BURHAN

Résumé : Angles inscrits et angles au centre

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/angles-inscrits-et-angles-au-centre/resume

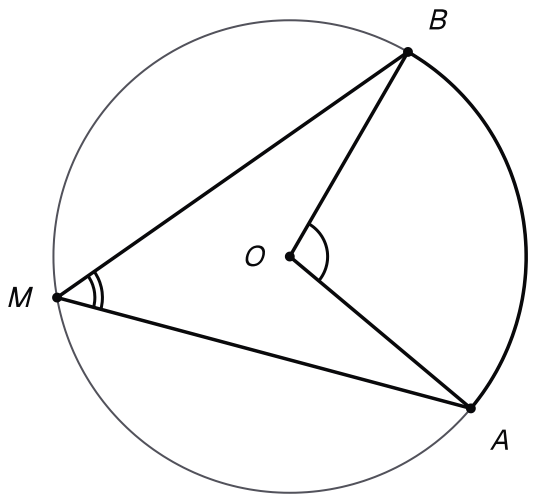
Chapitre	Semestre
Angles inscrits et angles au centre	Semestre 1

Angle au centre, angle inscrit, arc intercepté

À retenir : Une seule idée : un angle et son arc

Dans un cercle, deux points découpent deux arcs. Un angle « regarde » toujours l'un de ces arcs.

Tout le chapitre relie deux angles qui regardent le même arc. Avant tout calcul, repère donc le sommet de l'angle, puis son arc.



Un angle de sommet O et un angle de sommet M regardent la même portion de cercle, l'arc épaissi entre A et B.

Définition : Angle au centre

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A et B deux points de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés.

- Les points A et B partagent le cercle en deux **arcs** : le **petit arc** AB et le **grand arc** AB.
- L'angle $\widehat{AOB}$, dont le sommet est le centre O, est un **angle au centre**.
- Le petit arc AB est situé à l'intérieur de cet angle : on dit que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ **intercepte** le petit arc AB.

Comme A et B ne sont pas diamétralement opposés, l'angle $\widehat{AOB}$ n'est pas plat : sa mesure est strictement comprise entre $0°$ et $180°$.

Remarque : En clair : l'angle au centre

Le sommet d'un angle au centre est le centre O. Ses deux côtés passent par deux points du cercle.

Il intercepte le petit arc, situé entre ses côtés. Cet angle n'est jamais plat.

Définition : Angle inscrit

Soit $\mathcal{C}$ un cercle, et A, B et M trois points distincts de $\mathcal{C}$.

- L'angle $\widehat{AMB}$, dont le sommet M est **sur le cercle** et dont les côtés $[MA)$ et $[MB)$ recoupent le cercle en A et en B, est un **angle inscrit** dans le cercle.
- L'arc AB qui ne contient pas le point M est situé à l'intérieur de cet angle : on dit que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ **intercepte** cet arc AB.

Remarque : En clair : l'angle inscrit

Le sommet d'un angle inscrit est un point du cercle. Chacun de ses côtés coupe encore le cercle en un autre point. L'arc intercepté relie ces deux points sans passer par le sommet.

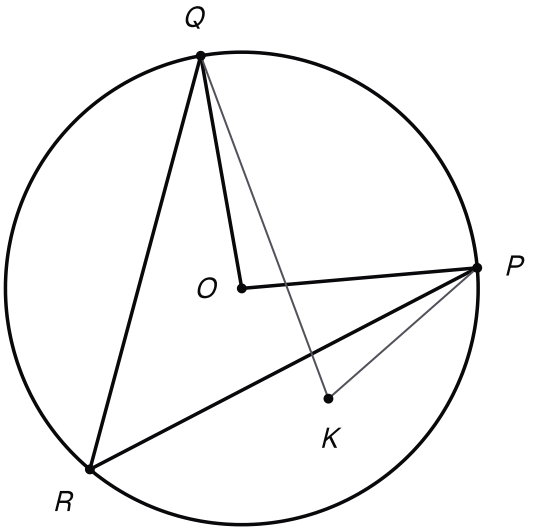
Méthode : reconnaître un angle et son arc

1. **Trouve le sommet.** S'il est en O, l'angle est un angle au centre. S'il est sur le cercle, l'angle peut être inscrit.
2. **Suis les deux côtés.** Pour un angle inscrit, chacun d'eux coupe à nouveau le cercle.
3. **Nomme l'arc.** L'arc intercepté est celui qui se trouve entre les deux côtés, à l'intérieur de l'angle.

Exemple

Figure. Trace un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Place P, Q et R sur le cercle, puis un point K à l'intérieur du disque, différent de O.

Lecture. L'angle $\widehat{POQ}$ est un angle au centre. L'angle $\widehat{PRQ}$ est un angle inscrit : il intercepte l'arc PQ qui ne contient pas R. L'angle $\widehat{PKQ}$ n'est ni l'un ni l'autre.



Les points P, Q et R pris sur le cercle et le point K pris dans le disque : trois sommets différents pour trois angles qui s'appuient sur P et Q.

Attention : Ni au centre, ni sur le cercle : aucune propriété

Un sommet placé dans le disque, mais pas au centre, ne donne aucun des deux angles du chapitre. Aucune des deux propriétés ne vaut alors. Regarde où se trouve le sommet avant d'écrire une égalité.

Remarque : Deux points, deux arcs

Deux points d'un cercle forment toujours deux arcs. Dis donc toujours lequel : le petit arc ou le grand arc.

Dans ce chapitre, un angle au centre est strictement compris entre $0°$ et $180°$. Il intercepte le petit arc.

L'angle inscrit, moitié de l'angle au centre

Propriété : Angle inscrit et angle au centre

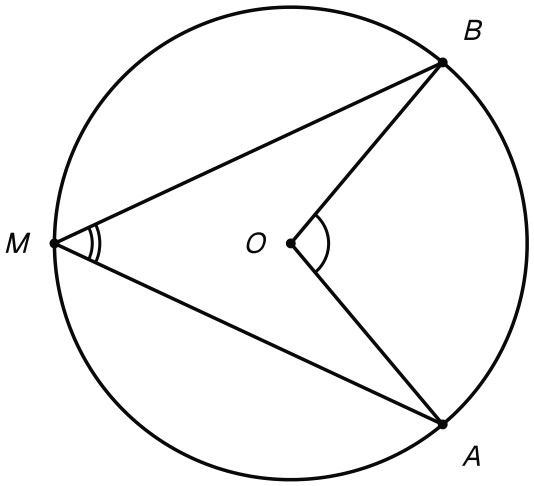
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A et B deux points de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés. Soit M un point du grand arc AB, distinct de A et de B.

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc, le petit arc AB. Alors la mesure de l'angle inscrit est **la moitié** de celle de l'angle au centre :

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2},$$

c'est-à-dire

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}.$$



Le sommet M est sur le grand arc AB : l'angle inscrit AMB, codé par deux arcs, et l'angle au centre AOB, codé par un seul, interceptent tous deux le petit arc AB.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé en mesurant des angles au rapporteur. Tu l'utilises tel quel, en le nommant : propriété « angle inscrit et angle au centre ».

Remarque : En clair : moitié et double

Le sommet M est sur le grand arc AB. Alors l'angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre. Lu dans l'autre sens, l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.

Méthode : passer d'un angle à l'autre

1. **Repère** l'angle au centre et l'angle inscrit.
2. **Contrôle** qu'ils interceptent le même arc : le sommet de l'angle inscrit est sur le grand arc.
3. **Calcule.** Pour l'angle inscrit, divise l'angle au centre par 2. Pour l'angle au centre, multiplie l'angle inscrit par 2.
4. **Écris** le nom de la propriété dans ta phrase.

Exemple

Données. Dans un cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 130°$. Le point M est sur le grand arc AB.

Calcul. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent le petit arc AB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

Exemple

Données. Le point M est sur le grand arc AB d'un cercle de centre O, et $\widehat{AMB} = 43^\circ$.

Calcul. Les deux angles interceptent le petit arc AB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AOB} = 2 \times 43^\circ = 86^\circ$$

Attention : Diviser ou multiplier : ne te trompe pas de sens

On divise par 2 pour aller vers l'angle inscrit. Avec $\widehat{AOB} = 146^\circ$, on trouve $\widehat{AMB} = 73^\circ$. Le résultat 292° est faux.

Contrôle : quand le sommet est sur le grand arc, l'angle inscrit est la moitié d'un angle de moins de 180° : il mesure moins de 90°.

Attention : Le sommet doit être sur le grand arc

Prends $\widehat{AOB} = 134^\circ$ et place M sur le petit arc AB. L'angle $\widehat{AMB}$ intercepte alors le grand arc : la propriété ne donne pas 67°.

Au rapporteur, tu trouverais plus de 90°, un angle obtus. Ce chapitre n'étudie pas ce cas. Avant de diviser par 2, vérifie que le sommet est sur le grand arc.

Attention : Mesurer n'est pas justifier

Le rapporteur donne une valeur approchée. Il aide à deviner un résultat, mais il ne suffit jamais pour le justifier.

Pour justifier, tu cites une propriété du cours ou un rappel de 1re année.

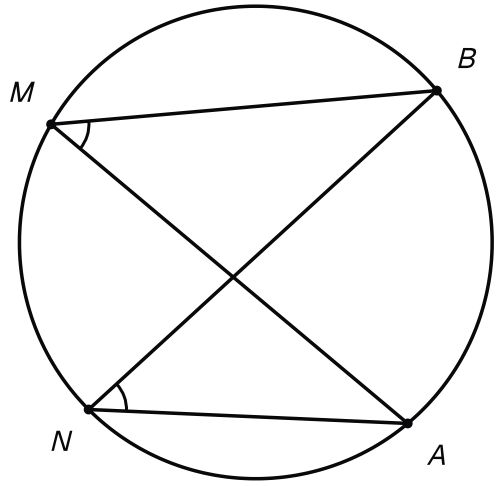
Deux angles inscrits qui interceptent le même arc

Propriété : Angles inscrits qui interceptent le même arc

Soit $\mathcal{C}$ un cercle, et A et B deux points de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés. Soit M et N deux points du grand arc AB, distincts de A et de B.

Les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc, le petit arc AB. Alors ils ont **la même mesure** :

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$



Deux sommets M et N sur le grand arc AB : les angles AMB et ANB portent le même codage, signe de mesures égales.

Remarque : En clair : même arc, même mesure

Deux angles inscrits s'appuient sur les deux mêmes points A et B. Leurs sommets sont tous deux sur le grand arc AB. Alors ces deux angles ont la même mesure.

Méthode : justifier que deux angles inscrits sont égaux

1. **Contrôle** que les deux angles sont inscrits dans le même cercle.
2. **Contrôle** leurs côtés : ils passent par les deux mêmes points du cercle.
3. **Contrôle** leurs sommets : tous deux sur le grand arc.
4. **Conclus** avec la propriété « angles inscrits qui interceptent le même arc ».

Exemple

Données. Sur un cercle, E et F sont deux points. Les points G et H sont sur le grand arc EF, et $\widehat{EGF} = 37°$.

Conclusion. Les angles inscrits $\widehat{EGF}$ et $\widehat{EHF}$ interceptent le petit arc EF. La propriété « angles inscrits qui interceptent le même arc » donne alors $\widehat{EHF} = 37°$.

Exemple

Suite. Dans le triangle EGF, on sait aussi que $\widehat{GEF} = 77°$.

Calcul. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Donc :

$$\begin{aligned}\widehat{EFG} &= 180° - 37° - 77° \\ &= 66°\end{aligned}$$

Attention : Mêmes points d'appui, sinon rien

Les angles $\widehat{EGF}$ et $\widehat{EGH}$ ont le même sommet. Pourtant, ils n'interceptent pas le même arc : l'un s'appuie sur F, l'autre sur H. Pour conclure à l'égalité, les côtés doivent passer par les deux mêmes points.

À retenir : Une mesure commune

Tous les angles inscrits dont le sommet est sur le grand arc AB ont la même mesure. Cette mesure commune est la moitié de $\widehat{AOB}$. Un seul calcul suffit donc pour tous.

Calculer des angles dans un cercle

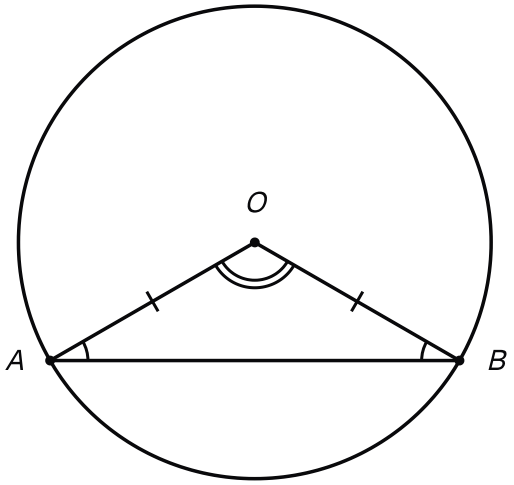
Remarque : Rappels

Rappel de 1re année : dans tout triangle, les trois angles totalisent $180°$. Un triangle isocèle possède deux angles à la base de même mesure. À l'inverse, un triangle dont deux angles ont la même mesure est isocèle.

Rappel du primaire : un angle plat mesure $180°$ et un tour complet mesure $360°$.

Méthode : le triangle formé par deux rayons

1. **Repère** deux rayons : $OA = OB$.
2. **Écris** que le triangle OAB est isocèle en O.
3. **Égalise** ses deux angles à la base : ils ont une seule et même mesure.
4. **Termine** avec la somme des angles, $180°$.
5. **Enchaîne**, s'il le faut, avec la propriété « angle inscrit et angle au centre ».



OA et OB sont deux rayons : le triangle OAB est isocèle en O, et ses angles en A et en B ont la même mesure.

Exemple

Données. Cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 96^\circ$, M sur le grand arc AB.

Angles à la base. Le triangle OAB est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons). D'après la somme des angles d'un triangle :

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = 42^\circ$$

Calcul de $\widehat{AMB}$. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{96^\circ}{2} = 48^\circ$$

Exemple

Données. M est sur le grand arc AB et $\widehat{AMB} = 33^\circ$.

Calcul de $\widehat{AOB}$. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AOB} = 2 \times 33^\circ = 66^\circ$$

Angles à la base. Le triangle OAB est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons). Chaque angle à la base vaut donc :

$$\frac{180^\circ - 66^\circ}{2} = 57^\circ$$

Exemple

Situation. Une cible de fléchettes ronde a 20 secteurs égaux. Leurs bords coupent le cercle en 20 points régulièrement répartis. On les note P_1, P_2, ..., P_{20} dans l'ordre.

Deux voisins. Le tour complet vaut $360°$, donc l'angle au centre entre deux voisins vaut $\frac{360°}{20} = 18°$.

Plus loin. Entre P_1 et P_4, il y a trois secteurs : $\widehat{P_1OP_4} = 3 \times 18° = 54°$. Un angle inscrit de sommet sur le grand arc P_1P_4 en est la moitié : il vaut donc $27°$.

Attention : Seuls deux rayons donnent un triangle isocèle

Le triangle OAB est isocèle parce que OA et OB sont deux rayons. Le triangle AMB, lui, n'a pas de raison d'être isocèle : MA et MB ne sont pas des rayons. N'attribue pas des angles égaux sans raison.

Ce qu'il faut savoir faire

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- **Reconnaître** un angle : regarde son sommet, puis l'arc entre ses côtés.
- **Angle inscrit cherché**, angle au centre connu : divise par 2.
- **Angle au centre cherché**, angle inscrit connu : multiplie par 2.
- **Deux angles inscrits** sur les mêmes points, sommets sur le grand arc : ils sont égaux.
- **Deux rayons** dans la figure : un triangle isocèle, puis la somme des angles.
- **Points régulièrement répartis** : divise $360°$ par le nombre de points.

Angle inscrit, sommet M sur le grand arc AB

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$$

Angle au centre

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$$

Sommets M et N sur le grand arc AB

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

Triangle OAB isocèle en O

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$$

Angle à la base

$$\widehat{OAB} = \frac{180° - \widehat{AOB}}{2}$$

Somme des angles d'un triangle

$$\widehat{OAB} + \widehat{OBA} + \widehat{AOB} = 180°$$

n points régulièrement répartis, deux voisins

$$\frac{360°}{n}$$

À retenir : Rédiger en devoir

Décris d'abord la figure : quel cercle, quel centre, quel arc. Nomme la propriété à chaque calcul.

> Justifie chaque triangle isocèle par deux rayons. Ne présente jamais une mesure au rapporteur comme une justification.
>
> Termine par une phrase qui répond à la question.