verre.



Le verre vu de face, pointe en bas : rayon 5 cm, profondeur 15 cm, et le jus, teinté, jusqu'à 9 cm de hauteur.

1.

Calculer le volume du verre : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

CORRIGÉ

Le verre est un cône de rayon $5\ \text{cm}$ et de hauteur $15\ \text{cm}$. Avec $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 15 \\ &= 125\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

En effet, $25 \times 15 = 375$ et $375 \div 3 = 125$. La calculatrice donne $125\pi \approx 392{,}70$.

Conclusion. Le verre a un volume de $125\pi\ \text{cm}^3$, soit environ $392{,}7\ \text{cm}^3$, arrondi au dixième.

2.

Calculer le rapport de réduction k, puis le rayon de la surface du jus.

INDICE

Outil : k est le quotient des hauteurs.

Début : $\dfrac{9}{15}$ se simplifie.

CORRIGÉ

Rapport. Le cône de jus a le même sommet que le verre : c'est une réduction du verre. Le rapport est le quotient des hauteurs :

$$k = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Rayon. Le rayon de la surface du jus est une longueur, multipliée par k :

$$5 \times \frac{3}{5} = 3 \text{ cm}$$

Conclusion. Le rapport vaut $k = \dfrac{3}{5}$, et la surface du jus a un rayon de 3 cm.

3.

En déduire le volume de jus : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième. Le verre est-il à moitié plein ?

INDICE

Outil : le volume est multiplié par k^3.

Point délicat : compare k^3 à $\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Volume de jus. Les volumes sont multipliés par $k^3 = \dfrac{27}{125}$:

$$125\pi \times \frac{27}{125} = 27\pi \text{ cm}^3$$

La calculatrice donne $27\pi \approx 84{,}82$.

Moitié du verre ? Le jus occupe la fraction $\dfrac{27}{125}$ du verre. Pour la comparer à $\dfrac{1}{2}$, on calcule $2 \times 27 = 54$. Comme $54 < 125$, on a $\dfrac{27}{125} < \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Le jus a un volume de 27π cm^3, soit environ $84{,}8$ cm^3, arrondi au dixième. Le verre n'est pas à moitié plein, bien que le jus monte aux trois cinquièmes de la hauteur.

Exercice 7

Agrandir un cylindre : une preuve courte

Un cylindre de révolution a un rayon r et une hauteur h. Son volume est $V = \pi r^2 h$. On l'agrandit dans le rapport k, où k est un nombre strictement positif : le nouveau cylindre a pour rayon kr et pour hauteur kh.

1.

Démontrer que le volume V' du nouveau cylindre vérifie $V' = k^3 V$.

INDICE

Outil : la formule du cylindre, avec le rayon kr et la hauteur kh.

Point délicat : $(kr)^2 = k^2 r^2$.

CORRIGÉ

Nouveau volume. Le nouveau cylindre a pour rayon kr et pour hauteur kh. D'après la formule du volume d'un cylindre :

$$\begin{aligned} V' &= \pi \times (kr)^2 \times kh \\ &= \pi \times k^2 r^2 \times kh \\ &= k^3 \times \pi r^2 h. \end{aligned}$$

On a utilisé $(kr)^2 = k^2 r^2$, puis regroupé $k^2 \times k = k^3$.

Lien avec V. Le produit $\pi r^2 h$ est le volume V du premier cylindre.

Conclusion. Le volume du nouveau cylindre vérifie $V' = k^3 V$.

2.

Démontrer de même que l'aire latérale est multipliée par k^2.

INDICE

Outil : l'aire latérale d'un cylindre vaut $2\pi r h$.

Début : remplace r par kr et h par kh.

CORRIGÉ

L'aire latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h vaut $2\pi r h$. Pour le nouveau cylindre, on remplace r par kr et h par kh :

$$\begin{aligned} &2\pi \times kr \times kh \\ &= k^2 \times 2\pi r h \end{aligned}$$

On a regroupé les deux facteurs k : $k \times k = k^2$.

Conclusion. L'aire latérale du nouveau cylindre est celle du premier multipliée par k^2.

3.

Une canette a un rayon de $3\ \text{cm}$ et une hauteur de $7\ \text{cm}$. On double ses dimensions. Calculer les deux volumes et vérifier le résultat de la question 1.

INDICE

Début : ici $k = 2$.

Ensuite : calcule 2^3.

CORRIGÉ

Canette. Son rayon mesure $3\ \text{cm}$ et sa hauteur $7\ \text{cm}$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \times 3^2 \times 7 \\ &= 63\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Canette agrandie. Doubler les dimensions revient à prendre $k = 2$: le rayon devient $6\ \text{cm}$ et la hauteur $14\ \text{cm}$.

$$\begin{aligned} V' &= \pi \times 6^2 \times 14 \\ &= 504\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Vérification. D'après la question 1, on doit avoir $V' = 2^3 \times V$:

$$\begin{aligned} &2^3 \times 63\pi \\ &= 8 \times 63\pi \\ &= 504\pi \end{aligned}$$

Conclusion. Les volumes valent $63\pi\ \text{cm}^3$ et $504\pi\ \text{cm}^3$: on retrouve bien $V' = k^3 V$ avec $k = 2$.