BURHAN

Calcul des volumes : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/calcul-des-volumes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des volumes	Application	8

Exercice 1

Reconnaître un solide et sa hauteur

Pour chaque objet, dessine d'abord le solide sur ton cahier.

1.

Une boîte a deux bases parallèles. Ce sont deux disques de rayon $4\ \text{cm}$. La droite qui joint les centres est perpendiculaire aux deux bases.

Les centres sont distants de $11\ \text{cm}$. Nommer ce solide et donner sa hauteur.

INDICE

Outil : regarde la forme des deux bases.

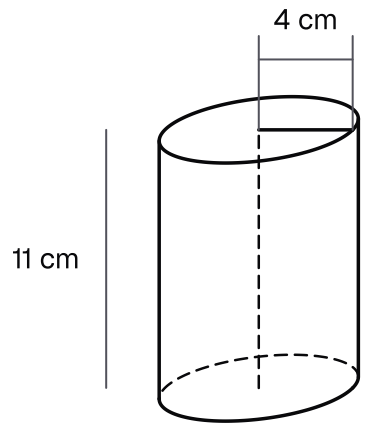
Point délicat : la hauteur relie les deux bases et leur est perpendiculaire.

CORRIGÉ

Bases. Les deux bases sont des disques parallèles de même rayon. La droite qui joint leurs centres leur est perpendiculaire. Ce solide est donc un **cylindre de révolution**, appelé aussi cylindre droit.

Hauteur. La hauteur d'un cylindre relie ses deux bases et leur est perpendiculaire. Ici, c'est la distance entre les centres : $h = 11\ \text{cm}$.

Conclusion. Ce solide est un cylindre de révolution de hauteur $h = 11\ \text{cm}$.



La boîte de la question 1 : un cylindre de révolution de rayon 4 cm, dont les bases ont leurs centres distants de 11 cm.

2.

Un cône de signalisation a pour base un disque de centre O et de rayon $9\ \text{cm}$. Son sommet est S, avec $SO = 40\ \text{cm}$ et la droite (SO) perpendiculaire à la base.

Un point M du cercle de base vérifie $SM = 41\ \text{cm}$. Nommer ce solide et donner sa hauteur.

INDICE

Outil : la hauteur est perpendiculaire à la base.

Point délicat : $[SM]$ relie le sommet à un point du cercle.

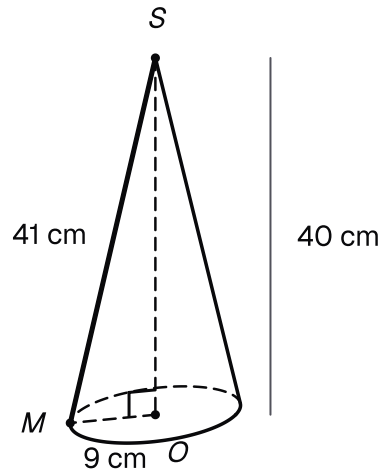
CORRIGÉ

Nature. Le solide a pour base un disque de centre O et pour sommet le point S, et la droite (SO) est perpendiculaire à la base. C'est un **cône de révolution** de sommet S.

Hauteur. La hauteur est le segment $[SO]$, perpendiculaire à la base : $h = 40\ \text{cm}$.

Attention. Le segment $[SM]$ relie le sommet à un point du cercle de base : c'est une génératrice. Sa longueur, $41\ \text{cm}$, n'est pas la hauteur.

Conclusion. Ce solide est un cône de révolution de hauteur $h = 40\ \text{cm}$.



Le cône de signalisation : base de centre O et de rayon 9 cm, hauteur SO = 40 cm, et la génératrice [SM] de 41 cm.

3.

Une boîte $ABCDEFGH$ a six faces rectangulaires, avec $AB = 12\ \text{cm}$, $BC = 5\ \text{cm}$ et $AE = 4\ \text{cm}$. L'arête $[AE]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$.

La boîte est posée sur la face $ABCD$. Nommer ce solide et donner sa hauteur.

INDICE

Outil : toutes les faces sont des rectangles.

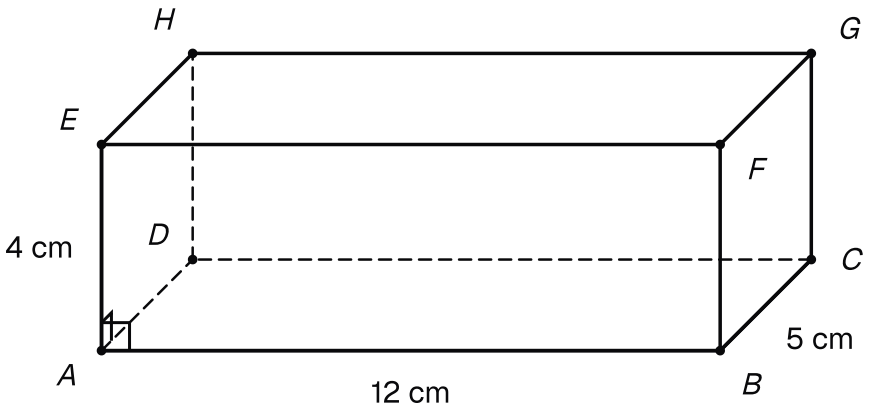
Début : cherche l'arête perpendiculaire à la face du dessous.

CORRIGÉ

Nature. Les six faces de la boîte sont des rectangles : ce solide est un **parallélépipède rectangle**.

Hauteur. La boîte repose sur la face $ABCD$. Sa hauteur est l'arête perpendiculaire à cette face, c'est-à-dire $[AE]$: $h = 4\ \text{cm}$.

Conclusion. C'est un parallélépipède rectangle de hauteur $h = 4\ \text{cm}$.



La boîte ABCDEFGH posée sur la face ABCD : AB = 12 cm, BC = 5 cm, et la hauteur [AE] de 4 cm, perpendiculaire au fond.

Exercice 2

Un réservoir d'eau de pluie en litres

Un réservoir d'eau de pluie a la forme d'un parallélépipède rectangle. Ses dimensions intérieures sont : longueur $120\ \text{cm}$, largeur $80\ \text{cm}$, hauteur $75\ \text{cm}$.

1.

Calculer le volume intérieur du réservoir en cm^3, puis en litres.

INDICE

Outil : $V = a \times b \times c$.

Ensuite : $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.

CORRIGÉ

Volume. Le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de ses trois dimensions :

$$\begin{aligned} V &= 120 \times 80 \times 75 \\ &= 720\,000\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Litres. On a $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$. On divise donc par $1\,000$:

$$\begin{aligned} 720\,000\ \text{cm}^3 &= 720\ \text{dm}^3 \\ &= 720\ \text{L} \end{aligned}$$

Conclusion. Le volume intérieur du réservoir vaut $720\,000\ \text{cm}^3$, soit $720\ \text{L}$.

2.

Après une averse, l'eau monte jusqu'à $50\ \text{cm}$ de hauteur. Quel volume d'eau le réservoir contient-il, en litres ?

INDICE

Début : l'eau forme un nouveau parallélépipède rectangle.

Point délicat : seule la hauteur change.

CORRIGÉ

Forme de l'eau. L'eau remplit le bas du réservoir. Elle forme un parallélépipède rectangle de même longueur et de même largeur que le réservoir, mais de hauteur $50\ \text{cm}$.

Volume. On multiplie les trois dimensions de l'eau :

$$\begin{aligned} V &= 120 \times 80 \times 50 \\ &= 480\,000\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Conclusion. En divisant par $1\,000$, on trouve que le réservoir contient $480\ \text{L}$ d'eau.

Exercice 3

Un tonneau cylindrique

Un tonneau a la forme d'un cylindre de révolution. Son diamètre mesure $6\ \text{dm}$ et sa hauteur $8\ \text{dm}$.

1.

Calculer le volume du tonneau en dm^3 : donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : $V = \pi r^2 h$.

Point délicat : r est le rayon, pas le diamètre.

CORRIGÉ

Rayon. Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 6 \div 2 = 3\ \text{dm}$.

Volume. Le volume d'un cylindre vaut $V = \pi r^2 h$, avec ici $h = 8\ \text{dm}$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \times 3^2 \times 8 \\ &= 72\pi\ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

Valeur approchée. La calculatrice donne $72\pi \approx 226{,}19$.

Conclusion. Le tonneau a un volume de $72\pi\ \text{dm}^3$, soit environ $226{,}2\ \text{dm}^3$, arrondi au dixième.

2.

Combien de bidons de $20\ \text{L}$ peut-on remplir entièrement avec un tonneau plein ?

INDICE

Début : $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$.

Ensuite : divise par 20 et garde les bidons pleins.

CORRIGÉ

Litres. Comme $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$, le tonneau plein contient environ $226{,}2\ \text{L}$.

Division. On cherche combien de fois $20\ \text{L}$ tient dans cette quantité :

$$226{,}2 \div 20 \approx 11{,}3$$

Bidons pleins. On a $11 \times 20 = 220$ et $12 \times 20 = 240$. Le tonneau remplit $220\ \text{L}$ de bidons, mais pas $240\ \text{L}$.

Conclusion. Avec un tonneau plein, on remplit entièrement 11 bidons.

Exercice 4

Une bougie, un tas de sable et une cale

1.

Une bougie décorative est une pyramide dont la base est un carré de côté $4\ \text{cm}$. Sa hauteur mesure $6\ \text{cm}$. Calculer le volume de cire.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$.

Début : B est l'aire du carré.

CORRIGÉ

Base. La base est un carré de côté $4\ \text{cm}$: $B = 4 \times 4 = 16\ \text{cm}^2$.

Volume. Le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 16 \times 6 \\ &= 32\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Conclusion. La bougie contient $32\ \text{cm}^3$ de cire.

2.

Sur un chantier, un tas de sable forme un cône de révolution. Son rayon mesure $3\ \text{m}$ et sa hauteur $2\ \text{m}$. Calculer son volume : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Point délicat : n'oublie pas le tiers.

CORRIGÉ

Volume exact. Le volume d'un cône vaut $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, avec $r = 3\ \text{m}$ et $h = 2\ \text{m}$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 2 \\ &= \frac{18\pi}{3} \\ &= 6\pi\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

Valeur approchée. La calculatrice donne $6\pi \approx 18{,}85$.

Conclusion. Le tas de sable a un volume de $6\pi\ \text{m}^3$, soit environ $18{,}8\ \text{m}^3$, arrondi au dixième.

3.

Une cale de porte est un prisme droit. Sa base est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $6\ \text{cm}$ et $8\ \text{cm}$. La distance entre les deux bases vaut $15\ \text{cm}$.

Calculer le volume de la cale.

INDICE

Outil : $V = B \times h$.

Point délicat : la base est le triangle, et la hauteur du prisme est $15\ \text{cm}$.

CORRIGÉ

Base. La base est un triangle rectangle. Son aire est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit :

$$B = \frac{6 \times 8}{2} = 24\ \text{cm}^2$$

Volume. La hauteur du prisme est la distance entre ses deux bases, $15\ \text{cm}$. Le volume d'un prisme droit vaut $V = B \times h$:

$$V = 24 \times 15 = 360\ \text{cm}^3$$

Conclusion. La cale a un volume de $360\ \text{cm}^3$.

Exercice 5

Le carton d'une boîte de thé

Une boîte de thé fermée est un cylindre de révolution de rayon $6\ \text{cm}$ et de hauteur $11\ \text{cm}$.

1.

Calculer l'aire latérale de la boîte : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : l'aire latérale vaut $2\pi rh$.

Début : déroulée, la surface latérale est un rectangle.

CORRIGÉ

Formule. Déroulée, la surface latérale du cylindre est un rectangle. Sa longueur est le périmètre de la base, $2\pi r$, et sa largeur la hauteur h : son aire vaut $2\pi rh$.

Calcul. Avec $r = 6\ \text{cm}$ et $h = 11\ \text{cm}$:

$$2\pi \times 6 \times 11 = 132\pi\ \text{cm}^2$$

Conclusion. L'aire latérale de la boîte vaut $132\pi\ \text{cm}^2$, soit environ $414{,}7\ \text{cm}^2$, arrondie au dixième.

2.

La boîte a un fond et un couvercle. Calculer son aire totale : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Début : chaque disque a une aire πr^2.

Point délicat : il y a deux disques.

CORRIGÉ

Disques. Le fond et le couvercle sont deux disques de rayon $6\ \text{cm}$. Chacun a pour aire :

$$\pi \times 6^2 = 36\pi\ \text{cm}^2$$

Aire totale. On ajoute à l'aire latérale, trouvée à la question 1, l'aire des deux disques :

$$\begin{aligned} &132\pi + 2 \times 36\pi \\ &= 204\pi\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire totale de la boîte vaut $204\pi\ \text{cm}^2$, soit environ $640{,}9\ \text{cm}^2$, arrondie au dixième.

3.

Pour une fête, on offre le thé avec un chapeau en carton. Ce chapeau est un cône de révolution sans fond, de rayon $5\ \text{cm}$ et de génératrice $13\ \text{cm}$. Calculer l'aire de carton : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : l'aire latérale d'un cône vaut $\pi r a$, où a est la génératrice.

Point délicat : le chapeau n'a pas de fond.

CORRIGÉ

Surface à couvrir. Le chapeau n'a pas de fond : l'aire de carton est seulement l'aire latérale du cône.

Calcul. L'aire latérale d'un cône de rayon r et de génératrice a vaut $\pi r a$. Avec $r = 5\ \text{cm}$ et $a = 13\ \text{cm}$:

$$\pi \times 5 \times 13 = 65\pi\ \text{cm}^2$$

Conclusion. Il faut $65\pi\ \text{cm}^2$ de carton, soit environ $204{,}2\ \text{cm}^2$, arrondi au dixième.

Exercice 6

La maquette d'un silo

Un silo à grains mesure $15\ \text{m}$ de haut. Sa maquette mesure $25\ \text{cm}$ de haut.

1.

Calculer le rapport k de la maquette par rapport au silo. Est-ce un agrandissement ou une réduction ?

INDICE

Outil : k est une longueur de la maquette divisée par la longueur correspondante du silo.

Point délicat : convertis d'abord dans la même unité.

CORRIGÉ

Même unité. On écrit les deux hauteurs en centimètres : $15\ \text{m} = 1\,500\ \text{cm}$.

Rapport. On divise la hauteur de la maquette par la hauteur correspondante du silo :

$$k = \frac{25}{1\,500} = \frac{1}{60}$$

Nature. Le nombre k est compris entre 0 et 1 : les longueurs de la maquette sont plus petites que celles du silo.

Conclusion. Le rapport vaut $k = \frac{1}{60}$: la maquette est une réduction du silo.

2.

Le rayon du silo mesure $3\ \text{m}$. Calculer le rayon de la maquette en centimètres.

INDICE

Outil : une longueur est multipliée par k.

Début : $3\ \text{m} = 300\ \text{cm}$.

CORRIGÉ

Conversion. $3\ \text{m} = 300\ \text{cm}$.

Rayon. Dans une réduction de rapport k, chaque longueur est multipliée par k :

$$300 \times \frac{1}{60} = 5\ \text{cm}$$

Conclusion. Le rayon de la maquette mesure $5\ \text{cm}$.

Exercice 7

Une petite boîte cubique

Une boîte cubique a une arête de $10\ \text{cm}$. Son aire totale vaut $600\ \text{cm}^2$ et son volume $1\,000\ \text{cm}^3$. On fabrique une réduction de cette boîte dans le rapport $k = \dfrac{1}{2}$.

1.

Calculer l'aire totale de la petite boîte.

INDICE

Outil : une aire est multipliée par k^2.

Début : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

CORRIGÉ

Effet sur les aires. Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2. Ici $k^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, soit $k^2 = \dfrac{1}{4}$.

Calcul. On multiplie l'aire de la grande boîte par ce nombre :

$$600 \times \frac{1}{4} = 150\ \text{cm}^2$$

Conclusion. La petite boîte a une aire totale de $150\ \text{cm}^2$.

2.

Calculer le volume de la petite boîte, en cm^3 puis en millilitres.

INDICE

Outil : un volume est multiplié par k^3.

Ensuite : $1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{mL}$.

CORRIGÉ

Effet sur les volumes. Les volumes sont multipliés par k^3. Ici $k^3 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$, soit $k^3 = \dfrac{1}{8}$.

Calcul. On multiplie le volume de la grande boîte par ce nombre :

$$1\,000 \times \frac{1}{8} = 125\ \text{cm}^3$$

Millilitres. Comme $1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{mL}$, cela fait $125\ \text{mL}$.

Conclusion. La petite boîte a un volume de $125\ \text{cm}^3$, soit $125\ \text{mL}$.

3.

Vérifier ces deux résultats en calculant directement avec l'arête de la petite boîte.

INDICE

Début : l'arête est multipliée par k.

Ensuite : un cube a six faces carrées.

CORRIGÉ

Arête. L'arête est une longueur, donc elle est multipliée par k : $10 \times \dfrac{1}{2} = 5 \text{ cm}$.

Aire. Le petit cube a six faces carrées de côté 5 cm :

$$\begin{aligned} & 6 \times 5^2 \\ & = 6 \times 25 \\ & = 150 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

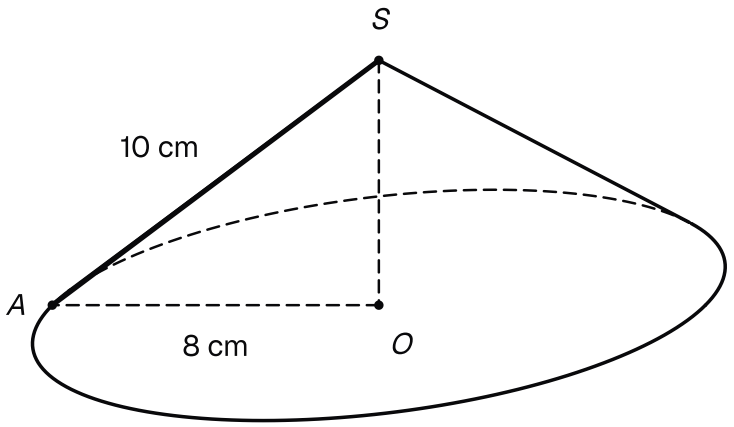
Volume. Le volume du petit cube vaut $5^3 = 125 \text{ cm}^3$.

Conclusion. Le calcul direct redonne 150 cm^2 et 125 cm^3 : les deux résultats sont vérifiés.

Exercice 8

La hauteur d'un entonnoir

La partie haute d'un entonnoir est un cône de révolution de sommet S. Sa base a pour centre O et pour rayon $OA = 8\ \text{cm}$. Sa génératrice mesure $SA = 10\ \text{cm}$.



Le cône de l'entonnoir : base de centre O et de rayon OA = 8 cm, génératrice SA = 10 cm.

1.

Justifier que le triangle SOA est rectangle en O, puis calculer la hauteur SO.

INDICE

Outil : la hauteur (SO) est perpendiculaire à la base.

Début : l'hypoténuse est $[SA]$.

CORRIGÉ

Angle droit. Dans un cône de révolution, la droite (SO) est perpendiculaire au plan de la base. Ce plan contient la droite (OA), donc (SO) est perpendiculaire à (OA) : le triangle SOA est rectangle en O.

Théorème de Pythagore. L'hypoténuse est $[SA]$, donc $SA^2 = SO^2 + OA^2$. Avec $SA^2 = 10^2 = 100$ et $OA^2 = 8^2 = 64$, on isole SO^2 :

$$\begin{aligned} SO^2 &= SA^2 - OA^2 \\ &= 100 - 64 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Hauteur. SO est une longueur positive dont le carré vaut 36 : $SO = 6\ \text{cm}$.

Conclusion. Le triangle SOA est rectangle en O, et la hauteur du cône mesure $SO = 6\ \text{cm}$.

2.

En déduire le volume du cône : valeur exacte, puis valeur arrondie au dixième.

INDICE

Outil : $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Point délicat : la hauteur est SO, pas SA.

CORRIGÉ

Volume exact. Le rayon vaut $OA = 8\ \text{cm}$, et la hauteur trouvée à la question 1 vaut $SO = 6\ \text{cm}$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 6 \\ &= \frac{384\pi}{3} \\ &= 128\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Valeur approchée. La calculatrice donne $128\pi \approx 402{,}12$.

Conclusion. Le cône a un volume de $128\pi\ \text{cm}^3$, soit environ $402{,}1\ \text{cm}^3$, arrondi au dixième.