BURHAN

Angles inscrits et angles au centre : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/angles-inscrits-et-angles-au-centre/exercices/examen

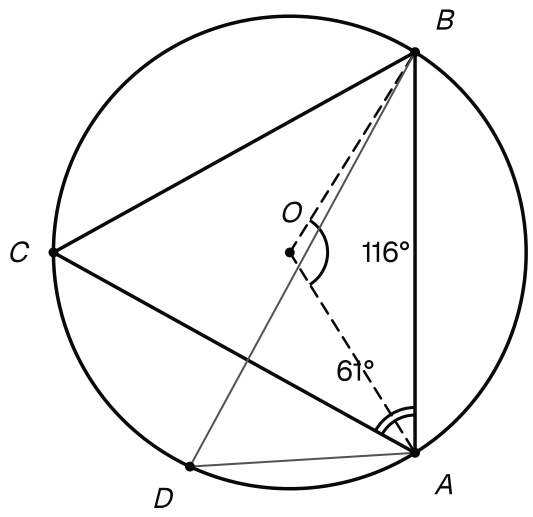
Chapitre	Palier	Exercices
Angles inscrits et angles au centre	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un triangle inscrit et son angle au centre

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Les points A et B sont sur $\mathcal{C}$, avec $\widehat{AOB} = 116°$. Le point C est sur le grand arc AB, avec $\widehat{CAB} = 61°$. Le point D est lui aussi sur le grand arc AB, distinct de C.

Une figure à main levée suffit pour suivre les questions.



Le cercle de rayon 5 cm : AOB vaut 116 degrés, C est sur le grand arc avec CAB de 61 degrés, et D est un autre point de ce grand arc.

1. 1 pts

Calculer $\widehat{ACB}$.

INDICE

Outil : la propriété « angle inscrit et angle au centre ».

Début : où se trouve le sommet C ?

CORRIGÉ

Le point C est sur le grand arc AB. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent donc le petit arc AB.

D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{ACB} = \frac{116°}{2} = 58°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{ACB}$ mesure $58°$.

2. 1,5 pts

En déduire $\widehat{ADB}$, en justifiant.

INDICE

Début : compare les côtés et les sommets des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.

CORRIGÉ

Côtés et sommets. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont inscrits dans $\mathcal{C}$. Leurs côtés passent par A et par B. Leurs sommets C et D sont sur le grand arc AB : ils interceptent le petit arc AB.

Propriété. Selon la propriété « angles inscrits qui interceptent le même arc », $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

Conclusion. D'après la question 1, $\widehat{ADB} = 58°$.

3. 1 pts

Calculer $\widehat{OAB}$.

INDICE

Début : trace les segments $[OA]$ et $[OB]$. Que sont-ils pour le cercle ?

CORRIGÉ

Triangle isocèle. On a $OA = OB$, car ce sont deux rayons de $\mathcal{C}$. Le triangle OAB est isocèle en O : ses angles à la base sont égaux.

Somme des angles. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$:

$$\begin{aligned}\widehat{OAB} &= \frac{180° - 116°}{2} \\ &= 32°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{OAB}$ mesure $32°$.

4. 1,5 pts

Calculer $\widehat{ABC}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

INDICE

Début : dans le triangle ABC, quels angles connais-tu déjà ?

Ensuite : deux angles égaux dans un triangle : quelle est sa nature ?

CORRIGÉ

Angle. Dans le triangle ABC, on connaît $\widehat{CAB} = 61°$ et, d'après la question 1, $\widehat{ACB} = 58°$. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$:

$$\begin{aligned}&\widehat{ABC} \\ &= 180° - 61° - 58° \\ &= 61°\end{aligned}$$

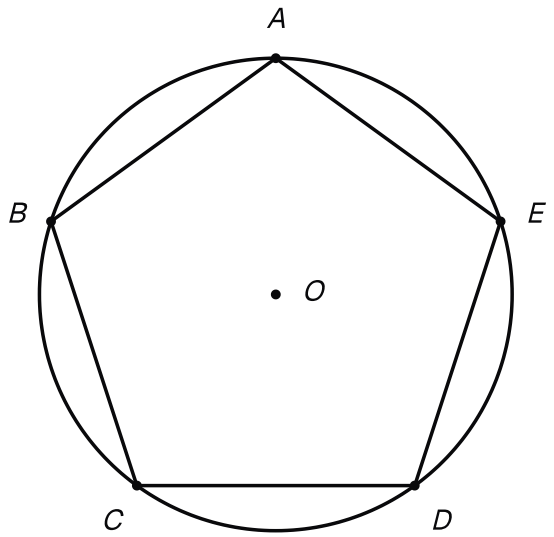
Nature. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux. D'après le rappel de 1re année, un triangle qui a deux angles égaux est isocèle. Le sommet principal est C, et $CA = CB$.

Conclusion. $\widehat{ABC} = 61°$ et le triangle ABC est isocèle en C.

Exercice 2 5 pts

Le kiosque à cinq côtés

Le toit d'un kiosque de jardin a la forme d'un pentagone régulier $ABCDE$. Ses cinq sommets sont régulièrement répartis, dans cet ordre, sur un cercle de centre O et de rayon 6 cm.



Le toit du kiosque : le pentagone régulier ABCDE, dont les cinq sommets sont sur le cercle de centre O et de rayon 6 cm.

1. 1 pts

Calculer $\widehat{AOB}$.

INDICE

Outil : le tour complet vaut $360°$, partagé en angles égaux.

CORRIGÉ

Les cinq sommets sont régulièrement répartis. Autour de O, le tour complet de $360°$ est donc partagé en 5 angles égaux :

$$\widehat{AOB} = \frac{360°}{5} = 72°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{AOB}$ mesure $72°$.

2. 1 pts

Calculer $\widehat{AOC}$, puis en déduire $\widehat{ADC}$.

INDICE

Début : de A à C, compte les intervalles.

Point délicat : le point D est-il sur le grand arc AC ?

CORRIGÉ

Angle au centre. De A à C, il y a 2 intervalles de $72°$:

$$\widehat{AOC} = 2 \times 72° = 144°$$

Position de D. Le petit arc AC passe par B, et non par D. Le point D est donc sur le grand arc AC : les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{AOC}$ interceptent le petit arc AC.

Calcul. On applique la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{ADC} = \frac{144°}{2} = 72°$$

Conclusion. $\widehat{AOC} = 144°$ et $\widehat{ADC} = 72°$.

3. 1,5 pts

Calculer $\widehat{CAD}$.

INDICE

Début : quel angle au centre intercepte le même arc que $\widehat{CAD}$? Que vaut-il ?

CORRIGÉ

Angle au centre associé. Les côtés de $\widehat{CAD}$ passent par C et par D, deux sommets voisins. Comme à la question 1, $\widehat{COD} = 72°$.

Position de A. Le petit arc CD ne contient aucun autre sommet. Le point A est donc sur le grand arc CD : $\widehat{CAD}$ et $\widehat{COD}$ interceptent le petit arc CD.

Calcul. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{CAD} = \frac{72°}{2} = 36°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{CAD}$ mesure $36°$.

4. 1,5 pts

En déduire $\widehat{ACD}$. Quelle est la nature du triangle ACD ?

INDICE

Outil : la somme des angles du triangle ACD.

Ensuite : cherche deux angles égaux. Que dit le rappel de 1re année sur un tel triangle ?

CORRIGÉ

Angle. Dans le triangle ACD, on connaît $\widehat{CAD} = 36^\circ$ et $\widehat{ADC} = 72^\circ$. La somme des angles d'un triangle vaut 180° :

$$\begin{aligned}&\widehat{ACD}\\&= 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ\\&= 72^\circ\end{aligned}$$

Nature. Les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{ADC}$ valent tous deux 72°. D'après le rappel de 1re année, un triangle qui a deux angles égaux est isocèle ; ici, $AC = AD$.

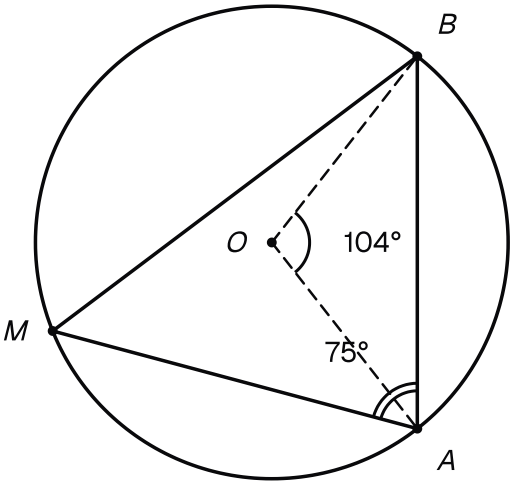
Conclusion. $\widehat{ACD} = 72^\circ$ et le triangle ACD est isocèle en A.

Exercice 3 — 5 pts

Deux statues et un banc dans un parc

Un parc a la forme d'un disque de centre O, où se trouve une fontaine. Deux statues sont sur le bord du parc, en A et en B, avec $\widehat{AOB} = 104°$. Un banc est installé en M, sur le grand arc AB, tel que $\widehat{MAB} = 75°$.

Pour la figure, prends un cercle de centre O et de rayon $4{,}5$ cm.



Le parc de centre O : les statues A et B, avec AOB de 104 degrés, et le banc M sur le grand arc, tel que MAB vaut 75 degrés.

1. — 1 pts

Sous quel angle $\widehat{AMB}$ une personne assise sur le banc voit-elle les deux statues ?

INDICE

Outil : la propriété « angle inscrit et angle au centre ».

CORRIGÉ

Le banc M est sur le grand arc AB. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent donc le petit arc AB.

D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{104°}{2} = 52°$$

Conclusion. Depuis le banc, on aperçoit les deux statues sous un angle de $52°$.

2. 1 pts

Un second banc est installé en N, lui aussi sur le grand arc AB. Une personne assise en N voit-elle les statues sous un angle plus grand ? Justifier.

INDICE

Début : compare les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$: côtés, puis sommets.

CORRIGÉ

Côtés et sommets. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont inscrits dans le même cercle. Leurs côtés passent par A et par B. Les sommets M et N sont sur le grand arc AB : ils interceptent le petit arc AB.

Propriété. Selon la propriété « angles inscrits qui interceptent le même arc », on a $\widehat{ANB} = 52°$.

Conclusion. Non : depuis N, l'angle n'est pas plus grand, il est le même qu'en M.

3. 1 pts

Calculer $\widehat{MBA}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle, dans le triangle AMB.

CORRIGÉ

Dans le triangle AMB, on connaît $\widehat{MAB} = 75°$ et, d'après la question 1, $\widehat{AMB} = 52°$. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$:

$$\begin{aligned}&\widehat{MBA}\\&= 180° - 75° - 52°\\&= 53°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{MBA}$ mesure $53°$.

4. 2 pts

On admet que la statue A est sur le grand arc MB. Calculer $\widehat{MOB}$, puis $\widehat{OBM}$.

INDICE

Début : l'angle $\widehat{MAB}$ est un angle inscrit. Quel arc intercepte-t-il ?

Ensuite : quel angle au centre intercepte le même arc ?

CORRIGÉ

Angle au centre. Le point A est sur le grand arc MB (donnée de la question). L'angle inscrit $\widehat{MAB}$ et l'angle au centre $\widehat{MOB}$ interceptent donc le même arc, le petit arc MB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{MOB} = 2 \times 75^\circ = 150^\circ$$

Triangle OBM. On a $OB = OM$, car ce sont deux rayons : le triangle OBM est isocèle en O. Avec la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{OBM} &= \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} \\ &= 15^\circ\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{MOB} = 150^\circ$ et $\widehat{OBM} = 15^\circ$.

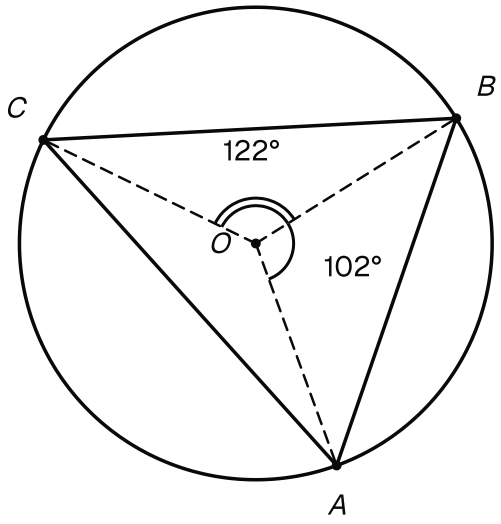
Exercice 4 5 pts

Trois angles au centre pour un tour complet

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 4 cm. On place sur $\mathcal{C}$ trois points A, B et C, dans cet ordre en tournant dans un seul sens, tels que $\widehat{AOB} = 102°$ et $\widehat{BOC} = 122°$.

Le centre O est à l'intérieur du triangle ABC : chacun des points A, B et C est sur le grand arc délimité par les deux autres.

Trace la figure : elle aide à suivre les questions.



Le triangle ABC inscrit dans le cercle de rayon 4 cm, avec AOB de 102 degrés et BOC de 122 degrés ; le centre O est à l'intérieur du triangle.

1. 1 pts

Calculer $\widehat{ACB}$.

INDICE

Outil : la propriété « angle inscrit et angle au centre ».

Début : quel angle au centre intercepte le même arc que $\widehat{ACB}$?

CORRIGÉ

Le point C est sur le grand arc AB. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent donc le petit arc AB.

D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{ACB} = \frac{102°}{2} = 51°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{ACB}$ mesure $51°$.

2. 1,5 pts

Calculer $\widehat{AOC}$, puis en déduire $\widehat{ABC}$.

INDICE

Outil : le tour complet autour de O vaut $360°$.

Ensuite : sur quel arc se trouve le sommet B ?

CORRIGÉ

Angle au centre. Le centre O est à l'intérieur du triangle ABC. Les trois angles au centre $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ se partagent donc le tour complet de $360°$:

$$\begin{aligned}&\widehat{AOC}\\&= 360° - 102° - 122°\\&= 136°\end{aligned}$$

Arc intercepté. Le point B est sur le grand arc AC. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOC}$ interceptent donc le petit arc AC.

Calcul. On applique la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{ABC} = \frac{136°}{2} = 68°$$

Conclusion. $\widehat{AOC} = 136°$ et $\widehat{ABC} = 68°$.

3. 1 pts

Calculer $\widehat{OAB}$, puis $\widehat{OAC}$.

INDICE

Début : trace les segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$. Quelle est la nature des triangles OAB et OAC ?

CORRIGÉ

Triangle OAB. On a $OA = OB$, car ce sont deux rayons de $\mathcal{C}$. Le triangle OAB est isocèle en O, et ses angles à la base sont égaux. Avec la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{OAB} &= \frac{180° - 102°}{2}\\&= 39°\end{aligned}$$

Triangle OAC. De même, $OA = OC$: le triangle OAC est isocèle en O. Avec $\widehat{AOC} = 136°$ (question 2) :

$$\begin{aligned}\widehat{OAC} &= \frac{180° - 136°}{2}\\&= 22°\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{OAB} = 39°$ et $\widehat{OAC} = 22°$.

4. 1,5 pts

En déduire $\widehat{BAC}$. Contrôler ce résultat avec l'angle au centre $\widehat{BOC}$.

INDICE

Début : la demi-droite $[AO)$ partage l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles. Lesquels ?

Ensuite : pour le contrôle, sur quel arc se trouve le sommet A ?

CORRIGÉ

Partage de l'angle. Le centre O est à l'intérieur du triangle ABC. La demi-droite $[AO)$ partage donc l'angle $\widehat{BAC}$ en $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OAC}$. D'après la question 3 :

$$39^\circ + 22^\circ = 61^\circ$$

Contrôle par l'angle au centre. Le point A est sur le grand arc BC : les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ interceptent le petit arc BC. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{BAC} = \frac{122^\circ}{2} = 61^\circ$$

Somme des angles. La somme des angles du triangle ABC confirme le résultat :

$$51^\circ + 68^\circ + 61^\circ = 180^\circ$$

Conclusion. Les deux calculs s'accordent : $\widehat{BAC} = 61^\circ$.

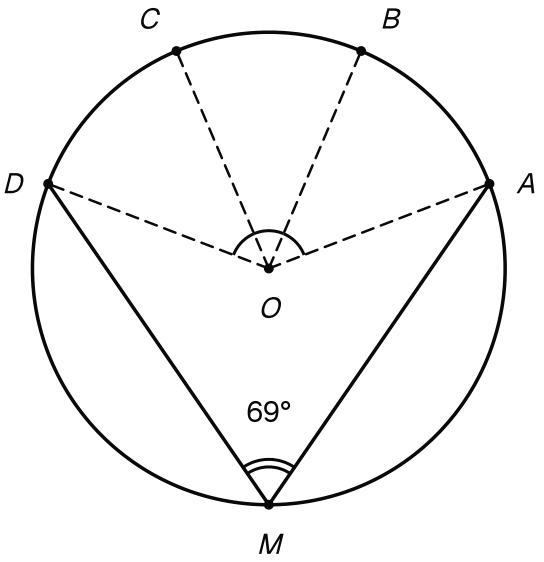
Exercice 5 5 pts

Quatre lampes au bord d'un bassin

Un bassin a la forme d'un disque de centre O. Quatre lampes A, B, C et D sont posées sur son bord. Leïla, qui photographie le bassin, se tient en M, sur le bord, sur le grand arc AD. Elle voit les lampes A et D sous un angle $\widehat{AMD} = 69^\circ$.

Les lampes B et C sont entre A et D, sur l'arc AD qui ne contient pas M, dans l'ordre A, B, C, D. Elles sont placées de sorte que $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD}$.

Pour la figure, prends un cercle de centre O et de rayon 5 cm ; la question 1 permet de placer A et D.



Le bassin de centre O : Leïla en M voit les lampes A et D sous 69 degrés, et les lampes B et C partagent l'arc AD en trois angles au centre égaux.

1. 1 pts

Calculer $\widehat{AOD}$.

INDICE

Outil : la propriété « angle inscrit et angle au centre », lue de l'angle inscrit vers l'angle au centre.

CORRIGÉ

Leïla est en M, sur le grand arc AD. Les angles $\widehat{AMD}$ et $\widehat{AOD}$ interceptent donc le petit arc AD. La propriété « angle inscrit et angle au centre » permet de remonter à l'angle au centre en doublant 69° :

$$\widehat{AOD} = 2 \times 69^\circ = 138^\circ$$

Conclusion. L'angle $\widehat{AOD}$ mesure 138°.

2. 1 pts

En déduire $\widehat{AOB}$.

INDICE

Début : les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COD}$ sont côte à côte. Que forment-ils ensemble ?

CORRIGÉ

Trois angles côte à côte. Les lampes B et C sont entre A et D, sur le petit arc AD. D'après la définition, $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COD}$ interceptent le petit arc AB, le petit arc BC et le petit arc CD, trois morceaux du petit arc AD. Placés côte à côte, ces trois angles forment l'angle $\widehat{AOD}$.

Partage. Ces trois angles sont égaux. On partage donc 138° en trois :

$$\widehat{AOB} = \frac{138^\circ}{3} = 46^\circ$$

Conclusion. L'angle $\widehat{AOB}$ mesure 46°.

3. 1,5 pts

Calculer $\widehat{AMB}$, puis $\widehat{AMC}$.

INDICE

Début : le point M est-il sur le grand arc AB ? sur le grand arc AC ?

Ensuite : que vaut $\widehat{AOC}$?

CORRIGÉ

Position de M. Le petit arc AB et le petit arc AC font partie du petit arc AD, qui ne contient pas M. Le point M est donc sur le grand arc AB et sur le grand arc AC.

Angle $\widehat{AMB}$. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent le petit arc AB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{46^\circ}{2} = 23^\circ$$

Angle $\widehat{AMC}$. De A à C, il y a 2 angles au centre égaux :

$$\widehat{AOC} = 2 \times 46^\circ = 92^\circ$$

Les angles $\widehat{AMC}$ et $\widehat{AOC}$ interceptent le petit arc AC. D'après la même propriété :

$$\widehat{AMC} = \frac{92^\circ}{2} = 46^\circ$$

Conclusion. $\widehat{AMB} = 23^\circ$ et $\widehat{AMC} = 46^\circ$.

4. 1,5 pts

Son ami Omar se place en N, lui aussi sur le grand arc AD, distinct de M. Il affirme : « Depuis N, je vois les lampes B et D sous le même angle que les lampes A et C. » A-t-il raison ? Justifier.

INDICE

Début : pour $\widehat{ANC}$, compare avec un angle déjà calculé.

Point délicat : $\widehat{BND}$ n'intercepte pas le même arc que $\widehat{ANC}$. Quel angle au centre intercepte le même arc que lui ?

CORRIGÉ

Angle $\widehat{ANC}$. Les angles $\widehat{AMC}$ et $\widehat{ANC}$ sont inscrits dans le même cercle, et leurs côtés passent par A et par C. Les sommets M et N sont sur le grand arc AC, comme à la question 3. Selon la propriété « angles inscrits qui interceptent le même arc » :

$$\widehat{ANC} = \widehat{AMC} = 46^\circ$$

Angle $\widehat{BND}$. Ses côtés passent par B et par D : il intercepte le petit arc BD, qui n'est pas le même arc. De B à D, il y a 2 angles au centre égaux :

$$\widehat{BOD} = 2 \times 46^\circ = 92^\circ$$

Le petit arc BD fait partie du petit arc AD, donc N est sur le grand arc BD. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{BND} = \frac{92^\circ}{2} = 46^\circ$$

Conclusion. Les deux angles mesurent 46° : Omar a raison. Les arcs interceptés sont différents, mais leurs angles au centre $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ sont égaux.