BURHAN

Calcul des volumes

3ème Année Collège · Mathématiques

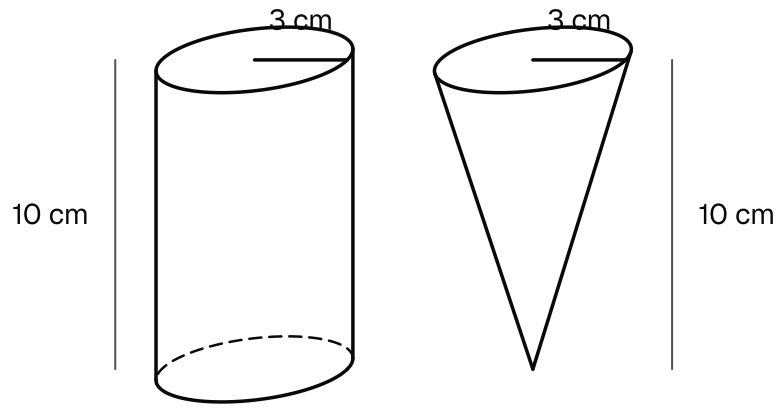
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/calcul-des-volumes/cours

Chapitre	Semestre
Calcul des volumes	Semestre 2

Combien de verres ?

Sur une table, deux verres vides. Le premier est un **cylindre** : son fond est un disque de rayon $3\ \text{cm}$, et il mesure $10\ \text{cm}$ de haut. Le second est un **cône** : son ouverture est le même disque, sa hauteur est la même, et il se termine en pointe.

Tu remplis le verre conique d'eau, puis tu le verses dans le verre cylindrique. Tu recommences jusqu'à ce que le cylindre soit plein.



Les deux verres posés sur la table : le cylindre et le cône, pointe en bas, ont la même ouverture de rayon 3 cm et la même hauteur de 10 cm.

Devine : Une prédiction

Combien de verres coniques faut-il verser pour remplir le verre cylindrique ?

A. Deux verres.

Faux.

Deux verres coniques ne remplissent que les deux tiers du cylindre.

B. Trois verres.

Juste.

Juste : le cône contient le tiers du cylindre. Tu le vérifieras par le calcul.

C. Quatre verres.

Faux.
Le quatrième verre déborderait : trois suffisent.

D. Cela dépend du rayon.

Faux.
Le rayon change les deux volumes de la même façon : la réponse ne dépend ni du rayon, ni de la hauteur.

Correction
Il faut **trois** verres coniques. Le volume d'un cône est le tiers de celui du cylindre de même base et de même hauteur. Tu le verras dans la section sur les pyramides et les cônes, avec un calcul exact.

Un **volume** mesure la place occupée par un objet.

Combien d'eau dans un réservoir ? Combien de litres dans un aquarium ? Combien de sable dans un silo ?

Ces questions de tous les jours se résolvent avec quelques formules.

Les solides de ce chapitre ne sont pas dessinés à l'écran. Chaque solide est décrit avec ses mesures. Prends ton cahier et dessine-le à main levée : c'est la meilleure façon de le voir.

Dans ce chapitre, tu fais la synthèse des solides usuels de l'espace : leur représentation, leurs aires, leurs volumes. Tu calculs les volumes du prisme droit, du cylindre, de la pyramide et du cône.

Tu utilises le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès dans un solide. Enfin, tu découvres l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires et les volumes.

Le mot du prof. Garde ta réponse en tête. Nous la vérifierons ensemble, calcul à l'appui.

Les solides usuels : représentation et vocabulaire

Reconnaître un solide

Devine : Des objets de tous les jours

Voici quatre objets : une boîte de conserve, un carton de lait, un cornet de glace et une tente à quatre pans sur un sol carré. Lequel a la forme d'une pyramide ?

A. La boîte de conserve.

Faux.
Ses deux bases sont des disques : c'est un cylindre.

B. Le carton de lait.

Faux.
Ses six faces sont des rectangles : c'est un pavé (parallélépipède rectangle, défini plus bas).

C. Le cornet de glace.

Faux.

Sa base est un disque : c'est un cône, pas une pyramide.

D. La tente.

Juste.

Juste : une base carrée et quatre faces triangulaires qui se rejoignent au sommet.

Correction

La tente est une pyramide : sa base est un carré, et ses quatre faces latérales sont des triangles qui ont un sommet commun. La boîte de conserve est un cylindre, le carton de lait un pavé, le cornet un cône.

Rappel de 1re année : un **prisme droit** a deux bases parallèles et superposables, et des faces latérales rectangulaires. Un **cylindre** a deux bases qui sont des disques de même rayon ; la droite qui joint leurs centres est perpendiculaire aux bases. Pour ces deux solides, la **hauteur** est la distance entre les deux bases.

Rappel de 2e année : une **pyramide** a une seule base, un polygone (comme un triangle ou un carré), et un sommet. Un **cône** a pour base un disque et se termine aussi par un sommet. Pour ces deux solides, la hauteur va du sommet à la base, perpendiculairement à celle-ci.

Le vocabulaire des solides

Définition : Les solides usuels

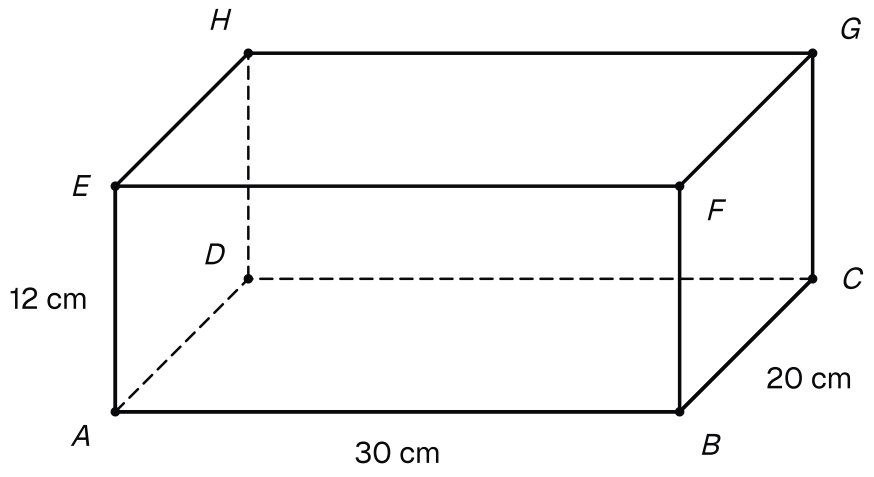
Un **solide** est un objet de l'espace limité par des surfaces. Voici les solides usuels du collège.

- Un **prisme droit** a deux **bases** parallèles et superposables, qui sont des polygones. Ses **faces latérales** sont des rectangles. Sa **hauteur** est la distance entre les deux bases.
- Un **parallélépipède rectangle** (ou pavé droit) est un prisme droit dont les six faces sont des rectangles. Un **cube** est un parallélépipède rectangle dont les six faces sont des carrés.
- Un **cylindre de révolution** (ou cylindre droit) a deux bases parallèles qui sont des disques de même rayon. La droite qui joint leurs centres est perpendiculaire aux bases. Sa hauteur est la distance entre les centres des deux bases.
- Une **pyramide** a pour base un polygone. Ses faces latérales sont des triangles qui ont un sommet commun : le **sommet** de la pyramide. Sa hauteur est la distance du sommet au plan de la base.
- Un **cône de révolution** a pour base un disque de centre O et un sommet S tel que la droite (SO) est perpendiculaire à la base. Sa hauteur est SO. Une **génératrice** est un segment $[SM]$, où M est un point du cercle de base.

Exemple : une boîte décrite avec précision

Une boîte à chaussures a la forme d'un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Dessine-le sur ton cahier.

- Le fond $ABCD$ est un rectangle avec $AB = 30\ \text{cm}$ et $BC = 20\ \text{cm}$.
- Le couvercle est $EFGH$, avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, et ainsi de suite.
- Les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ mesurent $12\ \text{cm}$: c'est la hauteur.
- Ce solide a 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets.

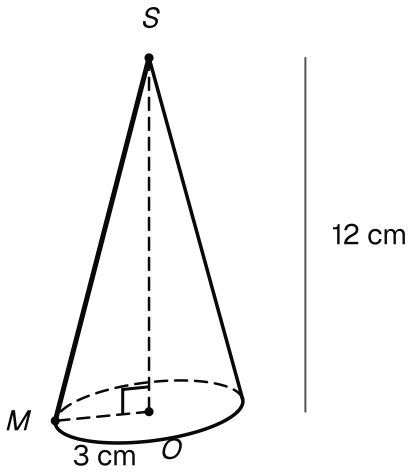


La boîte à chaussures ABCDEFGH : le fond ABCD de 30 cm sur 20 cm et la hauteur [AE] de 12 cm.

Exemple : un cône décrit avec précision

Un cornet de glace a la forme d'un cône de sommet S. Sa base est un disque de centre O et de rayon $3\ \text{cm}$. La hauteur $[SO]$ mesure $12\ \text{cm}$; elle est perpendiculaire à la base.

Pour un point M du cercle de base, le segment $[SM]$ est une génératrice. Elle est penchée, donc plus longue que la hauteur.



Le cornet : un cône de sommet S, de base le disque de centre O et de rayon 3 cm, de hauteur [SO] de 12 cm, et la génératrice [SM].

Vérifie : Compter les arêtes

Une pyramide a pour base un carré. Combien a-t-elle d'arêtes ?

A. 4 arêtes.

Faux.

Ce sont seulement les arêtes latérales, qui partent du sommet.

B. 5 arêtes.

Faux.

C'est le nombre de sommets : les quatre coins du carré et le sommet.

C. 8 arêtes.

Juste.

Juste : 4 arêtes pour le carré de base et 4 arêtes latérales.

D. 12 arêtes.

Faux.

C'est le nombre d'arêtes d'un pavé, pas d'une pyramide.

Correction

La base carrée a 4 côtés : ce sont 4 arêtes. Chaque coin du carré est relié au sommet de la pyramide : 4 arêtes latérales de plus. En tout, $4 + 4 = 8$ arêtes.

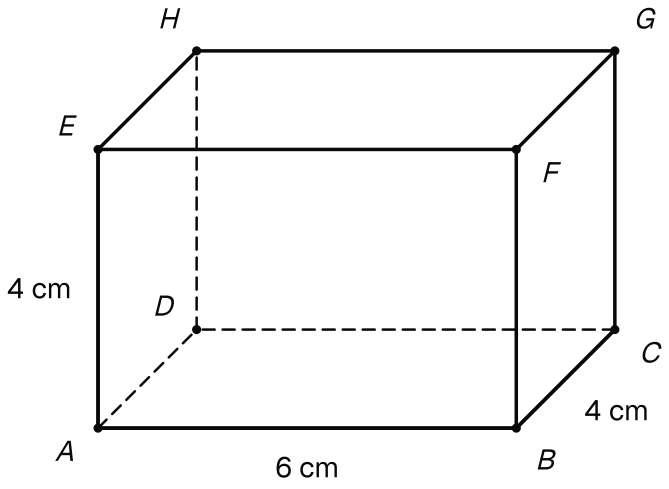
Dessiner un solide

Méthode : dessiner un pavé en perspective cavalière

La **perspective cavalière** est une façon de dessiner un solide sur ton cahier. Exemple : une boîte de $6\ \text{cm}$ de long, $4\ \text{cm}$ de haut et $4\ \text{cm}$ de profondeur.

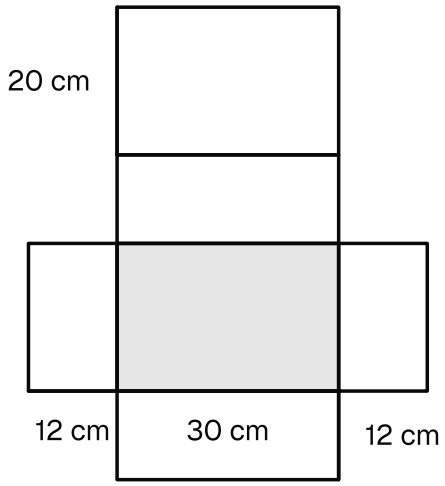
1. **Tracer** la face de devant en vraie grandeur : un rectangle de $6\ \text{cm}$ sur $4\ \text{cm}$.
2. **Tracer** les arêtes qui partent vers l'arrière : en oblique, à $45°$, avec la moitié de leur longueur. Ici, $4 \div 2 = 2\ \text{cm}$.
3. **Relier** leurs extrémités : la face de derrière a la même taille que celle de devant.
4. **Passer** en pointillés les trois arêtes cachées.

Deux arêtes parallèles restent parallèles sur le dessin.



La boîte de 6 cm sur 4 cm sur 4 cm en perspective cavalière : face de devant en vraie grandeur, arêtes fuyantes à moitié, trois arêtes cachées.

Un **patron** est une figure plane qu'on plie pour fabriquer le solide. Le patron de la boîte à chaussures compte six rectangles : deux de $30\ \text{cm}$ sur $20\ \text{cm}$, deux de $30\ \text{cm}$ sur $12\ \text{cm}$, deux de $20\ \text{cm}$ sur $12\ \text{cm}$. Le patron d'un cylindre est formé de deux disques et d'un rectangle.



Un patron de la boîte à chaussures : le fond de 30 cm sur 20 cm, entouré de ses quatre faces latérales, et le couvercle au bout.

Arêtes parallèles, arêtes perpendiculaires

Vérifie : Des droites parallèles

Dans la boîte à chaussures $ABCDEFGH$, quelle droite est parallèle à la droite (AB) ?

A. La droite (BC).

Faux.

Elle coupe (AB) en B et lui est perpendiculaire : le fond est un rectangle.

B. La droite (HG).

Juste.

Juste : (AB) est parallèle à (EF) dans la face $ABFE$, et (EF) est parallèle à (HG).

C. La droite (AE).

Faux.

Elle passe par A : elle coupe (AB).

D. La droite (FG).

Faux.

Elle est parallèle à (BC), pas à (AB).

Correction

Les droites (AB), (DC), (EF) et (HG) sont parallèles : ce sont les quatre arêtes de longueur $30\ \text{cm}$. Les droites (BC) et (AE) coupent (AB) en un point. La droite (FG) est parallèle à (BC).

Vérifie : Une arête perpendiculaire à une face

Quelle arête est perpendiculaire à la face $ABCD$, le fond de la boîte ?

A. L'arête $[CG]$.

Juste.

Juste : elle est perpendiculaire à $[BC]$ et à $[CD]$, deux arêtes du fond issues de C.

B. L'arête $[AB]$.

Faux.

Elle est contenue dans la face $ABCD$.

C. L'arête $[EF]$.

Faux.

Elle est parallèle au fond : elle ne le coupe jamais.

D. L'arête $[GH]$.

Faux.

Elle est dans le couvercle $EFGH$, parallèle au fond.

Correction

Les quatre arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont perpendiculaires au fond. Chacune est perpendiculaire aux deux arêtes du fond qui partent de son extrémité. C'est pourquoi chacune mesure la hauteur de la boîte : $12\ \text{cm}$.

À toi : Un dé décrit

Un dé a la forme d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête $2\ \text{cm}$. Son fond est $ABCD$, son dessus est $EFGH$, et les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont verticales.

Combien a-t-il de faces, d'arêtes et de sommets ? Cite trois droites parallèles à (AD), puis les arêtes perpendiculaires à la face $EFGH$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Un cube est un parallélépipède rectangle : compte comme pour la boîte à chaussures.

Indice 2

Cherche une droite parallèle à (AD) dans le fond, puis deux dans le dessus.

Indice 3

Point délicat : une arête perpendiculaire à la face $EFGH$ relie le fond au dessus.

Réponse

Le cube a 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets. Les droites (BC), (EH) et (FG) sont parallèles à (AD). Les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont perpendiculaires à la face $EFGH$.

Le mot du prof. Tu sais maintenant décrire un solide avec les bons mots : base, face, arête, hauteur. Ce vocabulaire sert dans chaque calcul de la suite.

Aires latérales et aires totales

L'étiquette d'une boîte de conserve

Devine : Une étiquette déroulée

Une boîte de conserve a la forme d'un cylindre. On découpe son étiquette en papier le long d'un trait vertical, puis on la déroule à plat. Quelle forme obtient-on ?

A. Un disque.

Faux.
Les disques sont le fond et le couvercle, pas l'étiquette.

B. Un demi-disque.

Faux.
Une fois déroulée, l'étiquette n'a aucun bord arrondi : ses quatre bords sont droits.

C. Un rectangle.

Juste.
Juste : sa largeur est la hauteur de la boîte, sa longueur le tour de la boîte.

D. Un trapèze.

Faux.
Les bords du haut et du bas ont la même longueur, le tour de la boîte : c'est un rectangle.

Correction
On obtient un **rectangle**. Sa largeur est la hauteur de la boîte. Sa longueur est le tour de la boîte, c'est-à-dire la longueur du cercle de base.

En clair. Rappel : un cercle de rayon r a pour longueur $2\pi r$. Un disque de rayon r a pour aire πr^2.

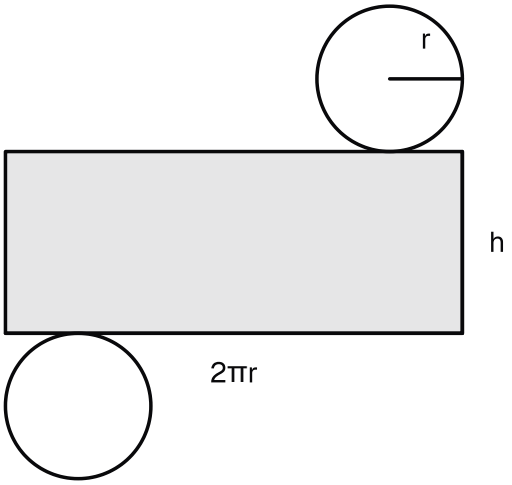
Prends une boîte de rayon $4\ \text{cm}$ et de hauteur $10\ \text{cm}$. L'étiquette est un rectangle de largeur $10\ \text{cm}$. Sa longueur est le tour de la boîte :

$$2\pi \times 4 = 8\pi\ \text{cm}$$

L'aire de l'étiquette vaut donc :

$$8\pi \times 10 = 80\pi\ \text{cm}^2$$

C'est l'**aire latérale** du cylindre : le périmètre de la base multiplié par la hauteur.



L'étiquette déroulée et les deux disques : un rectangle de longueur 2πr et de largeur h, ici 8π cm sur 10 cm pour la boîte de rayon 4 cm.

Propriété : Aire latérale et aire totale

- L'**aire latérale** d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution est égale au **périmètre de la base** multiplié par la **hauteur**. Pour un cylindre de rayon r et de hauteur h, l'aire latérale vaut $2\pi r h$.
- L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires de ses faces latérales.
- L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon r et de génératrice de longueur a vaut $\pi r a$.
- L'**aire totale** d'un solide est la somme de son aire latérale et de l'aire de sa base, ou de ses deux bases.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer. Le déroulé de l'étiquette en donne l'idée pour le cylindre.

Exemple : la boîte de conserve

La boîte de conserve a pour rayon $r = 4\ \text{cm}$ et pour hauteur $h = 10\ \text{cm}$.

Aire latérale. On applique la formule du cylindre :

$$\begin{aligned} 2\pi r h &= 2\pi \times 4 \times 10 \\ &= 80\pi\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Bases. Ce sont deux disques. Chacun a pour aire :

$$\pi \times 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

Aire totale. On ajoute les deux bases à l'aire latérale :

$$80\pi + 2 \times 16\pi = 112\pi \text{ cm}^2$$

Valeurs arrondies au dixième. $80\pi \approx 251{,}3 \text{ cm}^2$ et $112\pi \approx 351{,}9 \text{ cm}^2$.

Prisme droit et pyramide

Exemple : un emballage en forme de prisme

Un emballage a la forme d'un prisme droit de hauteur 10 cm. Ses bases sont des triangles rectangles de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm.

Périmètre de la base. On ajoute les trois côtés : $3 + 4 + 5 = 12 \text{ cm}$.

Aire latérale. C'est le périmètre de la base multiplié par la hauteur :

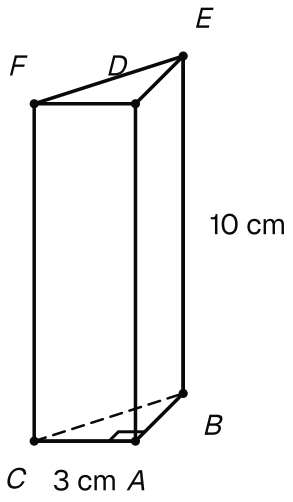
$$12 \times 10 = 120 \text{ cm}^2$$

Aire d'une base. L'angle droit est entre les côtés de 3 cm et de 4 cm. L'aire du triangle vaut donc :

$$\frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

Aire totale. On ajoute les deux bases :

$$120 + 2 \times 6 = 132 \text{ cm}^2$$



L'emballage : un prisme droit de hauteur 10 cm, dont les bases ABC et DEF sont des triangles rectangles de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm.

Exemple : la toile d'une tente

Une tente a la forme d'une pyramide à base carrée de côté $2\ \mathrm{m}$. Ses quatre faces latérales sont des triangles de base $2\ \mathrm{m}$. La hauteur de chacun de ces triangles, mesurée sur la face, vaut $3\ \mathrm{m}$: ce n'est pas la hauteur de la pyramide.

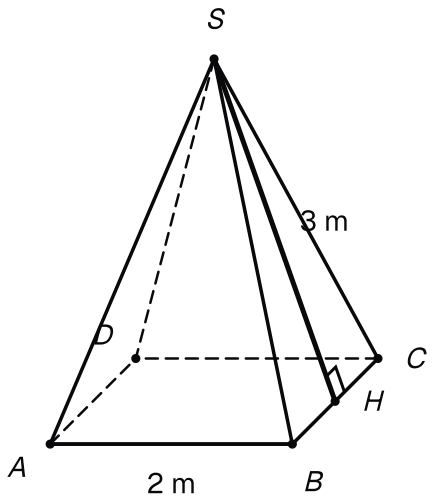
Une face. C'est un triangle de base $2\ \mathrm{m}$ et de hauteur $3\ \mathrm{m}$:

$$\frac{2 \times 3}{2} = 3\ \mathrm{m}^2$$

Aire latérale. Les quatre faces ont la même aire : $4 \times 3 = 12\ \mathrm{m}^2$. C'est la toile des côtés.

Aire totale. Le sol carré a pour aire $2 \times 2 = 4\ \mathrm{m}^2$. L'aire totale vaut donc :

$$12 + 4 = 16\ \mathrm{m}^2$$



La tente SABCD : un sol carré de 2 m de côté, et sur la face SBC la hauteur [SH] du triangle, longue de 3 m.

Méthode : calculer une aire totale

1. **Calculer** l'aire latérale : le patron déroulé, ou la somme des faces latérales.
2. **Ajouter** l'aire de la base, ou des deux bases.
3. **Écrire** l'unité d'aire : cm^2 si les longueurs sont en cm.

Vérifie : L'aire latérale d'un cône

Un chapeau pointu a la forme d'un cône de rayon $3\ \mathrm{cm}$, de hauteur $4\ \mathrm{cm}$ et de génératrice $5\ \mathrm{cm}$. Quelle est son aire latérale ?

A. $12\pi \text{ cm}^2$

Faux.

Tu as pris la hauteur : la formule utilise la génératrice.

B. $15\pi \text{ cm}^2$

Juste.

Juste : $\pi \times 3 \times 5 = 15\pi$.

C. $9\pi \text{ cm}^2$

Faux.

C'est l'aire du disque de base, $\pi \times 3^2$.

D. $30\pi \text{ cm}^2$

Faux.

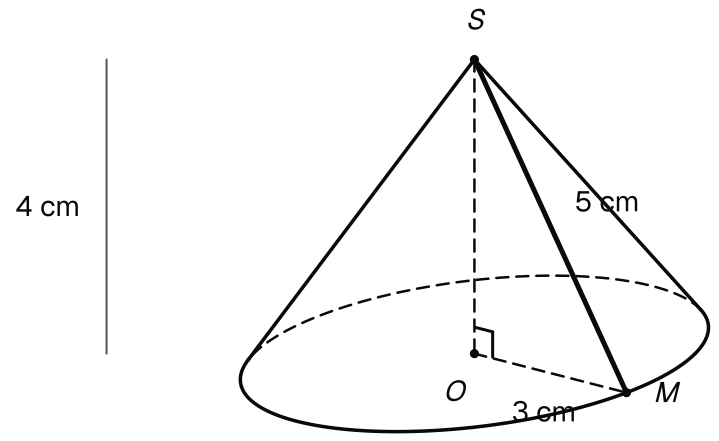
Le facteur 2 appartient à l'aire latérale du cylindre, pas à celle du cône.

Correction

L'aire latérale d'un cône vaut $\pi r a$, où a est la longueur d'une génératrice :

$$\pi \times 3 \times 5 = 15\pi \text{ cm}^2$$

La hauteur ne sert pas ici. Si le chapeau avait un fond, l'aire totale vaudrait $15\pi + 9\pi = 24\pi \text{ cm}^2$.



Le chapeau pointu : un cône de rayon 3 cm, de hauteur 4 cm, dont la génératrice mesure 5 cm.

Un piège, puis à toi

Attention : aire latérale ou aire totale

X « La boîte de conserve est faite de $80\pi \text{ cm}^2$ de métal. »

✓ Le métal forme aussi le fond et le couvercle : il faut l'aire totale, $112\pi \text{ cm}^2$. Lis bien la question : une étiquette, une toile ou un carton ne couvrent pas les mêmes faces. Une aire s'écrit en cm^2, jamais en cm^3.

À toi : Un pot de peinture

Un pot de peinture a la forme d'un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 12 cm. Calcule son aire latérale, puis son aire totale avec le fond et le couvercle.

Donne les valeurs exactes, puis arrondies au dixième. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par l'aire latérale : le périmètre de la base multiplié par la hauteur.
Indice 2
Une base est un disque d'aire πr^2 ; il y en a deux.
Indice 3
Point délicat : garde π jusqu'au bout, et n'arrondis qu'à la fin.

Réponse
Aire latérale. On applique la formule $2\pi rh$:

$$2\pi \times 5 \times 12 = 120\pi \text{ cm}^2$$

Une base. C'est un disque de rayon 5 cm :

$$\pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

Aire totale. On ajoute le fond et le couvercle :

$$120\pi + 2 \times 25\pi$$
$$= 170\pi \text{ cm}^2$$

Valeurs arrondies au dixième. $120\pi \approx 377{,}0 \text{ cm}^2$ et $170\pi \approx 534{,}1 \text{ cm}^2$.

Conclusion. Le pot a une aire latérale de $120\pi \text{ cm}^2$ et une aire totale de $170\pi \text{ cm}^2$.

Le mot du prof. Une aire latérale, c'est un patron qu'on déroule. Tu sais maintenant compter le carton d'une boîte ou la toile d'une tente.

Volume d'un prisme droit et d'un cylindre

Remplir une boîte de petits cubes

Devine : Des cubes dans une boîte

Une boîte en forme de pavé mesure 5 cm de long, 3 cm de large et 4 cm de haut. Combien de cubes d'un centimètre d'arête faut-il pour la remplir ?

A. 12 cubes.

Faux.

Tu as additionné les trois dimensions : $5 + 3 + 4$.

B. 94 cubes.

Faux.

C'est l'aire totale des six faces, en cm^2 : $2 \times (15 + 20 + 12)$.

C. 15 cubes.

Faux.

C'est une seule couche, au fond de la boîte.

D. 60 cubes.

Juste.

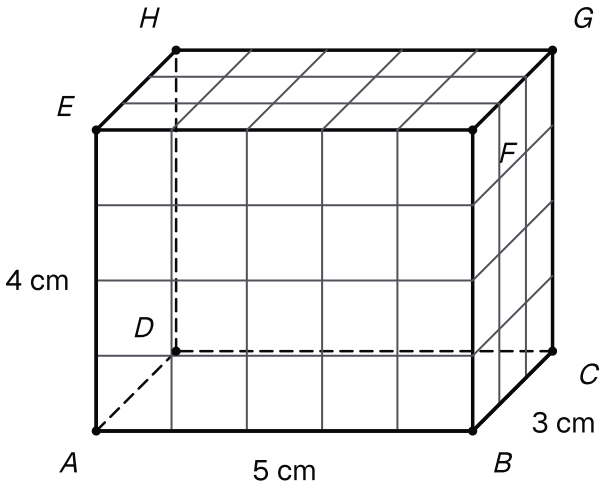
Juste : 4 couches de 15 cubes.

Correction

Au fond, une couche compte $5 \times 3 = 15$ cubes. La boîte a $4\ \mathrm{cm}$ de haut : on empile 4 couches. En tout, $15 \times 4 = 60$ cubes.

En clair. Un cube d'un centimètre d'arête a un volume de $1\ \mathrm{cm}^3$: un **centimètre cube**. La boîte contient 60 de ces cubes : son volume est $60\ \mathrm{cm}^3$.

Le nombre de cubes d'une couche est l'aire de la base, $15\ \mathrm{cm}^2$. Le nombre de couches est la hauteur. Le volume vaut donc l'aire de la base multipliée par la hauteur.



La boîte de 5 cm sur 3 cm sur 4 cm découpée en cubes d'un centimètre : 15 cubes par couche, 4 couches.

Propriété : Volume d'un prisme droit et d'un cylindre

Le volume V d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution est égal à l'aire B de sa base multipliée par sa hauteur h :

$$V = B \times h.$$

En particulier :

- parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c : $V = a \times b \times c$;
- cube d'arête a : $V = a^3$;
- cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h : $V = \pi r^2 h$.

Les longueurs sont exprimées dans la même unité. Le volume s'exprime alors dans l'unité de volume correspondante : en cm^3 si les longueurs sont en cm.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer. Les couches de petits cubes en donnent l'idée.

Exemple : un pavé et un cube

- La boîte de $5\ \mathrm{cm}$ sur $3\ \mathrm{cm}$ sur $4\ \mathrm{cm}$: $V = 5 \times 3 \times 4 = 60\ \mathrm{cm}^3$.
- Un dé cubique d'arête $3\ \mathrm{cm}$: $V = 3^3 = 27\ \mathrm{cm}^3$.

Calculer un volume

Méthode : calculer un volume

1. **Reconnaître** le solide et sa base.
2. **Calculer** l'aire B de la base.
3. **Repérer** la hauteur h, perpendiculaire à la base.
4. **Appliquer** la formule $V = B \times h$.
5. **Écrire** l'unité de volume : cm^3 si les longueurs sont en cm.

Exemple : un réservoir cylindrique

Un réservoir d'eau a la forme d'un cylindre de rayon $2\ \mathrm{m}$ et de hauteur $5\ \mathrm{m}$.

Base. C'est un disque d'aire :

$$B = \pi \times 2^2 = 4\pi\ \mathrm{m}^2$$

Volume. On multiplie l'aire de la base par la hauteur :

$$V = 4\pi \times 5 = 20\pi \text{ m}^3$$

Valeur arrondie au dixième. $20\pi \approx 62{,}8 \text{ m}^3$.

Exemple : une tente en forme de prisme

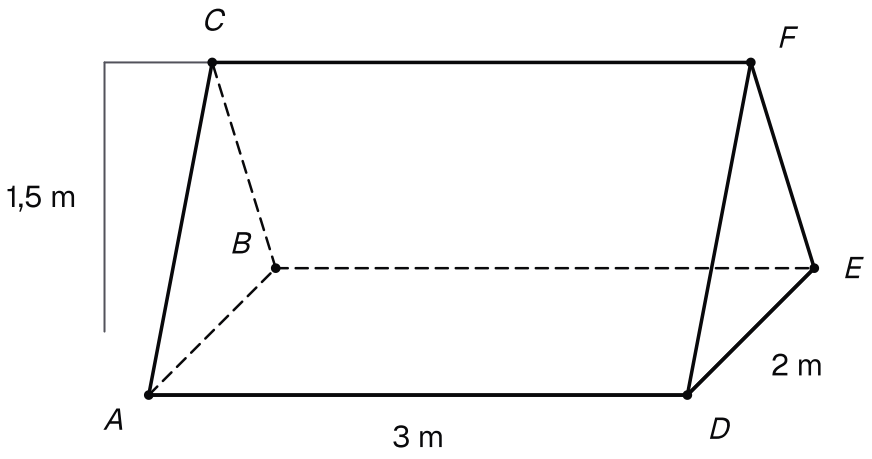
Une tente a la forme d'un prisme droit couché. Ses bases sont des triangles de base 2 m et de hauteur $1{,}5 \text{ m}$ (hauteur du triangle). La longueur de la tente, 3 m, est la hauteur du prisme : la distance entre ses deux bases.

Aire d'une base. La base est un triangle :

$$B = \frac{2 \times 1{,}5}{2} = 1{,}5 \text{ m}^2$$

Volume. On multiplie par la hauteur du prisme :

$$V = 1{,}5 \times 3 = 4{,}5 \text{ m}^3$$



La tente couchée : ses bases, une à chaque bout, sont des triangles de base 2 m et de hauteur 1,5 m, et la longueur de 3 m sépare les deux bases.

Trouve l'erreur

Un verre cylindrique a un diamètre de 8 cm et une hauteur de 5 cm. Leïla écrit : $V = \pi \times 8^2 \times 5 = 320\pi \text{ cm}^3$. Quelle est son erreur ?

A. Elle a pris le diamètre au lieu du rayon.
Juste.

Juste : le rayon vaut $4\ \text{cm}$, et $V = 80\pi\ \text{cm}^3$.

B. Elle n'aurait pas dû élever le nombre au carré.

Faux.

La formule est bien $\pi r^2 h$: le carré est nécessaire.

C. Elle a oublié de diviser par 3.

Faux.

Le facteur $\dfrac{1}{3}$ concerne le cône, pas le cylindre.

D. Il n'y a pas d'erreur.

Faux.

Le nombre 8 est le diamètre : il ne va pas dans πr^2.

Correction

Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 4\ \text{cm}$. Donc :

$$V = \pi \times 4^2 \times 5 = 80\pi\ \text{cm}^3$$

Le résultat de Leïla est quatre fois trop grand, car $8^2 = 4 \times 4^2$.

Attention : rayon ou diamètre

✗ « Le diamètre vaut $10\ \text{cm}$, donc $r^2 = 100$. »

✓ Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 5\ \text{cm}$ et $r^2 = 25$. Avant d'écrire πr^2, entoure le rayon dans l'énoncé.

Unités de volume et de capacité

Un cube de $1\ \text{dm}$ d'arête mesure $10\ \text{cm}$ de chaque côté. Son volume vaut :

$$10 \times 10 \times 10 = 1\,000\ \text{cm}^3$$

Donc $1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.

De même, $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{dm}^3$. Pour les liquides, on parle de **capacité** : $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$ et $1\ \text{mL} = 1\ \text{cm}^3$.

Attention : un volume n'est pas une longueur

✗ « $1\ \text{m}^3 = 10\ \text{dm}^3$, car $1\ \text{m} = 10\ \text{dm}$. »

✓ Un cube de $1\ \text{m}$ d'arête a $10\ \text{dm}$ de chaque côté : son volume vaut $10^3 = 1\,000\ \text{dm}^3$. Pour passer des m^3 aux dm^3, on multiplie par $1\,000$. Convertis d'abord les longueurs, puis calcule.

Exemple : un aquarium en litres

Un aquarium a la forme d'un pavé de $60\ \text{cm}$ de long, $30\ \text{cm}$ de large et $40\ \text{cm}$ de haut. Rappel : $1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3$.

Volume. On multiplie les trois dimensions :

$$60 \times 30 \times 40 = 72\,000\ \text{cm}^3$$

Or $72\,000 \div 1\,000 = 72$: l'aquarium contient $72\ \text{L}$.

Rempli jusqu'à $30\ \text{cm}$ de hauteur. La hauteur de l'eau remplace celle de l'aquarium :

$$60 \times 30 \times 30 = 54\,000\ \text{cm}^3$$

Or $54\,000 \div 1\,000 = 54$: il contient $54\ \text{L}$.

À toi : Remplir une piscine

Une piscine a la forme d'un pavé de $10\ \text{m}$ de long, $4\ \text{m}$ de large et $1{,}5\ \text{m}$ de profondeur. Calcule son volume en m^3, puis en litres.

Une pompe débite $500\ \text{L}$ par minute : combien de temps faut-il pour la remplir ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le volume d'un pavé est le produit de ses trois dimensions.
Indice 2
Passe des m^3 aux dm^3, puis aux litres.
Indice 3
Point délicat : $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{L}$, et non $10\ \text{L}$.

Réponse
Volume. La piscine est un pavé :

$$\begin{aligned} V &= 10 \times 4 \times 1{,}5 \\ &= 60\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

En litres. Or $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{L}$: la piscine contient $60\,000\ \text{L}$.

Durée. La pompe met $60\,000 \div 500 = 120$ minutes.

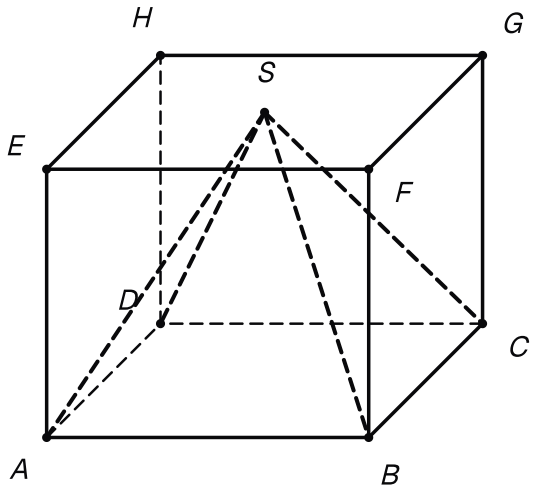
Conclusion. La piscine a un volume de $60\ \text{m}^3$, soit $60\,000\ \text{L}$. La pompe la remplit en 120 minutes, soit 2 heures.

Volume d'une pyramide et d'un cône

Une expérience avec du sable

Prends une pyramide creuse et un prisme droit creux. Ils ont la même base et la même hauteur. Remplis la pyramide de sable, puis verse-la dans le prisme.

Recommence jusqu'à ce que le prisme soit plein. Compte le nombre de pyramides versées.



La pyramide dans le prisme : même base, le carré ABCD, et même hauteur, car le sommet S est sur la face du haut.

Devine : Le volume d'une pyramide

Un pavé a une base carrée de $6\ \text{cm}$ de côté et une hauteur de $5\ \text{cm}$. Son volume vaut $180\ \text{cm}^3$. Quel est le volume d'une pyramide de même base et de même hauteur ?

A. $540\ \text{cm}^3$

Faux.

La pyramide tient dans le pavé : son volume est plus petit.

B. $90\ \text{cm}^3$

Faux.

Avec le sable, il faut trois pyramides, pas deux.

C. $60\ \text{cm}^3$

Juste.

Juste : le tiers de $180\ \text{cm}^3$.

D. $180\ \text{cm}^3$

Faux.

La pyramide se rétrécit vers le sommet : elle contient moins.

Correction

Avec le sable, il faut verser **trois** pyramides pour remplir le prisme : la pyramide contient le tiers du pavé. Ici, $\dfrac{180}{3} = 60\ \text{cm}^3$.

La formule qui suit donne le même résultat :

$$\frac{1}{3} \times 36 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$$

C'est aussi la réponse à la question des deux verres du début : trois verres coniques remplissent le verre cylindrique.

Propriété : Volume d'une pyramide et d'un cône

Le volume V d'une pyramide ou d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de l'aire B de sa base par sa hauteur h :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h.$$

Pour un cône de révolution de rayon r et de hauteur h : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer. L'expérience du sable en donne l'idée.

Exemple : une pyramide à base rectangulaire

Une pyramide a pour base un rectangle de 8 cm sur 5 cm et pour hauteur 9 cm.

Aire de la base. $B = 8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$.

Volume. On applique la formule de la pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times 40 \times 9 = 120 \text{ cm}^3$$

Le volume d'un cône

Exemple : les deux verres du début

Les deux verres ont un rayon de 3 cm et une hauteur de 10 cm.

Verre cylindrique. On multiplie l'aire du disque de base par la hauteur :

$$V = \pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi \text{ cm}^3$$

Verre conique. On prend le tiers de ce produit :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 10 \\ &= 30\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Comparaison. $3 \times 30\pi = 90\pi$: trois verres coniques remplissent bien le cylindre.

Exemple : un cornet de glace

Le cornet de glace est un cône de rayon $3\ \text{cm}$ et de hauteur $12\ \text{cm}$. Son volume vaut :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 12 \\ &= 36\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Valeur arrondie au dixième : $36\pi \approx 113{,}1\ \text{cm}^3$, soit environ $113\ \text{mL}$.

Trouve l'erreur

Pour un cône de rayon $6\ \text{cm}$ et de hauteur $5\ \text{cm}$, Karim écrit : $V = \pi \times 6^2 \times 5 = 180\pi\ \text{cm}^3$. Quelle est son erreur ?

A. Il fallait utiliser le diamètre.

Faux.

La formule utilise bien le rayon, $6\ \text{cm}$.

B. Il a oublié le facteur $\frac{1}{3}$.

Juste.

Juste : $V = \frac{1}{3} \times 180\pi = 60\pi\ \text{cm}^3$.

C. Il a confondu le rayon et la hauteur.

Faux.

Le rayon 6 est au carré, la hauteur 5 ne l'est pas : c'est correct.

D. Il n'y a pas d'erreur.

Faux.

Son calcul donne le volume du cylindre de mêmes dimensions.

Correction

Pour un cône, le volume est le tiers de $\pi r^2 h$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 5 \\ &= 60\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Le nombre $180\pi\ \text{cm}^3$ est le volume du cylindre de même base et de même hauteur.

Attention : le tiers

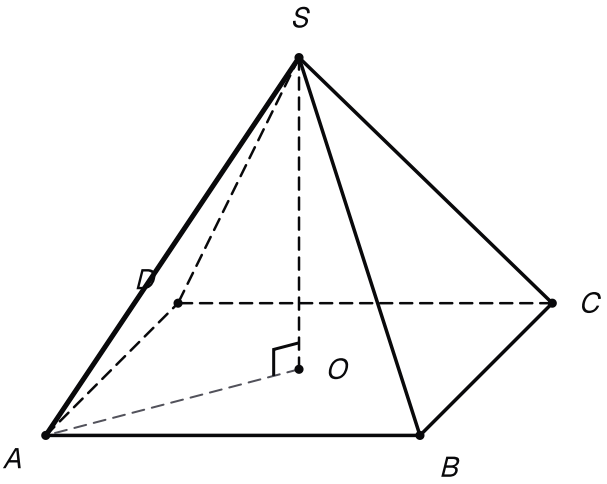
X « Pyramide de base B et de hauteur h : $V = B \times h$. »

✓ Pour une pyramide ou un cône, $V = \frac{1}{3} \times B \times h$. Le volume $B \times h$ est celui du prisme ou du cylindre de même base et de même hauteur. Pense au sable : la pyramide n'en remplit que le tiers.

La hauteur, pas l'arête

La **hauteur** d'une pyramide ou d'un cône part du sommet et tombe perpendiculairement sur la base. Une arête latérale, ou une génératrice, part aussi du sommet. Mais elle est penchée : elle est plus longue que la hauteur.

Dans un calcul de volume, c'est la hauteur qui sert.



Dans la pyramide SABCD, la hauteur [SO] tombe à angle droit au centre O de la base ; l'arête latérale [SA] est penchée, donc plus longue.

Attention : la génératrice n'est pas la hauteur

✗ « Un cône de rayon $9\ \text{cm}$ a une génératrice de $15\ \text{cm}$, donc sa hauteur mesure $15\ \text{cm}$. »

✓ La hauteur, un rayon et une génératrice forment un triangle rectangle. La génératrice en est l'hypoténuse.

La hauteur vaut $12\ \text{cm}$, car :

$$\begin{aligned} 15^2 - 9^2 &= 225 - 81 \\ &= 144 = 12^2 \end{aligned}$$

La section suivante détaille ce calcul.

À toi : Une tente et un cornet

Une tente a la forme d'une pyramide à base carrée de $3\ \text{m}$ de côté et de hauteur $2\ \text{m}$. Un cornet a la forme d'un cône de rayon $4\ \text{cm}$ et de hauteur $9\ \text{cm}$.

Calcule leurs volumes. Pour le cornet, donne la valeur exacte, puis arrondie au dixième. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord l'aire de chaque base : un carré, puis un disque.
Indice 2
Applique $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ dans les deux cas.
Indice 3
Point délicat : n'oublie pas le facteur $\dfrac{1}{3}$, et garde π jusqu'à la fin.

Réponse
Tente. La base est un carré : $B = 3 \times 3 = 9\ \text{m}^2$. Donc :

$$V = \frac{1}{3} \times 9 \times 2 = 6\ \text{m}^3$$

Cornet. La base est un disque : $B = \pi \times 4^2 = 16\pi\ \text{cm}^2$. Donc :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 16\pi \times 9 \\ &= 48\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Valeur arrondie au dixième : $48\pi \approx 150{,}8\ \text{cm}^3$.

Conclusion. La tente a un volume de $6\ \text{m}^3$ et le cornet un volume de $48\pi\ \text{cm}^3$.

Le mot du prof. Un seul réflexe sépare les deux familles de solides : le tiers. Un solide qui finit en pointe reçoit le facteur $\dfrac{1}{3}$.

Le théorème de Pythagore dans les solides

Un triangle rectangle caché

Rappel du chapitre sur le théorème de Pythagore : si un triangle ABC est rectangle en A, alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Dans un solide, le travail consiste à **trouver** le bon triangle rectangle, puis à **justifier** l'angle droit.

Devine : Un crayon dans une boîte

Le fond d'une boîte est un rectangle de $8\ \text{cm}$ sur $6\ \text{cm}$. Quelle est la longueur du plus long crayon qu'on peut poser à plat au fond ?

A. $10\ \text{cm}$
Juste.
Juste : c'est la diagonale du rectangle, car $8^2 + 6^2 = 100$.

B. $14\ \text{cm}$

Faux.

Le crayon ne suit pas deux côtés : il va en ligne droite.

C. $8\ \text{cm}$

Faux.

En biais, on gagne de la place : la diagonale est plus longue.

D. $48\ \text{cm}$

Faux.

C'est l'aire du fond, en cm^2, pas une longueur.

Correction

Le plus long crayon suit une diagonale du fond. Cette diagonale et deux côtés du rectangle forment un triangle rectangle.

D'après le théorème de Pythagore, la diagonale d vérifie :

$$\begin{aligned} d^2 &= 8^2 + 6^2 \\ &= 64 + 36 = 100 \end{aligned}$$

Donc $d = 10\ \text{cm}$.

Méthode : Pythagore dans un solide

1. **Chercher** un triangle rectangle qui contient la longueur cherchée.
2. **Justifier** l'angle droit : une face rectangulaire, une arête perpendiculaire à une face, ou la hauteur perpendiculaire à la base.
3. **Écrire** l'égalité de Pythagore, l'hypoténuse seule d'un côté.
4. **Calculer** la longueur, puis l'utiliser pour une aire ou un volume.

La grande diagonale d'un pavé

Exemple : deux fois Pythagore dans un pavé

Un carton $ABCDEFGH$ a pour fond le rectangle $ABCD$, avec $AB = 12\ \text{cm}$ et $BC = 9\ \text{cm}$. L'arête $[CG]$ mesure $8\ \text{cm}$. On cherche la longueur AG.

Angle droit en B. Le triangle ABC est rectangle en B, car $ABCD$ est un rectangle.

Pythagore dans ABC. L'hypoténuse est $[AC]$:

$$\begin{aligned} AC^2 &= 12^2 + 9^2 \\ &= 144 + 81 = 225 \end{aligned}$$

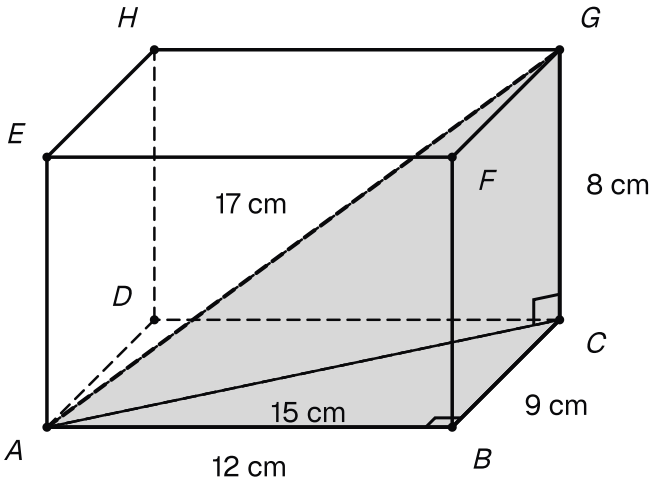
Donc $AC = 15\ \text{cm}$.

Angle droit en C. L'arête $[CG]$ est perpendiculaire au fond, donc à la droite (AC) : le triangle ACG est rectangle en C.

Pythagore dans ACG. L'hypoténuse est $[AG]$:

$$\begin{aligned} AG^2 &= 15^2 + 8^2 \\ &= 225 + 64 = 289 \end{aligned}$$

Donc $AG = 17\ \text{cm}$.



Le carton ABCDEFGH : Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B, donne AC = 15 cm, puis dans le triangle ACG, rectangle en C, AG = 17 cm.

Vérifie : Un autre angle droit

Dans le carton $ABCDEFGH$ de l'exemple, on veut la longueur BG. Pourquoi le triangle BCG est-il rectangle en C ?

A. Car BC et CG sont égales.

Faux.

$BC = 9\ \text{cm}$ et $CG = 8\ \text{cm}$: elles ne sont pas égales.

B. Car le triangle ABC est rectangle en B.

Faux.

Cela donne l'angle droit en B du triangle ABC, pas celui en C du triangle BCG.

C. Car $[CG]$ est perpendiculaire au fond.

Juste.

Juste : elle est donc perpendiculaire à (BC), tracée dans le fond.

D. Car $[BG]$ est le plus long côté.

Faux.
Être le plus long côté ne suffit pas à donner un angle droit.

Correction
L'arête $[CG]$ est perpendiculaire au fond $ABCD$. Elle est donc perpendiculaire à toute droite du fond qui passe par C, en particulier à (BC). Le triangle BCG est rectangle en C, et son hypoténuse est $[BG]$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BG^2 &= BC^2 + CG^2 \\ &= 9^2 + 8^2 \\ &= 81 + 64 = 145 \end{aligned}$$

La hauteur d'un cône, d'une pyramide

Exemple : la hauteur d'un cône, puis son volume

Un cône de sommet S a pour base un disque de centre O et de rayon $8\ \text{cm}$. Une génératrice $[SM]$ mesure $17\ \text{cm}$. On cherche son volume.

Angle droit. La hauteur $[SO]$ est perpendiculaire à la base : le triangle SOM est rectangle en O.

Pythagore. L'hypoténuse est la génératrice : $SM^2 = SO^2 + OM^2$. On en tire SO^2 :

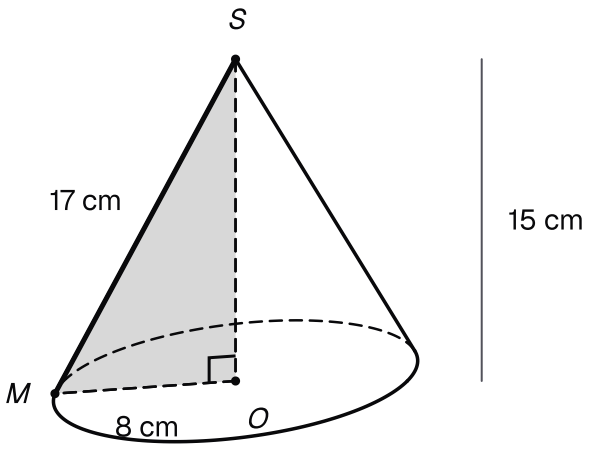
$$\begin{aligned} SO^2 &= SM^2 - OM^2 \\ &= 17^2 - 8^2 \\ &= 289 - 64 = 225 \end{aligned}$$

Donc $SO = 15\ \text{cm}$.

Volume. On applique la formule du cône :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times 15 \\ &= 320\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Valeur arrondie au dixième. $320\pi \approx 1\,005{,}3\ \text{cm}^3$.



Le triangle SOM, rectangle en O, dans le cône : la génératrice [SM] de 17 cm est l'hypoténuse, le rayon [OM] mesure 8 cm et la hauteur [SO] 15 cm.

Exemple : la hauteur d'une pyramide

Une pyramide $SABCD$ a pour base un carré de côté $6\ \text{cm}$ et de centre O, et pour hauteur $[SO]$. Soit I le milieu de $[BC]$. Le segment $[SI]$, hauteur de la face SBC, mesure $5\ \text{cm}$.

La longueur OI. O est le milieu de $[AC]$ et I celui de $[BC]$. Dans le triangle ABC, le segment qui joint ces deux milieux mesure la moitié de AB :

$$OI = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3\ \text{cm}$$

Angle droit. La droite (SO) est perpendiculaire à la base, donc à (OI) : le triangle SOI est rectangle en O.

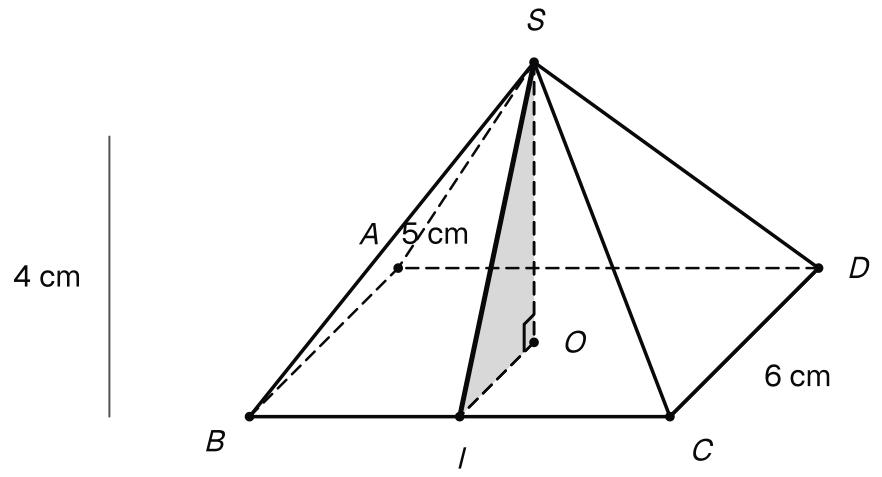
Pythagore. L'hypoténuse est $[SI]$: $SI^2 = SO^2 + OI^2$. Donc :

$$SO^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

et $SO = 4\ \text{cm}$.

Volume. La base est un carré d'aire 6^2 :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 6^2 \times 4 \\ &= \frac{1}{3} \times 36 \times 4 \\ &= 48\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$



Dans la pyramide SABCD, le triangle SOI est rectangle en O : OI = 3 cm, SI = 5 cm sur la face SBC, et la hauteur SO = 4 cm.

Attention : où est l'hypoténuse ?

✗ « $SO^2 = 8^2 + 17^2$. »

✓ Dans le triangle SOM, rectangle en O, l'hypoténuse est la génératrice $[SM]$. On écrit $SM^2 = SO^2 + OM^2$, donc $SO^2 = 17^2 - 8^2$. Un côté de l'angle droit est plus court que l'hypoténuse : la hauteur est plus petite que la génératrice.

À toi, puis le Coin examen

À toi : Un entonnoir

Un entonnoir a la forme d'un cône de rayon $5\ \text{cm}$ et de génératrice $13\ \text{cm}$. Calcule sa hauteur, puis son volume.

Donne la valeur exacte du volume, puis sa valeur arrondie au dixième. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La hauteur, un rayon et une génératrice forment un triangle rectangle.
Indice 2
La génératrice est l'hypoténuse : $h^2 = 13^2 - 5^2$.
Indice 3
Point délicat : le volume d'un cône contient le facteur $\frac{1}{3}$.

Réponse

Hauteur. La hauteur est perpendiculaire à la base : le triangle formé par la hauteur, un rayon et une génératrice est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} h^2 &= 13^2 - 5^2 \\ &= 169 - 25 = 144 \end{aligned}$$

Donc $h = 12\ \text{cm}$.

Volume. On applique la formule du cône :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 \\ &= 100\pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Valeur arrondie au dixième : $100\pi \approx 314{,}2\ \text{cm}^3$.

Conclusion. L'entonnoir a une hauteur de $12\ \text{cm}$ et un volume de $100\pi\ \text{cm}^3$.

Remarque : Coin examen : la hauteur d'une pyramide régulière

Niveau examen régional. $SABCD$ est une pyramide **régulière** de hauteur $[SO]$: sa base est un carré de côté $8\ \text{cm}$ et de centre O, et $SA = 9\ \text{cm}$. Une pyramide régulière a pour base un polygone régulier, ici un carré, et le pied de sa hauteur est le centre de la base.

On demande la hauteur SO, puis le volume. Voici la rédaction attendue.

« Le triangle ABC est rectangle en B, car $ABCD$ est un carré. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 8^2 + 8^2 \\ &= 64 + 64 = 128 \end{aligned}$$

Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, donc O est le milieu de $[AC]$ et $OA^2 = \dfrac{AC^2}{4} = \dfrac{128}{4} = 32$. »

Remarque : Coin examen : la suite de la rédaction

« La hauteur $[SO]$ est perpendiculaire à la base, donc le triangle SOA est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore, $SA^2 = SO^2 + OA^2$. Donc :

$$\begin{aligned} SO^2 &= 9^2 - 32 \\ &= 81 - 32 = 49 \end{aligned}$$

et $SO = 7\ \text{cm}$. Le volume vaut :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 8^2 \times 7 \\ &= \frac{448}{3}\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

soit $\frac{448}{3} \approx 149{,}3\ \text{cm}^3$ (valeur arrondie au dixième). »

Chaque angle droit est justifié avant d'écrire l'égalité : c'est ce qu'on attend de toi.

Le mot du prof. Dans un solide, Pythagore se cache dans un triangle rectangle. Tu sais maintenant le trouver, le justifier et en tirer une hauteur.

Agrandissement et réduction

Des cubes de plus en plus grands

Devine : Doubler l'arête

Avec des petits cubes de $1\ \text{cm}$ d'arête, tu construis un cube plein de $2\ \text{cm}$ d'arête. Combien de petits cubes te faut-il ?

A. 2 cubes.
Faux.
En doublant l'arête, tu doubles la longueur, la largeur et la hauteur.

B. 4 cubes.
Faux.
C'est une seule couche : il en faut deux.

C. 6 cubes.
Faux.
Le nombre de faces d'un cube ne compte pas ici.

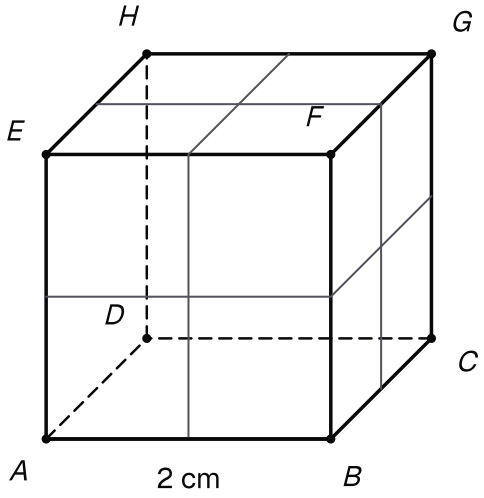
D. 8 cubes.
Juste.
Juste : deux couches de quatre cubes.

Correction
Une couche compte $2 \times 2 = 4$ petits cubes, et il y a 2 couches : $2 \times 2 \times 2 = 8$ petits cubes. L'arête est multipliée par 2, mais le volume est multiplié par 8.

En clair. Continue avec un cube de $3\ \text{cm}$ d'arête.

- Arêtes : 1, 2, 3, en cm.
- Aires d'une face : 1, 4, 9, en cm^2.
- Volumes : 1, 8, 27, en cm^3.

Les aires suivent les carrés, les volumes suivent les cubes. Le cube d'arête $3\ \text{cm}$ est un **agrandissement** du petit cube.



Le cube de 2 cm d'arête découpé en cubes d'un centimètre : deux couches de quatre petits cubes.

Définition : Agrandissement et réduction

Soit k un nombre strictement positif. **Agrandir ou réduire** une figure ou un solide dans le **rapport** k, c'est construire une figure ou un solide de même forme dont **toutes les longueurs** sont multipliées par k. Les angles ne changent pas.

- Si $k > 1$, c'est un **agrandissement**.
- Si $0 < k < 1$, c'est une **réduction**.

Le rapport k est le quotient d'une longueur de la nouvelle figure par la longueur correspondante de la figure de départ.

Exemple : agrandir et réduire une photo

Une photo mesure $10\ \text{cm}$ sur $15\ \text{cm}$.

- Son agrandissement mesure $20\ \text{cm}$ sur $30\ \text{cm}$: le rapport est $k = \dfrac{20}{10} = 2$.
- Une réduction de la même photo mesure $5\ \text{cm}$ sur $7{,}5\ \text{cm}$: $k = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

Dans les deux cas, chaque longueur est multipliée par k.

Vérifie : Le rapport d'une maquette

Une voiture mesure $4\ \text{m}$ de long. Sa maquette mesure $20\ \text{cm}$ de long. Quel est le rapport de réduction k ?

A. $k = 20$

Faux.

Une réduction a un rapport inférieur à 1 : tu as divisé dans le mauvais sens.

B. $k = \dfrac{1}{20}$

Juste.

Juste : $20\ \text{cm}$ divisé par $400\ \text{cm}$.

C. $k = 5$

Faux.

Tu as divisé 20 par 4 sans convertir : les deux longueurs doivent être dans la même unité.

D. $k = \dfrac{1}{5}$

Faux.

Tu as divisé 4 par 20 sans convertir les mètres en centimètres.

Correction

On convertit : $4\ \text{m} = 400\ \text{cm}$. Le rapport est la longueur de la maquette divisée par la longueur réelle :

$$k = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}$$

Comme $k < 1$, c'est une réduction.

L'effet sur les aires et les volumes

En clair. Un rectangle de $3\ \text{cm}$ sur $2\ \text{cm}$ a une aire de $6\ \text{cm}^2$. Agrandi de rapport 2, il mesure $6\ \text{cm}$ sur $4\ \text{cm}$: son aire vaut $24\ \text{cm}^2$, c'est-à-dire 4×6.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans une aire, on multiplie deux longueurs, et chacune est multipliée par k. La propriété suivante le dit pour les aires et pour les volumes.

Propriété : Effet sur les longueurs, les aires et les volumes

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- les **longueurs** sont multipliées par k ;
- les **aires** sont multipliées par k^2 ;
- les **volumes** sont multipliés par k^3.

La démonstration est faite pour les figures et les solides usuels. Pour une figure quelconque, la propriété est admise.

Démonstration

Étape 1. Par la définition de l'agrandissement et de la réduction, chaque longueur est multipliée par k.

Étape 2. Aires. Un rectangle de dimensions L et ℓ devient un rectangle de dimensions kL et $k\ell$. Sa nouvelle aire est $kL \times k\ell = k^2 \times L\ell$. De même, un triangle de base b et de hauteur t donne $\dfrac{kb \times kt}{2} = k^2 \times \dfrac{bt}{2}$, et un disque donne $\pi(kr)^2 = k^2 \times \pi r^2$. Une base polygonale se découpe en triangles : son aire est donc aussi multipliée par k^2.

Étape 3. Volumes. Pour un prisme droit ou un cylindre, l'aire de la base devient k^2B (étape 2) et la hauteur devient kh (étape 1). Le nouveau volume est $k^2B \times kh = k^3 \times Bh$. Pour une pyramide ou un cône, on obtient de même $\dfrac{1}{3} \times k^2B \times kh = k^3 \times \dfrac{1}{3}Bh$.

Étape 4. Donc les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste de la preuve : **remplacer chaque longueur par k fois cette longueur** dans la formule, puis regrouper les facteurs k.

Une aire est un produit de deux longueurs : on obtient $k \times k = k^2$. Une base polygonale se découpe en triangles, donc son aire est aussi multipliée par k^2. Un volume est une aire de base multipliée par une hauteur : on obtient $k^2 \times k = k^3$.

La preuve repose sur les formules d'aires et de volumes que tu connais.

Vérifie : Le geste de la preuve sur un cylindre

Un cylindre a pour rayon r et pour hauteur h. On l'agrandit ou on le réduit dans le rapport k. Avec le geste de la preuve, pourquoi son volume est-il multiplié par k^3 ?

A. Car $\pi k r^2 \times kh = k^2 \times \pi r^2 h$.
Faux.
Le rayon devient kr, et c'est kr tout entier qui est au carré : $(kr)^2 = k^2 r^2$. Ton calcul donne d'ailleurs k^2, et non k^3.

B. Car son volume est multiplié par $3k$.
Faux.
Avec $k = 2$, le volume est multiplié par 8, et non par 6.

C. Car $\pi(kr)^2 \times kh = k^3 \times \pi r^2 h$.
Juste.
Juste : le rayon devient kr et la hauteur devient kh.

D. Car seule la hauteur est multipliée par k.
Faux.

Le rayon aussi est une longueur : il devient kr.

Correction

Le rayon devient kr et la hauteur devient kh. La base est un disque d'aire $B = \pi r^2$, qui devient :

$$\pi(kr)^2 = k^2 \times \pi r^2$$

Ainsi, l'aire de la base devient $k^2 B$ et la hauteur devient kh. Le nouveau volume vaut :

$$k^2 B \times kh = k^3 \times Bh$$

Il est multiplié par k^3.

Exemple : la maquette d'une piscine

Une piscine mesure $10\ \text{m}$ sur $4\ \text{m}$, avec $1{,}5\ \text{m}$ de profondeur. Sa maquette est une réduction de rapport $k = \dfrac{1}{50}$. On travaille en centimètres.

Longueurs réelles. $10\ \text{m} = 1\,000\ \text{cm}$, $4\ \text{m} = 400\ \text{cm}$ et $1{,}5\ \text{m} = 150\ \text{cm}$.

Longueurs de la maquette. On multiplie chaque longueur par k : $1\,000 \times \dfrac{1}{50} = 20$, $400 \times \dfrac{1}{50} = 8$ et $150 \times \dfrac{1}{50} = 3$, en cm.

Aire du fond. L'aire réelle vaut $1\,000 \times 400 = 400\,000\ \text{cm}^2$. Pour la maquette, on multiplie par $k^2 = \dfrac{1}{50^2} = \dfrac{1}{2\,500}$:

$$400\,000 \times \frac{1}{2\,500} = 160\ \text{cm}^2$$

Volume. Le volume réel vaut :

$$\begin{aligned} &1\,000 \times 400 \times 150 \\ &= 60\,000\,000\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Pour la maquette, on multiplie par $k^3 = \dfrac{1}{50^3} = \dfrac{1}{125\,000}$:

$$\begin{aligned} &60\,000\,000 \times \frac{1}{125\,000} \\ &= 480\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Contrôle sur la maquette. $20 \times 8 = 160$ et $20 \times 8 \times 3 = 480$.

Retrouver le rapport

Méthode : trouver et utiliser le rapport

1. **Calculer** k : une longueur de la nouvelle figure divisée par la longueur correspondante de départ, dans la même unité.
2. **Conclure** : agrandissement si $k > 1$, réduction si $0 < k < 1$.

3. **Multiplier** les longueurs par k, les aires par k^2, les volumes par k^3.
4. **Remonter** à k depuis un rapport d'aires, égal à k^2, ou de volumes, égal à k^3.

Exemple : remonter au rapport

- Les aires d'une figure sont multipliées par 9, donc $k^2 = 9$. Comme $k > 0$, $k = 3$: c'est un agrandissement.
- Le volume d'un solide est divisé par 8. Alors $k^3 = \frac{1}{8}$, et $k = \frac{1}{2}$, car $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$: c'est une réduction.

Vérifie : Du volume aux longueurs

Un solide est agrandi : son volume est multiplié par 64. Par combien ses longueurs sont-elles multipliées ?

A. Par 8.

Faux.
Tu as cherché $k^2 = 64$: pour un volume, c'est k^3.

B. Par $\frac{64}{3}$.

Faux.
On ne divise pas par 3 : on cherche le nombre dont le cube vaut 64.

C. Par 64.

Faux.
Le volume change plus vite que les longueurs.

D. Par 4.

Juste.
Juste : $4^3 = 64$.

Correction

Le volume est multiplié par k^3, donc $k^3 = 64$. Or $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$: les longueurs sont multipliées par $k = 4$. Les aires, elles, sont multipliées par $4^2 = 16$.

Attention : les volumes ne suivent pas les longueurs

✗ « On triple les longueurs d'un cube, donc on triple son volume. »

✓ Le volume est multiplié par $3^3 = 27$. Un cube d'arête $1\ \text{cm}$ a un volume de $1\ \text{cm}^3$; un cube d'arête $3\ \text{cm}$, un volume de $27\ \text{cm}^3$. Les aires, elles, sont multipliées par $3^2 = 9$.

À toi

À toi : Un aquarium réduit

Un aquarium contient $64\ \mathrm{L}$ et son fond a une aire de $1\,200\ \mathrm{cm}^2$. On fabrique un aquarium réduit de rapport $k = \dfrac{3}{4}$.

Calcule l'aire de son fond, puis sa contenance. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

C'est une réduction : chaque longueur est multipliée par $\dfrac{3}{4}$.

Indice 2

Le fond est une aire : multiplie par k^2. La contenance est un volume : multiplie par k^3.

Indice 3

Point délicat : $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$, et non $\dfrac{9}{16}$, qui est k^2.

Réponse

Aire du fond. Une aire est multipliée par k^2 :

$$1\,200 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1\,200 \times \frac{9}{16} = 675\ \mathrm{cm}^2$$

Contenance. Un volume est multiplié par k^3 :

$$64 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 64 \times \frac{27}{64} = 27\ \mathrm{L}$$

Conclusion. Le fond de l'aquarium réduit a une aire de $675\ \mathrm{cm}^2$, et sa contenance est de $27\ \mathrm{L}$.

Le mot du prof. Longueurs, aires, volumes : k, k^2, k^3. Avec ces trois puissances, tu passes d'une maquette à l'objet réel sans tout recalculer.

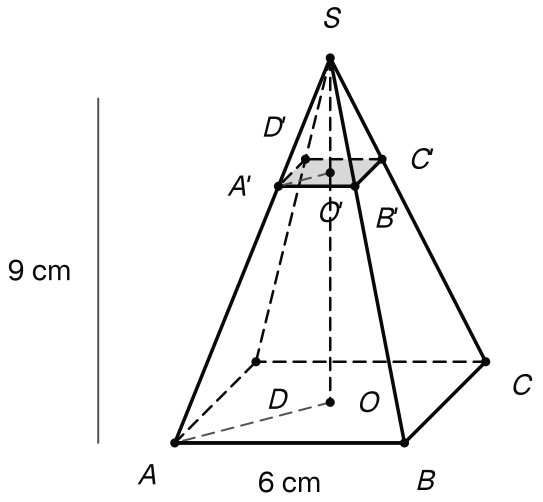
Couper une pyramide ou un cône

Couper une pyramide

Une pyramide $SABCD$ a pour base un carré de côté $6\ \mathrm{cm}$ et de centre O. Sa hauteur est $[SO]$, avec $SO = 9\ \mathrm{cm}$.

On la coupe par un plan **parallèle à la base**, qui coupe $[SO]$ en O', avec $SO' = 3\ \mathrm{cm}$. Ce plan coupe $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$ en A', B', C' et D'. Le quadrilatère $A'B'C'D'$ est la **section**.

Dessine la figure sur ton cahier.



La pyramide SABCD de hauteur SO = 9 cm, coupée par un plan parallèle à la base qui passe par O' : la section A'B'C'D' est teintée.

Devine : La taille de la section

Rappel du chapitre sur le théorème de Thalès : dans un triangle SAB, si A' est sur $[SA]$, B' sur $[SB]$ et $(A'B')$ est parallèle à (AB), alors

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB}$$

Dans un solide, cherche le triangle qui contient la longueur voulue. Dans cette pyramide, combien mesure le côté $[A'B']$ de la section ?

A. $6\ \text{cm}$

Faux.

La section est plus près du sommet : elle est plus petite que la base.

B. $3\ \text{cm}$

Faux.

C'est la longueur SO', pas un côté de la section.

C. $2\ \text{cm}$

Juste.

Juste : le tiers de $6\ \text{cm}$, car SO' est le tiers de SO.

D. $4\ \text{cm}$

Faux.

La section est au tiers de la hauteur en partant du sommet, pas aux deux tiers.

Correction

Le plan est parallèle à la base. Dans la face SAB, la droite $(A'B')$ est donc parallèle à (AB) (nous l'admettrons, voir la propriété suivante). D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{SA'}{SA}$.

De même, dans le triangle SOA, $(O'A')$ est parallèle à (OA), donc :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Donc $A'B' = 6 \times \dfrac{1}{3} = 2\ \text{cm}$.

Propriété : Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base

On coupe une pyramide, ou un cône de révolution, de sommet S et de hauteur $[SO]$ par un plan **parallèle à sa base**. Ce plan coupe la hauteur en un point O'.

- La **section** obtenue est une réduction de la base, de rapport $k = \dfrac{SO'}{SO}$.
- La petite pyramide, ou le petit cône, de sommet S est une réduction de la grande pyramide, ou du grand cône, dans le même rapport k.

Dans chaque face latérale, le côté de la section est parallèle au côté de la base : le théorème de Thalès permet d'y calculer les longueurs.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer. Dans chaque face, le théorème de Thalès permet de calculer les longueurs.

Exemple : la section d'une autre pyramide

Une autre pyramide, de sommet S, a pour base un carré de côté $10\ \text{cm}$ et pour hauteur $[SO]$, avec $SO = 15\ \text{cm}$. Un plan parallèle à la base coupe $[SO]$ en O', avec $SO' = 9\ \text{cm}$.

Rapport. Le rapport de réduction vaut :

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Côté de la section. La section est un carré de côté $10 \times \dfrac{3}{5} = 6\ \text{cm}$.

Aire de la section. La base a pour aire $10 \times 10 = 100\ \text{cm}^2$. Une aire est multipliée par k^2 :

$$100 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$= 100 \times \frac{9}{25} = 36\ \text{cm}^2$$

Contrôle : $6 \times 6 = 36$.

Petite pyramide et tronc

Méthode : pyramide ou cône coupé

1. **Vérifier** que le plan de coupe est parallèle à la base.
2. **Calculer** $k = \dfrac{SO'}{SO}$, ou le quotient de deux autres longueurs correspondantes.
3. **Multiplier** les longueurs par k, l'aire de la base par k^2, le volume par k^3.
4. **Retrancher** pour un tronc : le grand volume moins le petit.

Exemple : le tronc de pyramide

On reprend la pyramide de l'exemple précédent : base de $100\ \text{cm}^2$, $SO = 15\ \text{cm}$ et $k = \dfrac{3}{5}$.

Grande pyramide. Son volume vaut :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 100 \times 15 \\ &= 500\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Petite pyramide. C'est une réduction de rapport k : son volume est multiplié par k^3.

$$\begin{aligned} V' &= 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \\ &= 500 \times \frac{27}{125} \\ &= 108\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Contrôle avec la formule : $\dfrac{1}{3} \times 36 \times 9 = 108$.

Tronc. Le **tronc de pyramide** est la partie qui reste sous le plan. Son volume vaut $500 - 108 = 392\ \text{cm}^3$.

Vérifie : Le volume d'un tronc

Une pyramide a un volume de $270\ \text{cm}^3$. On la coupe parallèlement à la base, avec $k = \dfrac{2}{3}$. Quel est le volume du tronc ?

A. $80\ \text{cm}^3$

Faux.

C'est la petite pyramide : il reste à la retrancher.

B. $90\ \text{cm}^3$

Faux.

Tu as multiplié par k au lieu de k^3 : $270 - 180 = 90$.

C. $180\ \text{cm}^3$

Faux.

Multiplier par k convient aux longueurs, pas aux volumes.

D. $190\ \text{cm}^3$

Juste.

Juste : $270 - 80 = 190$.

Correction

La petite pyramide est une réduction de rapport k. Son volume vaut :

$$270 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 270 \times \frac{8}{27} = 80\ \text{cm}^3$$

Le tronc a pour volume $270 - 80 = 190\ \text{cm}^3$.

Un verre conique

Exemple : un verre rempli à mi-hauteur

Un verre a la forme d'un cône, pointe en bas, de rayon $4\ \text{cm}$ et de hauteur $12\ \text{cm}$. On le remplit d'eau jusqu'à mi-hauteur.

Volume du verre.

$$\frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 12 = 64\pi\ \text{cm}^3$$

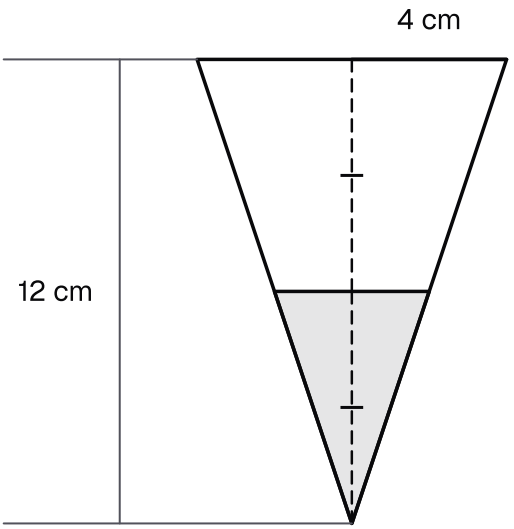
Rapport. La surface de l'eau est parallèle à la base du cône. L'eau forme donc un petit cône, réduction du grand de rapport $k = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

Volume de l'eau. On multiplie le volume du verre par k^3 :

$$64\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 8\pi\ \text{cm}^3$$

C'est un huitième du verre.

Valeurs arrondies au dixième. $64\pi \approx 201{,}1\ \text{cm}^3$ et $8\pi \approx 25{,}1\ \text{cm}^3$.



Le verre conique vu de face, pointe en bas : 12 cm de haut, rayon 4 cm, et l'eau jusqu'à mi-hauteur forme un petit cône teinté.

Attention : mi-hauteur n'est pas moitié

✗ « Rempli à mi-hauteur, le verre conique est à moitié plein. »

✓ L'eau forme une réduction de rapport $\frac{1}{2}$: son volume est multiplié par $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Le verre n'est rempli qu'au huitième. La partie vide, près de l'ouverture, est la plus large.

À toi : Un cône coupé

Un cône de sommet S a pour rayon $6\ \text{cm}$ et pour hauteur $SO = 15\ \text{cm}$. On le coupe par un plan parallèle à la base, à $5\ \text{cm}$ du sommet.

Calcule le rayon de la section, le volume du petit cône, puis celui du tronc de cône. Donne les valeurs exactes, puis le volume du tronc arrondi au dixième. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par le rapport $k = \dfrac{SO'}{SO}$.

Indice 2

Le rayon est multiplié par k, le volume par k^3.

Indice 3

Point délicat : le tronc est la différence entre le grand cône et le petit cône.

Réponse

Rapport. $k = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$. Rayon de la section : $6 \times \dfrac{1}{3} = 2\ \text{cm}$.

Grand cône.

$$V = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 15$$
$$= 180\pi \text{ cm}^3$$

Petit cône. Son volume est multiplié par $k^3 = \frac{1}{27}$:

$$V' = 180\pi \times \frac{1}{27}$$
$$= \frac{20\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Tronc. On retranche le petit cône du grand :

$$180\pi - \frac{20\pi}{3} = \frac{520\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Valeur arrondie au dixième : $\frac{520\pi}{3} \approx 544{,}5 \text{ cm}^3$.

Conclusion. La section a un rayon de 2 cm. Le petit cône a un volume de $\frac{20\pi}{3}$ cm^3 et le tronc un volume de $\frac{520\pi}{3}$ cm^3.

Coin examen

Remarque : Coin examen : une pyramide coupée

Niveau examen régional. $SABCD$ est une pyramide de hauteur $[SO]$, où O est le pied de la hauteur, avec $SO = 12$ cm ; sa base est un rectangle avec $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm.

Un plan parallèle à la base coupe $[SO]$ en O', avec $SO' = 9$ cm, et $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$ en A', B', C', D'. Voici la rédaction attendue.

« Dans le triangle SOA, O' est sur $[SO]$, A' est sur $[SA]$, et $(O'A')$ est parallèle à (OA), car le plan de coupe est parallèle à la base. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Dans la face SAB, $(A'B')$ est parallèle à (AB), donc, d'après le théorème de Thalès :

$$A'B' = AB \times \frac{SA'}{SA}$$
$$= 8 \times \frac{3}{4} = 6 \text{ cm}$$

Le côté $[A'B']$ de la section mesure donc 6 cm. »

La section réduit la base dans le rapport $k = \frac{3}{4}$. De même, $B'C' = 6 \times \frac{3}{4} = 4{,}5$ cm.

Remarque : Coin examen : les volumes

« Le volume de la pyramide $SABCD$ est :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 8 \times 6 \times 12 \\ &= 192 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de rapport $\frac{3}{4}$, donc :

$$\begin{aligned} V' &= 192 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &= 192 \times \frac{27}{64} \\ &= 81 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Le volume du tronc est $192 - 81 = 111 \text{ cm}^3$. »

Le mot « parallèle » justifie la réduction : écris-le à chaque fois.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : les formules, toutes admises

Solide	Volume	Aire latérale
Parallélépipède rectangle	$V = a \times b \times c$	périmètre de la base $\times$ hauteur
Cube d'arête a	$V = a^3$	$4a^2$
Prisme droit	$V = B \times h$	périmètre de la base $\times h$
Cylindre	$V = \pi r^2 h$	$2\pi r h$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} \times B \times h$	somme des faces latérales
Cône	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi r a$

Aire totale = aire latérale + aire de la base, ou des deux bases.

À retenir : agrandir ou réduire

- Rapport k : une longueur d'arrivée divisée par la longueur de départ correspondante.
- Longueurs multipliées par k, aires par k^2, volumes par k^3.
- Pyramide ou cône coupé parallèlement à la base : $k = \frac{SO'}{SO}$, puis le tronc par différence.

Quelle méthode pour quelle question ?

- Un volume : repère la base et la hauteur, puis applique la formule.
- Une longueur cachée : cherche un triangle rectangle et justifie l'angle droit.

- Une section parallèle à la base : calcule k, puis utilise k^2 et k^3.
- Une capacité : convertis en dm^3, puis en litres.

Attention : Les erreurs à éviter

✗ Oublier le $\frac{1}{3}$ d'une pyramide ou d'un cône. ✓ $V = \frac{1}{3} \times B \times h$.

✗ Prendre le diamètre pour le rayon. ✓ Le rayon est la moitié du diamètre.

✗ Prendre une génératrice pour la hauteur. ✓ La hauteur est perpendiculaire à la base.

✗ Multiplier un volume par k. ✓ Un volume est multiplié par k^3.

✗ Écrire $1\ \mathrm{m}^3 = 10\ \mathrm{dm}^3$. ✓ $1\ \mathrm{m}^3 = 1\,000\ \mathrm{dm}^3$.

Vérifie : Une dernière question

On double le rayon d'un cylindre sans changer sa hauteur. Par combien son volume est-il multiplié ?

A. Par 2.
Faux.
Le rayon est au carré dans $\pi r^2 h$.

B. Par 4.
Juste.
Juste : $\pi (2r)^2 h = 4 \times \pi r^2 h$.

C. Par 8.
Faux.
Ce n'est pas un agrandissement : la hauteur ne change pas.

Correction
Le nouveau volume vaut :

$$\begin{aligned} &\pi \times (2r)^2 \times h \\ &= \pi \times 4r^2 \times h \\ &= 4 \times \pi r^2 h \end{aligned}$$

Il est multiplié par 4. Ce n'est pas un agrandissement, car la hauteur ne change pas : la règle du cube de k ne s'applique pas.

Vérifie que tu sais :

- nommer les éléments d'un solide et le dessiner en perspective cavalière ;
- calculer une aire latérale et une aire totale ;

- calculer un volume et le convertir en litres ;
- trouver une hauteur avec le théorème de Pythagore ;
- utiliser k, k^2 et k^3, en particulier pour une section parallèle à la base.

Le mot du prof. Tu as commencé avec deux verres et une question. Tu sais maintenant vérifier par le calcul qu'il faut trois cônes pour remplir le cylindre.

Tu sais aussi prévoir le volume d'une maquette. Beau chemin.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul des volumes » (3ac · general · mathematiques)