BURHAN

Angles inscrits et angles au centre

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/angles-inscrits-et-angles-au-centre/cours

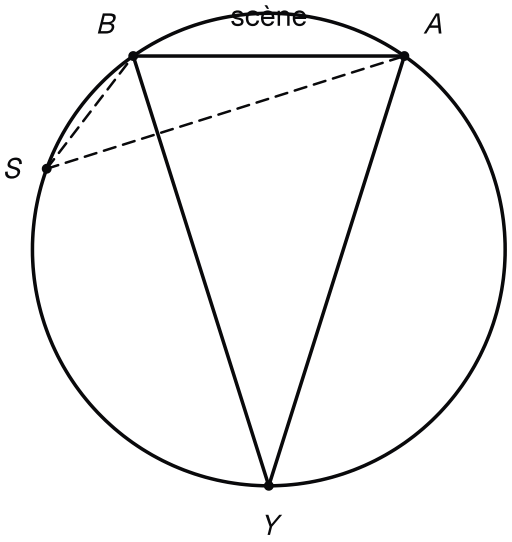
Chapitre	Semestre
Angles inscrits et angles au centre	Semestre 1

Le même angle de vue ?

Un soir, une troupe joue sur une scène en plein air. Deux poteaux, A et B, marquent les bords de la scène.

Les chaises des spectateurs forment un **arc de cercle** : une portion d'un cercle. Les poteaux A et B sont eux aussi sur ce cercle. Les chaises occupent la plus longue des deux portions limitées par A et B, face à la scène.

Yassine est assis au milieu de la rangée. Salma est assise près d'un bout. Chacun voit la scène entre les deux poteaux, sous un angle : $\widehat{AYB}$ pour Yassine, $\widehat{ASB}$ pour Salma.



Les deux poteaux de la scène et les places de Yassine et de Salma, toutes sur un même cercle, avec les deux angles sous lesquels ils regardent la scène.

Devine : Le meilleur angle de vue

Qui voit la scène sous le plus grand angle ?

A. Ils la voient sous le même angle.

Juste.

Juste, même si cela surprend : les deux angles sont égaux.

B. Yassine, assis au milieu.

Faux.

Être au milieu ne donne pas ici un angle plus grand.

C. Salma, assise près d'un bout.

Faux.

Être près d'un poteau ne donne pas ici un angle plus grand.

D. On ne peut pas le savoir.

Faux.

Une propriété du cercle permet de le savoir, sans rien mesurer.

Correction

Yassine et Salma voient la scène sous le même angle.

Leurs chaises sont sur un même cercle qui passe par A et par B : c'est la clé. Tu le justifieras dans ce chapitre, grâce à une propriété du cercle.

Dans ce chapitre, tu apprends à reconnaître deux sortes d'angles dans un cercle. Tu compares leurs mesures, puis tu calcules des angles en enchaînant des propriétés.

Enfin, tu justifies une mesure par une propriété nommée, et non par le rapporteur.

Rappels : cercle et triangle

Le cercle

Rappel de 1re année : un cercle $\mathcal{C}$ de centre O est formé des points situés à la même distance de O. Cette distance est le **rayon**. Un segment $[OA]$, avec A sur le cercle, s'appelle aussi un rayon.

Un segment qui joint deux points du cercle est une **corde**. Une corde qui passe par O est un **diamètre**.

Vérifie : Un segment dans un cercle

Les points A et B sont sur un cercle de centre O. Le segment $[AB]$ ne passe pas par O. Comment s'appelle-t-il ?

A. Un rayon.

Faux.

Un rayon joint le centre O à un point du cercle.

B. Une corde.

Juste.

Juste : il joint deux points du cercle.

C. Un diamètre.

Faux.

Un diamètre passe par le centre O : ce n'est pas le cas ici.

D. Un arc.

Faux.

Un arc est une portion du cercle, pas un segment.

Correction

Le segment $[AB]$ joint deux points du cercle : c'est une corde.

Il ne passe pas par O : ce n'est donc pas un diamètre.

Le triangle isocèle

Rappel de 1re année : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

Un triangle **isocèle** a deux côtés de même longueur. Ses deux angles à la base sont égaux. Réciproquement, si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.

Par exemple, si $OA = OB$, le triangle OAB est isocèle en O et $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Exemple : un angle à la base

Le triangle IJK est isocèle en I, et $\widehat{JIK} = 100°$.

- Ses angles à la base sont égaux : $\widehat{IJK} = \widehat{IKJ}$.
- D'après la somme des angles d'un triangle, ces deux angles se partagent $180° - 100° = 80°$.
- Chacun mesure donc la moitié de $80°$.

$$\widehat{IJK} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

À toi : Les angles à la base

Le triangle PQR est isocèle en P, et $\widehat{QPR} = 50°$. Calcule ses angles à la base. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

Indice 2

Ensemble, ils mesurent $180° - 50°$.

Indice 3

Point délicat : partage cette somme en deux angles égaux.

Réponse

Angles à la base. Le triangle PQR est isocèle en P : ses angles à la base sont égaux, $\widehat{PQR} = \widehat{PRQ}$.

Leur somme. D'après la somme des angles d'un triangle, ils se partagent $180° - 50° = 130°$.

Un seul angle. Chacun mesure la moitié de cette somme :

$$\widehat{PQR} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

Conclusion. Les deux angles à la base du triangle PQR mesurent chacun 65°.

Mesurer un angle

Rappel : tu mesures et tu traces un angle au rapporteur, en degrés. Un angle plat mesure 180°. Un tour complet autour d'un point mesure 360°.

Vérifie : Le tour complet

Trois angles se partagent le tour complet autour d'un point. Deux d'entre eux mesurent 150° et 130°. Combien mesure le troisième ?

A. 100°

Faux.
Tu as calculé $150^\circ + 130^\circ - 180^\circ$: le tour complet mesure 360°, pas 180°.

B. 280°

Faux.
C'est la somme des deux premiers angles.

C. 210°

Faux.
Tu n'as retiré que 150° : il faut retirer les deux angles.

D. 80°

Juste.
Juste : les trois angles font un tour complet.

Correction
Les trois angles font un tour complet : leur somme vaut 360°.

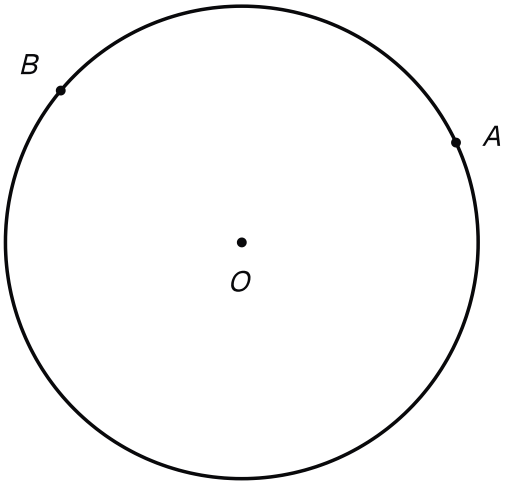
Le troisième angle mesure donc :

$$360^\circ - 150^\circ - 130^\circ = 80^\circ$$

L'angle au centre

Deux points, deux arcs

Trace un cercle de centre O et de rayon 3 cm. Place deux points A et B sur ce cercle. Ne les place pas aux deux bouts d'un même diamètre.



Le cercle de centre O et de rayon 3 cm, avec deux points A et B qui ne sont pas les extrémités d'un même diamètre.

Devine : Des morceaux de cercle

Les points A et B découpent ton cercle en morceaux. Combien de morceaux obtiens-tu ?

A. Un seul morceau.

Faux.

Pars de A et suis le cercle : tu passes par B avant de revenir.

B. Deux morceaux.

Juste.

Juste : un morceau court et un morceau long.

C. Trois morceaux.

Faux.

Deux points ne découpent le cercle qu'en deux morceaux.

D. Quatre morceaux.

Faux.

Il faudrait quatre points pour obtenir quatre morceaux.

Correction

Tu obtiens deux morceaux de cercle, de longueurs différentes. Chacun s'appelle un arc.

Le plus court est le petit arc AB, l'autre le grand arc AB.

Définition : Angle au centre

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A et B deux points de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés.

- Les points A et B partagent le cercle en deux **arcs** : le **petit arc** AB et le **grand arc** AB.
- L'angle $\widehat{AOB}$, dont le sommet est le centre O, est un **angle au centre**.
- Le petit arc AB est situé à l'intérieur de cet angle : on dit que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ **intercepte** le petit arc AB.

Comme A et B ne sont pas diamétralement opposés, l'angle $\widehat{AOB}$ n'est pas plat : sa mesure est strictement comprise entre $0°$ et $180°$.

En clair. Un angle au centre a son sommet au centre du cercle. Ses côtés portent deux rayons, $[OA]$ et $[OB]$.

Les points A et B ne sont pas aux deux bouts d'un même diamètre. L'angle intercepte alors le petit arc AB : l'arc situé entre ses deux côtés.

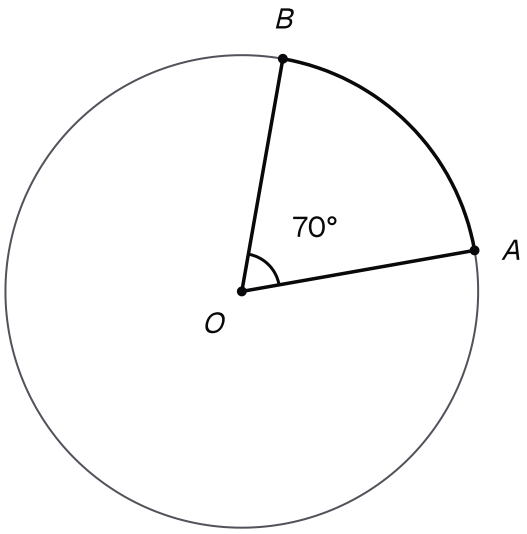
Un exemple et une précaution

Exemple : un angle au centre de 70°

Trace un cercle de centre O et de rayon 3 cm. Place A sur le cercle. Place B sur le cercle tel que $\widehat{AOB} = 70°$.

- Repasse en couleur le petit arc AB : il est à l'intérieur de l'angle $\widehat{AOB}$.
- Le reste du cercle est le grand arc AB.
- L'angle au centre $\widehat{AOB}$ mesure $70°$ et intercepte le petit arc AB.

Garde cette figure : elle resservira.



L'angle au centre AOB de 70 degrés : ses deux côtés portent les rayons [OA] et [OB], et le petit arc AB, repassé en trait épais, est entre eux.

Vérifie : L'arc intercepté

Sur un cercle de centre O, deux points A et B sont tels que $\widehat{AOB} = 70°$. Quel arc l'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte-t-il ?

A. Le grand arc AB.

Faux.

Le grand arc est à l'extérieur de l'angle.

B. Le segment $[AB]$.

Faux.

Un segment est une corde, pas un arc.

C. Le petit arc AB.

Juste.

Juste : il est entre les deux côtés de l'angle.

D. Le cercle tout entier.

Faux.

L'angle ne contient qu'une portion du cercle.

Correction

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc situé entre ses côtés : le petit arc AB.

Le segment $[AB]$ est une corde, pas un arc.

Remarque : un cas laissé de côté

Si A et B sont aux deux bouts d'un diamètre, l'angle $\widehat{AOB}$ est plat. Les deux arcs ont alors la même longueur : aucun n'est le petit arc. Ce cas est laissé de côté dans ce chapitre.

L'angle des aiguilles

Le cadran d'une horloge est un cercle. Son centre O porte les deux aiguilles. Les douze heures sont régulièrement réparties sur le bord.

Deux heures voisines sont donc séparées par un angle au centre de :

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

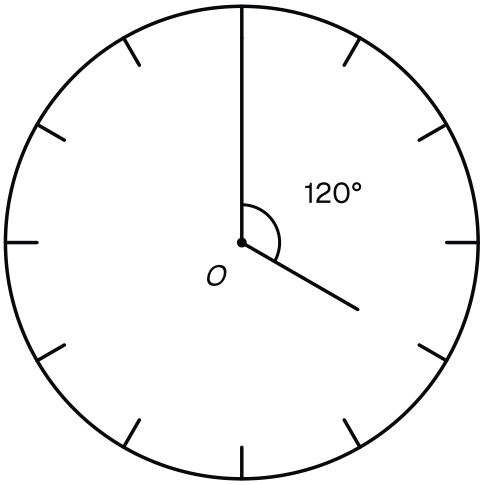
Exemple : l'horloge à 4 h

À 4 h, la grande aiguille montre le 12 et la petite montre le 4. Les deux aiguilles forment un angle au centre.

Du 12 au 4, il y a quatre intervalles d'une heure. L'angle mesure donc :

$$4 \times 30^\circ = 120^\circ$$

Il intercepte le petit arc qui va du 12 au 4, en passant par 1, 2 et 3.



Le cadran à 4 h : les douze graduations sont régulièrement réparties, et les aiguilles forment au centre O un angle de 120 degrés.

Vérifie : Une heure à trouver

À quelle heure pile les aiguilles forment-elles un angle au centre de 60° ?

A. À 1 h.

Faux.

À 1 h, il n'y a qu'un intervalle : l'angle mesure $30°$.

B. À 3 h.

Faux.

À 3 h, l'angle mesure $3 \times 30° = 90°$.

C. À midi.

Faux.

À midi, les deux aiguilles sont l'une sur l'autre.

D. À 2 h.

Juste.

Juste : deux intervalles de $30°$.

Correction

Il faut deux intervalles d'une heure, car $2 \times 30° = 60°$.

À 2 h, les aiguilles forment donc un angle au centre de $60°$.

À toi : L'horloge à 5 h

À 5 h, quel angle au centre forment les aiguilles ? Quel arc intercepte-t-il ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Compte les intervalles d'une heure entre le 12 et le 5.

Indice 2

Chaque intervalle correspond à $30°$.

Indice 3

Point délicat : l'arc intercepté est entre les deux aiguilles, du côté de 1, 2, 3 et 4.

Réponse

L'angle. Du 12 au 5, il y a cinq intervalles d'une heure. L'angle au centre mesure donc :

$$5 \times 30° = 150°$$

L'arc. Il intercepte le petit arc qui va du 12 au 5, en passant par 1, 2, 3 et 4.

Conclusion. À 5 h, les aiguilles forment un angle au centre de $150°$. Il intercepte le petit arc tracé du 12 au 5.

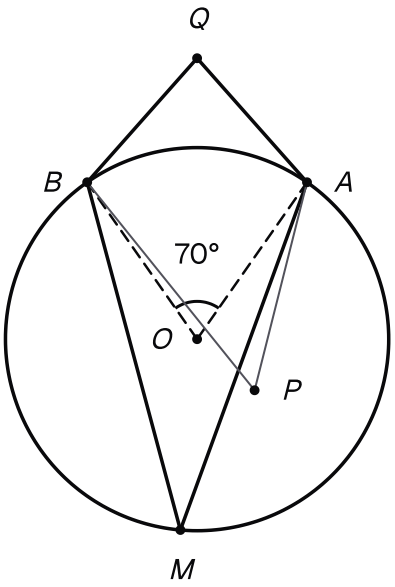
L'angle inscrit

Un sommet sur le cercle

Reprends ta figure : le cercle de centre O et de rayon 3 cm, avec $\widehat{AOB} = 70°$. Place M sur le grand arc AB, tel que $\widehat{AOM} = 150°$ et $\widehat{BOM} = 140°$.

Le **disque** est la surface limitée par le cercle. Place un point P à l'intérieur du disque, autre que O. Place enfin un point Q à l'extérieur du cercle.

Trace les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{APB}$ et $\widehat{AQB}$.



Trois sommets possibles pour un angle qui s'appuie sur A et B : le point M sur le cercle, le point P dans le disque et le point Q hors du cercle.

Devine : Où est le sommet ?

Parmi ces angles, lequel a son sommet sur le cercle ?

A. L'angle $\widehat{AOB}$.

Faux.

Son sommet est le centre O.

B. L'angle $\widehat{APB}$.

Faux.

Son sommet P est à l'intérieur du disque.

C. L'angle $\widehat{AMB}$.

Juste.

Juste : le point M est sur le cercle.

D. L'angle $\widehat{AQB}$.

Faux.

Son sommet Q est à l'extérieur du cercle.

Correction

> Le point M est sur le cercle : l'angle $\widehat{AMB}$ a son sommet sur le cercle.
>
> Ses côtés $[MA)$ et $[MB)$ coupent encore le cercle, en A et en B : on dit qu'ils le **recoupent**. C'est un angle inscrit, défini ci-dessous.

Définition : Angle inscrit

Soit $\mathcal{C}$ un cercle, et A, B et M trois points distincts de $\mathcal{C}$.

- L'angle $\widehat{AMB}$, dont le sommet M est **sur le cercle** et dont les côtés $[MA)$ et $[MB)$ recoupent le cercle en A et en B, est un **angle inscrit** dans le cercle.
- L'arc AB qui ne contient pas le point M est situé à l'intérieur de cet angle : on dit que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ **intercepte** cet arc AB.

En clair. Un angle inscrit a son sommet sur le cercle. Ses côtés passent par deux autres points du cercle.

Il intercepte l'arc situé entre ses côtés : celui qui ne contient pas son sommet.

Reconnaître un angle inscrit

Exemple : l'arc intercepté

Sur ta figure, les trois points A, B et M sont sur le cercle.

- L'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit. Le petit arc AB ne contient pas M : c'est l'arc intercepté.
- L'angle $\widehat{MAB}$ est aussi un angle inscrit, de sommet A. Il intercepte l'arc MB qui ne contient pas A.
- L'angle $\widehat{AOB}$ n'est pas inscrit : son sommet est le centre.

Méthode : reconnaître un angle au centre ou un angle inscrit

1. **Regarde le sommet.** Au centre du cercle, c'est un angle au centre. Sur le cercle, c'est peut-être un angle inscrit.
2. **Vérifie les côtés.** Pour un angle inscrit, chaque côté recoupe le cercle en un autre point.
3. **Repère l'arc intercepté.** C'est l'arc situé entre les côtés de l'angle. Pour un angle inscrit, il ne contient pas le sommet.

> **Vérifie : Un autre angle inscrit**

Sur un cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 70°$ et M est sur le grand arc AB. Quel arc l'angle inscrit $\widehat{ABM}$ intercepte-t-il ?

A. Le petit arc AB.

Faux.

Les côtés de cet angle recoupent le cercle en A et en M, pas en B.

B. L'arc AM qui ne contient pas B.

Juste.

Juste : ses côtés recoupent le cercle en A et en M.

C. L'arc MB qui ne contient pas A.

Faux.

C'est l'arc intercepté par $\widehat{MAB}$, de sommet A.

D. Le grand arc AB.

Faux.

Cet arc contient M, qui est sur un côté : ce n'est pas l'arc cherché.

Correction

Le sommet de $\widehat{ABM}$ est B, sur le cercle. Ses côtés recoupent le cercle en A et en M.

Il intercepte donc l'arc AM qui ne contient pas B.

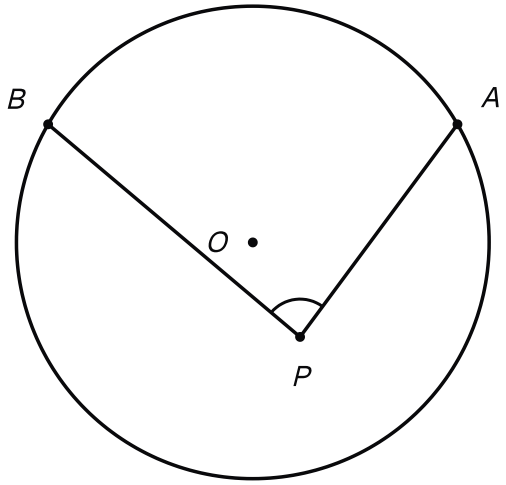
Un piège, puis à toi

Attention : un sommet à l'intérieur du disque

✗ « Le point P est à l'intérieur du disque, donc $\widehat{APB}$ est un angle inscrit. »

✓ Un angle inscrit a son sommet **sur** le cercle. Prends un sommet à l'intérieur du disque, autre que le centre. L'angle n'est alors ni un angle au centre, ni un angle inscrit.

Les propriétés du chapitre ne s'appliquent pas à lui. Avant de calculer, regarde toujours où est le sommet.



Un sommet P dans le disque, distinct du centre : l'angle APB n'est ni un angle au centre, ni un angle inscrit.

Trouve l'erreur : La phrase de Nadia

Nadia regarde l'angle $\widehat{AQB}$, dont le sommet Q est à l'extérieur du cercle. Elle dit : « Ses côtés passent par A et B, donc c'est un angle inscrit. » Que penses-tu de sa phrase ?

A. Elle se trompe : le sommet Q n'est pas sur le cercle.

Juste.

Juste : c'est la première chose à vérifier.

B. Elle a raison.

Faux.

Les côtés passent bien par A et B, mais cela ne suffit pas.

C. Elle se trompe : c'est un angle au centre.

Faux.

Son sommet n'est pas le centre O.

D. Elle se trompe : un angle inscrit est toujours droit.

Faux.

Un angle inscrit peut avoir bien d'autres mesures.

Correction

Un angle inscrit a son sommet sur le cercle.

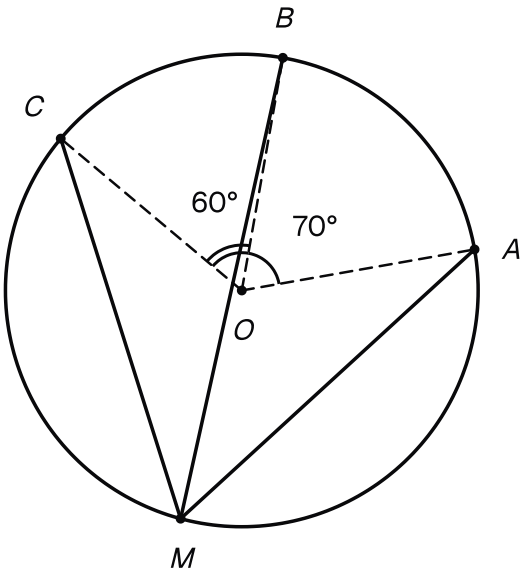
Le point Q est à l'extérieur : $\widehat{AQB}$ n'est donc ni un angle inscrit, ni un angle au centre.

Exemple : deux angles inscrits, deux arcs différents

Trace un cercle de centre O, place A, puis B tel que $\widehat{AOB} = 70°$. Place C tel que $\widehat{BOC} = 60°$, de sorte que B soit sur le petit arc AC. Place enfin M sur le grand arc AC.

- L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le petit arc AB.
- L'angle inscrit $\widehat{BMC}$ intercepte le petit arc BC.

Ces deux arcs sont différents. Rien ne dit que ces deux angles ont la même mesure.



Depuis le même sommet M, l'angle AMB s'appuie sur le petit arc AB et l'angle BMC sur le petit arc BC : deux arcs différents.

À toi : Nommer les angles

Trace un cercle de centre O et de rayon 3 cm. Place R et T sur le cercle tels que $\widehat{ROT} = 90°$. Place K sur le grand arc RT. Nomme un angle au centre, puis deux angles inscrits. Pour chacun, donne l'arc intercepté. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Un angle au centre a son sommet en O ; un angle inscrit a son sommet sur le cercle.
Indice 2
L'angle $\widehat{RKT}$ a son sommet K sur le cercle.
Indice 3
Point délicat : l'arc intercepté par un angle inscrit ne contient pas son sommet.

Réponse
- $\widehat{ROT}$ est un angle au centre : il intercepte le petit arc RT.
- $\widehat{RKT}$ est un angle inscrit : il intercepte le petit arc RT, qui ne contient pas K.

- $\widehat{KRT}$ est aussi un angle inscrit, de sommet R : il intercepte l'arc KT qui ne contient pas R.

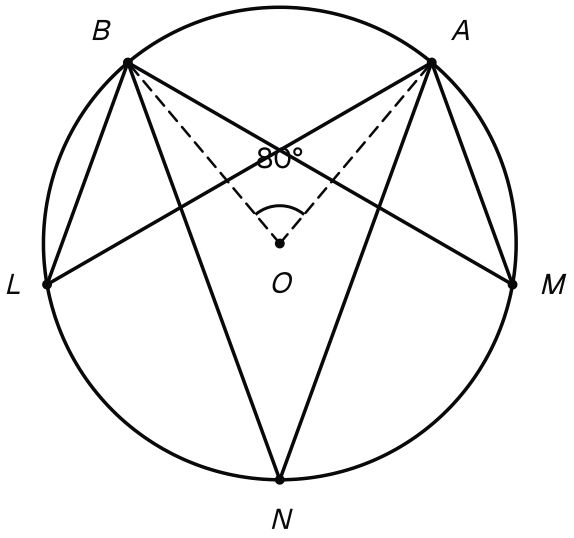
Comparer un angle inscrit et l'angle au centre

Mesurer avant d'énoncer

Trace un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Place A, puis B sur le cercle tel que $\widehat{AOB} = 80°$. Place trois points sur le grand arc AB :

- M, tel que $\widehat{AOM} = 60°$;
- N, tel que $\widehat{AON} = \widehat{BON} = 140°$;
- L, tel que $\widehat{BOL} = 60°$.

Trace les angles inscrits $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$ et $\widehat{ALB}$.



La figure à mesurer : sur le cercle de rayon 4 cm, AOB vaut 80 degrés, et les trois sommets M, N et L sont pris sur le grand arc AB.

Vérifie : Au rapporteur

Mesure les trois angles au rapporteur. Que trouves-tu, à un ou deux degrés près ?

A. Environ $40°$ pour chacun.
Juste.
Juste : trois mesures presque égales.

B. Environ $80°$ pour chacun.
Faux.
C'est la mesure de l'angle au centre, pas celle des angles inscrits.

C. Environ $160°$ pour chacun.

Faux.

Ces angles sont aigus : vérifie la lecture du rapporteur.

D. Trois mesures très différentes.

Faux.

Reprends ta figure : les trois mesures sont presque égales.

Correction

Tu dois lire environ $40°$ les trois fois.

Ta mesure est approchée : le tracé et le rapporteur font perdre un ou deux degrés.

Devine : Quel lien ?

Quel lien proposes-tu entre la mesure d'un de ces angles inscrits et celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$?

A. L'angle inscrit est le double.

Faux.

Tes mesures sont plus petites que $80°$, pas plus grandes.

B. Les deux angles sont égaux.

Faux.

Environ $40°$ contre $80°$: ils ne sont pas égaux.

C. L'angle inscrit est la moitié.

Juste.

Juste : environ $40°$ pour $80°$.

D. Il n'y a aucun lien.

Faux.

Trois mesures presque égales suggèrent un lien.

Correction

Tes mesures donnent environ $40°$, et $\widehat{AOB} = 80°$.

Conjecturer, c'est deviner une règle à partir de mesures. On conjecture : l'angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre.

Une conjecture n'est pas une preuve : la propriété qui suit l'affirme.

La propriété

Propriété : Angle inscrit et angle au centre

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A et B deux points de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés. Soit M un point du grand arc AB, distinct de A et de B.

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc, le petit arc AB. Alors la mesure de l'angle inscrit est **la moitié** de celle de l'angle au centre :

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}.$$

Remarque : un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer. Tes mesures t'ont convaincu, mais elles ne le prouvent pas.

Exemple : de l'angle au centre à l'angle inscrit

Trace un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Place A et B sur le cercle tels que $\widehat{AOB} = 110°$, puis M sur le grand arc AB.

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc : le petit arc AB.

D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\begin{aligned} \widehat{AMB} &= \frac{\widehat{AOB}}{2} \\ &= \frac{110°}{2} = 55° \end{aligned}$$

Exemple : de l'angle inscrit à l'angle au centre

Sur un cercle de centre O, le point M est sur le grand arc AB, et $\widehat{AMB} = 35°$.

Les deux angles interceptent le petit arc AB.

D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &= 2 \times \widehat{AMB} \\ &= 2 \times 35° = 70° \end{aligned}$$

Pour construire cette figure, place d'abord A et B avec $\widehat{AOB} = 70°$.

Calculer pas à pas

Méthode : calculer un angle inscrit ou un angle au centre

1. **Nomme les deux angles** et l'arc que chacun intercepte.

2. **Vérifie que c'est le même arc** : le sommet de l'angle inscrit doit être sur le grand arc.
3. **Applique la propriété** « angle inscrit et angle au centre ». Pour l'angle inscrit, divise par 2. Pour l'angle au centre, multiplie par 2.
4. **Rédige** en nommant la propriété utilisée.

Vérifie : Un angle inscrit à calculer

Sur un cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 150^\circ$ et M est sur le grand arc AB. Combien mesure $\widehat{AMB}$?

A. 300°

Faux.
Tu as multiplié par 2 : c'est l'angle au centre qui est le double.

B. 150°

Faux.
Les deux angles n'ont pas la même mesure.

C. 30°

Faux.
Tu as calculé $180^\circ - 150^\circ$: ce n'est pas la propriété.

D. 75°

Juste.
Juste : la moitié de 150°.

Correction
Le point M est sur le grand arc AB : les deux angles interceptent le petit arc AB.

D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

Attention : moitié ou double ?

✗ « $\widehat{AOB} = 80^\circ$, donc $\widehat{AMB} = 2 \times 80^\circ = 160^\circ$. »

✓ C'est l'angle **inscrit** qui est la moitié de l'angle **au centre**, pas l'inverse. Ici, $\widehat{AMB} = 40^\circ$.

Contrôle : quand les deux angles interceptent le même arc, l'angle au centre est toujours le plus grand.

Deux pièges, puis à toi

Attention : le rapporteur ne prouve rien

✗ « J'ai mesuré $\widehat{AMB}$ au rapporteur : $41°$. Donc $\widehat{AMB} = 41°$. »

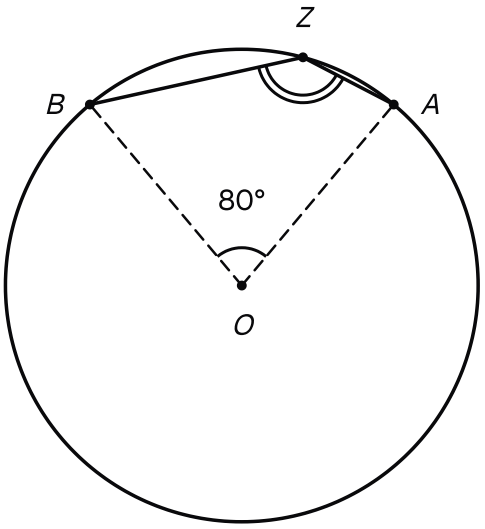
✓ Une mesure au rapporteur est **approchée**, à un ou deux degrés près. Elle sert à conjecturer, jamais à justifier. Pour justifier, nomme une propriété : « angle inscrit et angle au centre », triangle isocèle, somme des angles d'un triangle.

Attention : vérifier le même arc

✗ « $\widehat{AOB} = 80°$ et Z est sur le petit arc AB, donc $\widehat{AZB} = 40°$. »

✓ La propriété exige le **même arc**. Si le sommet est sur le petit arc AB, l'angle inscrit intercepte le grand arc. Il n'est pas la moitié de $\widehat{AOB}$.

Pour le constater, reprends le cercle de rayon 4 cm avec $\widehat{AOB} = 80°$. Place Z sur le petit arc AB et mesure $\widehat{AZB}$: tu lis un angle obtus, bien plus grand que $40°$. Ce chapitre n'étudie pas ce cas.



Le sommet Z est placé sur le petit arc AB : l'angle AZB intercepte alors le grand arc, et il est obtus.

À toi : Diviser ou multiplier

(a) Sur un cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 100°$ et M est sur le grand arc AB. Calcule $\widehat{AMB}$. (b) Sur un autre cercle de centre O, le point N est sur le grand arc CD, et $\widehat{CND} = 45°$. Calcule $\widehat{COD}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Vérifie d'abord que les deux angles interceptent le même arc : regarde où est le sommet.
Indice 2
Demande-toi lequel des deux angles doit être le plus grand.

Indice 3

Point délicat : quand les deux angles interceptent le même arc, l'angle au centre est toujours le plus grand.

Réponse

(a) **Calcul de $\widehat{AMB}$.** Le point M est sur le grand arc AB : les deux angles interceptent le petit arc AB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

(b) **Calcul de $\widehat{COD}$.** Le point N est sur le grand arc CD : les angles $\widehat{CND}$ et $\widehat{COD}$ interceptent le petit arc CD. D'après la même propriété :

$$\widehat{COD} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

Conclusion. L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ mesure 50°, et l'angle au centre $\widehat{COD}$ mesure 90°.

Une erreur à trouver, le coin examen

Trouve l'erreur : Une copie à corriger

Un élève rédige : « $\widehat{AOB} = 140^\circ$ et M est sur le grand arc AB. D'après la propriété angle inscrit et angle au centre, $\widehat{AMB} = 280^\circ$. » Où est l'erreur ?

A. Le point M devrait être sur le petit arc.

Faux.

Non : c'est sur le grand arc que la propriété s'applique.

B. Il a multiplié par 2 au lieu de diviser.

Juste.

Juste : l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre.

C. La propriété ne vaut que pour des angles aigus.

Faux.

L'angle au centre peut être obtus : seul l'arc compte.

D. Il n'y a aucune erreur.

Faux.

Un angle de 280° est impossible ici : il dépasse un angle plat.

Correction

L'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre, pas le double :

$$\widehat{AMB} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

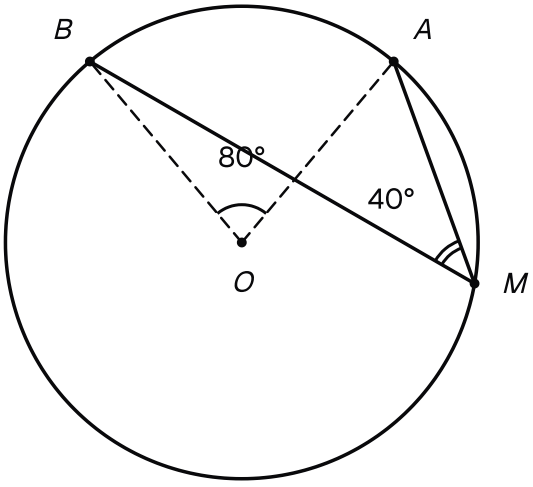
Contrôle : l'angle au centre doit être le plus grand des deux.

Remarque : Coin examen : rédiger le calcul d'un angle inscrit

En devoir, la rédaction tient en trois phrases. Voici celle de la figure de l'observation :

« Le point M est sur le grand arc AB. Donc l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc, le petit arc AB. D'après la propriété angle inscrit et angle au centre, $\widehat{AMB} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$. »

Ta mesure au rapporteur est maintenant justifiée.



La rédaction du coin examen sur la figure de l'observation : M est sur le grand arc AB, donc l'angle inscrit AMB vaut la moitié de 80 degrés, soit 40 degrés.

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc

Retour à la scène

Reviens à la scène du début. Les poteaux A et B sont sur un cercle de centre O, avec $\widehat{AOB} = 70^\circ$. Yassine, en Y, et Salma, en S, sont assis sur le grand arc AB.

Devine : L'angle de Salma

D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre », Yassine voit la scène sous un angle $\widehat{AYB} = 35^\circ$. Et Salma ?

A. Sous un angle plus grand, car elle est près d'un poteau.

Faux.

Sa place ne change pas l'arc qu'elle regarde.

B. Sous un angle de 35°, elle aussi.

Juste.
Juste : elle est aussi sur le grand arc AB.

C. Sous un angle plus petit, car elle est sur le côté.
Faux.
Sa place ne change pas l'arc qu'elle regarde.

D. Cela dépend de la place exacte de sa chaise.
Faux.
Toute chaise du grand arc AB donne le même angle.

Correction
Salma est aussi sur le grand arc AB. D'après la même propriété :

$$\widehat{ASB} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

Les deux angles sont égaux : c'est la réponse à la question du début.

Pourquoi est-ce vrai pour toutes les chaises ? Chaque spectateur du grand arc regarde le même petit arc AB. Le calcul n'utilise que l'angle au centre $\widehat{AOB}$: la propriété qui suit le démontre en trois étapes.

La propriété et sa preuve

Propriété : Angles inscrits qui interceptent le même arc

Soit $\mathcal{C}$ un cercle, et A et B deux points de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés. Soit M et N deux points du grand arc AB, distincts de A et de B.

Les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc, le petit arc AB. Alors ils ont **la même mesure** :

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$

Démonstration
Étape 1. Soit O le centre du cercle. Le point M est sur le grand arc AB : l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc, le petit arc AB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre », $\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

Étape 2. Le point N est lui aussi sur le grand arc AB. D'après la même propriété, $\widehat{ANB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

Étape 3. Les deux angles inscrits sont égaux au même nombre, la moitié de $\widehat{AOB}$. Donc $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer que deux angles sont égaux, on montre qu'ils sont égaux à **un même nombre**. Ici, chacun vaut la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOB}$. La preuve emploie une seule propriété, « angle inscrit et angle au centre », appliquée deux fois.

Vérifie : L'étape 2 de la preuve

Dans la preuve, quel argument justifie l'étape 2, $\widehat{ANB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$?

A. Une mesure de $\widehat{ANB}$ au rapporteur.

Faux.

Une mesure est approchée : elle ne justifie rien.

B. Le triangle ANB est isocèle en N.

Faux.

Rien ne dit que $NA = NB$.

C. La propriété angle inscrit et angle au centre, en N.

Juste.

Juste : N est sur le grand arc AB.

D. L'étape 1, recopiée sans rien changer.

Faux.

L'étape 1 porte sur M : il faut vérifier la condition pour N.

Correction

Le point N est sur le grand arc AB. L'angle inscrit $\widehat{ANB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent donc le petit arc AB.

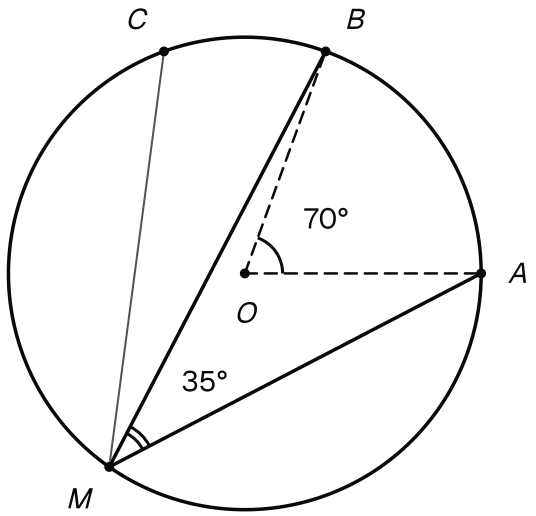
La propriété « angle inscrit et angle au centre » s'applique à N comme à M. Sans cette condition sur N, l'étape 2 tombe.

Exemple : Contre-exemple : pas le même arc

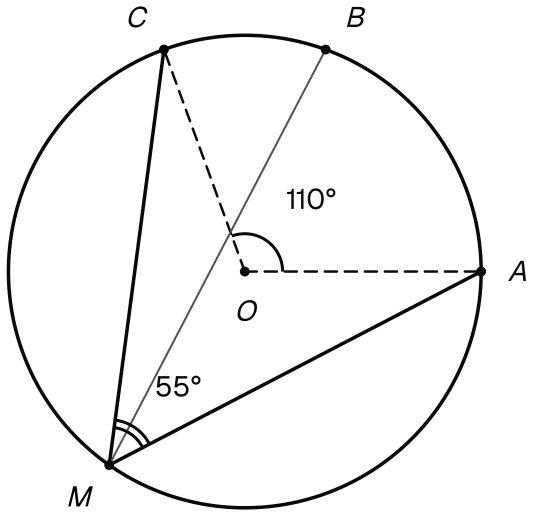
Trace un cercle de centre O, place A, puis B tel que $\widehat{AOB} = 70°$. Place C tel que $\widehat{AOC} = 110°$, de sorte que B soit sur le petit arc AC. Place enfin M sur le grand arc AC.

- D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre », $\widehat{AMB} = 35°$ et $\widehat{AMC} = 55°$.
- Ces deux angles inscrits ont le même sommet, mais ils n'interceptent pas le même arc.

Ils n'ont pas la même mesure : la condition « même arc » est nécessaire.



Premier angle de sommet M : AMB s'appuie sur le petit arc AB et mesure 35 degrés, la moitié de l'angle au centre AOB de 70 degrés.



Second angle, même sommet M : AMC s'appuie sur le petit arc AC, qui contient B, et mesure 55 degrés, la moitié de AOC.

Justifier une égalité d'angles

Méthode : justifier que deux angles inscrits sont égaux

1. **Vérifie le cercle** : ce sont deux angles inscrits dans le même cercle.
2. **Vérifie l'arc**. Leurs côtés passent par les deux mêmes points du cercle. Leurs sommets sont tous deux sur le grand arc.

3. **Conclus** par la propriété « angles inscrits qui interceptent le même arc ».

Exemple : rédiger une égalité d'angles

Sur un cercle, les points M et N sont sur le grand arc AB. On compare $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sans rien mesurer :

« Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont inscrits dans le même cercle. Leurs sommets M et N sont sur le grand arc AB : ils interceptent le même arc, le petit arc AB. D'après la propriété angles inscrits qui interceptent le même arc, $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$. »

Vérifie : Quatre points sur un cercle

Trace un cercle de centre O. Place A, B, C et D sur le cercle, dans cet ordre, en tournant dans le même sens. On a $\widehat{AOB} = 70°$, $\widehat{BOC} = 90°$ et $\widehat{COD} = 90°$. Quel angle est égal à $\widehat{ACB}$?

A. L'angle $\widehat{CAD}$.

Faux.

Il intercepte l'arc CD, pas le petit arc AB.

B. L'angle $\widehat{AOB}$.

Faux.

C'est l'angle au centre : il mesure le double.

C. L'angle $\widehat{CBD}$.

Faux.

Il intercepte l'arc CD, pas le petit arc AB.

D. L'angle $\widehat{ADB}$.

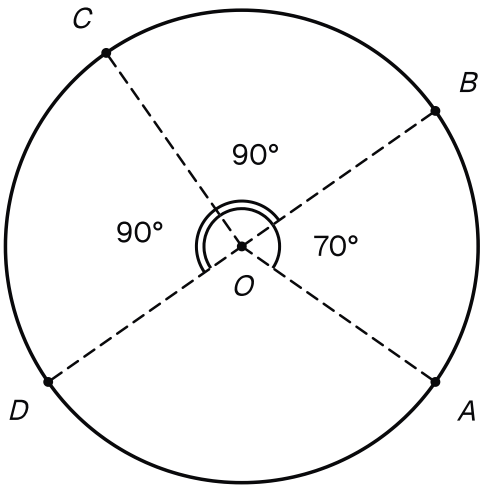
Juste.

Juste : même arc, sommets C et D sur le grand arc AB.

Correction

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont inscrits dans le même cercle. Leurs sommets C et D sont sur le grand arc AB : ils interceptent le petit arc AB.

D'après la propriété angles inscrits qui interceptent le même arc, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Chacun mesure $35°$.



Sur le cercle, on rencontre dans l'ordre A, puis B, puis C, puis D, séparés par des angles au centre de 70, 90 et 90 degrés.

Deux triangles, un angle égal

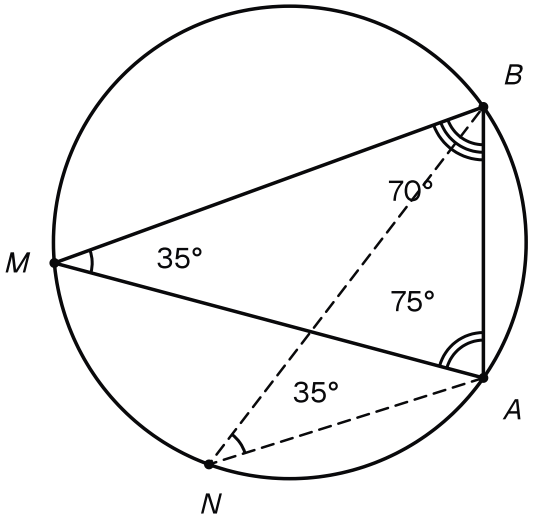
Exemple : deux triangles inscrits

Sur un cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 70°$. Les points M et N sont sur le grand arc AB, et $\widehat{MAB} = 75°$.

- D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre », $\widehat{AMB} = 35°$.
- D'après la propriété angles inscrits qui interceptent le même arc, $\widehat{ANB} = 35°$. Les triangles AMB et ANB ont donc un angle égal.
- La somme des angles du triangle AMB donne le troisième angle.

$$\begin{aligned}\widehat{ABM} &= 180° - 75° - 35° \\ &= 70°\end{aligned}$$

Pour la figure, place M sur le grand arc AB tel que $\widehat{AOM} = 140°$ et $\widehat{BOM} = 150°$.



Les triangles inscrits AMB et ANB ont le même angle de 35 degrés, en M et en N ; dans AMB, les angles en A et en B valent 75 et 70 degrés.

À toi : Calculer, puis justifier

Sur un cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 96°$. Les points M et N sont sur le grand arc AB. Calcule $\widehat{AMB}$, puis justifie que $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la propriété « angle inscrit et angle au centre ».
Indice 2
Pour l'égalité, suis la méthode : même cercle, même arc.
Indice 3
Point délicat : vérifie que M et N sont tous deux sur le grand arc AB.

Réponse
Calcul de $\widehat{AMB}$. Le point M est sur le grand arc AB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{96^\circ}{2} = 48^\circ$$

Égalité des angles. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont inscrits dans le même cercle, et leurs sommets sont sur le grand arc AB. D'après la propriété angles inscrits qui interceptent le même arc, $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$.

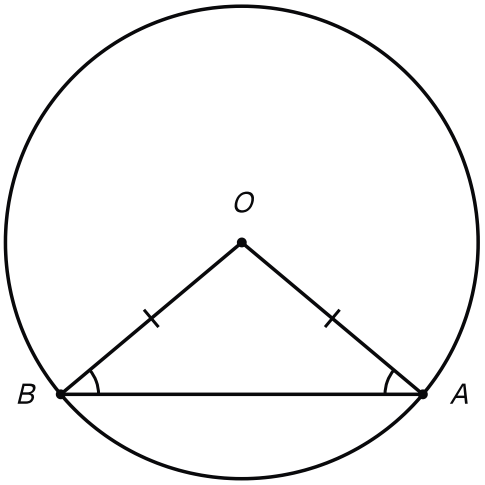
Conclusion. Les deux angles inscrits ont la même mesure : $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 48°$.

Calculer des angles dans un cercle

Deux rayons, un triangle isocèle

Dans un cercle de centre O, trace deux rayons $[OA]$ et $[OB]$, puis la corde $[AB]$. Tu obtiens le triangle OAB.

Or $OA = OB$, car ce sont deux rayons. Le triangle OAB est donc isocèle en O. Son angle au sommet est l'angle au centre $\widehat{AOB}$.



Deux rayons et une corde forment le triangle OAB : les côtés [OA] et [OB] sont égaux, et les angles à la base, en A et en B, aussi.

Devine : Un angle à la base

Sur un cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 120°$. Combien mesure $\widehat{OAB}$?

A. $30°$

Juste.

Juste : les angles à la base se partagent $60°$.

B. $60°$

Faux.

C'est la moitié de l'angle au centre : la mesure d'un angle inscrit, pas d'un angle à la base.

C. $120°$

Faux.

C'est l'angle au sommet, pas un angle à la base.

D. $45°$

Faux.

Ce serait vrai pour un angle au centre de $90°$.

Correction

Le triangle OAB est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons). Ses angles à la base sont égaux.

D'après la somme des angles d'un triangle, ils se partagent $180° - 120° = 60°$. Donc :

$$\widehat{OAB} = \frac{60°}{2} = 30°$$

Méthode : utiliser le triangle isocèle formé par deux rayons

1. **Remarque** que $OA = OB$, car ce sont deux rayons : le triangle OAB est isocèle en O.
2. **Déduis-en** que ses angles à la base sont égaux : $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
3. **Utilise** la somme des angles d'un triangle, $180°$, pour l'angle qui manque.
4. **Enchaîne**, si besoin, avec la propriété « angle inscrit et angle au centre ».

Enchaîner les propriétés

Exemple : de l'angle à la base à l'angle inscrit

Sur un cercle de centre O, $\widehat{OAB} = 35°$. Le point M est sur le grand arc AB.

Triangle isocèle. Le triangle OAB est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons). Donc $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 35°$.

Calcul de $\widehat{AOB}$. D'après la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= 180° - 2 \times 35° \\ &= 110°\end{aligned}$$

Calcul de $\widehat{AMB}$. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{110°}{2} = 55°$$

Vérifie : Trois propriétés à la suite

Sur un cercle de centre O, $\widehat{OAB} = 40°$ et M est sur le grand arc AB. Combien mesure $\widehat{AMB}$?

A. $50°$

Juste.
Juste : $\widehat{AOB} = 100°$, puis la moitié.

B. $100°$

Faux.
C'est l'angle au centre : il reste à le diviser par 2.

C. $20°$

Faux.
Tu as divisé l'angle à la base par 2 : il faut d'abord l'angle au centre.

D. $80°$

Faux.

Tu as doublé l'angle à la base : ce n'est pas l'angle au centre.

Correction

Triangle isocèle. Le triangle OAB est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons) : $\widehat{OBA} = 40°$.

Calcul de $\widehat{AOB}$. D'après la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= 180° - 2 \times 40° \\ &= 100°\end{aligned}$$

Calcul de $\widehat{AMB}$. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AMB} = \frac{100°}{2} = 50°$$

Conclusion. L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ mesure $50°$.

Exemple : de l'angle inscrit aux angles à la base

Sur un cercle de centre O, le point M est sur le grand arc AB, et $\widehat{AMB} = 35°$.

Calcul de $\widehat{AOB}$. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre », $\widehat{AOB} = 2 \times 35° = 70°$.

Angles à la base. Le triangle OAB est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons) : ses angles à la base sont égaux. D'après la somme des angles d'un triangle :

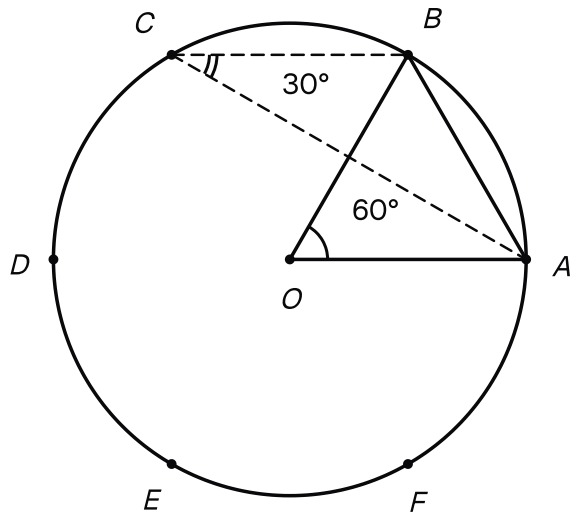
$$\begin{aligned}\widehat{OAB} = \widehat{OBA} &= \frac{180° - 70°}{2} \\ &= 55°\end{aligned}$$

Des points régulièrement répartis

Exemple : six points régulièrement répartis

Trace un cercle de centre O et de rayon 3 cm. Place six points A, B, C, D, E et F dans cet ordre, régulièrement répartis. Deux points voisins forment un angle au centre de $\frac{360°}{6} = 60°$.

- Les six angles au centre font le tour complet : $6 \times 60° = 360°$.
- Le triangle OAB est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons). Ses angles à la base mesurent $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$.
- Le point C est sur le grand arc AB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre », $\widehat{ACB} = 30°$.



Six points régulièrement répartis sur le cercle de rayon 3 cm : l'angle au centre AOB vaut 60 degrés et l'angle inscrit ACB en vaut 30.

Vérifie : Un angle inscrit plus ouvert

Sur un cercle de centre O, on place six points régulièrement répartis, nommés A, B, C, D, E et F dans l'ordre. Combien mesure l'angle inscrit $\widehat{AEC}$?

A. $30°$

Faux.

C'est $\widehat{ACB}$: ici, l'arc intercepté est plus grand.

B. $120°$

Faux.

C'est l'angle au centre $\widehat{AOC}$, pas l'angle inscrit.

C. $45°$

Faux.

Aucune propriété ne donne cette valeur : pars de $\widehat{AOC}$.

D. $60°$

Juste.

Juste : la moitié de $\widehat{AOC} = 120°$.

Correction

L'angle $\widehat{AEC}$ intercepte l'arc AC qui contient B. Cet arc compte deux intervalles : l'angle au centre correspondant est $\widehat{AOC} = 2 \times 60° = 120°$.

Le point E est sur le grand arc AC. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AEC} = \frac{120°}{2} = 60°$$

À toi : De l'angle inscrit à l'angle à la base

Sur un cercle de centre O, le point M est sur le grand arc AB, et $\widehat{AMB} = 40°$. Calcule $\widehat{AOB}$, puis $\widehat{OAB}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la propriété « angle inscrit et angle au centre ».
Indice 2
Regarde ensuite le triangle OAB : $OA = OB$.
Indice 3
Point délicat : les deux angles à la base se partagent $180° - \widehat{AOB}$.

Réponse
Angle au centre. Le point M est sur le grand arc AB. D'après la propriété « angle inscrit et angle au centre » :

$$\widehat{AOB} = 2 \times 40° = 80°$$

Angle à la base. Le triangle OAB est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons) : ses angles à la base sont égaux. D'après la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{OAB} &= \frac{180° - 80°}{2} \\ &= 50°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle au centre $\widehat{AOB}$ mesure $80°$, et l'angle $\widehat{OAB}$ mesure $50°$.

Un piège, le coin examen

Attention : angle au centre ou angle à la base ?

✗ « $\widehat{OAB} = 30°$, donc $\widehat{AMB} = \frac{30°}{2} = 15°$. »

✓ La propriété relie l'angle inscrit à l'angle **au centre**, de sommet O. L'angle $\widehat{OAB}$ est un angle à la base.

Calcule d'abord l'angle au centre :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= 180° - 2 \times 30° \\ &= 120°\end{aligned}$$

Ensuite seulement, pour M sur le grand arc AB, $\widehat{AMB} = 60°$.

Remarque : Coin examen : un calcul en trois questions

En devoir, un exercice enchaîne les propriétés. Exemple : sur un cercle de centre O, $\widehat{OAB} = 25°$, et M est sur le grand arc AB.

1. Nature du triangle OAB (1 point) : « Il est isocèle en O, car $OA = OB$ (deux rayons). »
2. Calcul de $\widehat{AOB}$ (1 point) : « D'après la somme des angles d'un triangle, $\widehat{AOB} = 180° - 2 \times 25° = 130°$. »
3. Calcul de $\widehat{AMB}$ (1 point) : « D'après la propriété angle inscrit et angle au centre, $\widehat{AMB} = \frac{130°}{2} = 65°$. »

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel angle, quel arc, quelle propriété

- **Angle au centre** : sommet en O ; il intercepte le petit arc AB.
- **Angle inscrit** : sommet sur le cercle ; il intercepte l'arc qui ne contient pas son sommet.
- **Même arc**, sommet sur le grand arc : l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre.
- **Deux angles inscrits** qui interceptent le même arc ont la même mesure.
- **Deux rayons** forment un triangle isocèle : ses angles à la base sont égaux.

À retenir : Les gestes de rédaction

- Dis sur quel arc se trouve chaque sommet.
- Nomme chaque propriété que tu emploies.
- Écris « car $OA = OB$ (deux rayons) » avant d'utiliser un triangle isocèle.
- Une mesure au rapporteur sert à conjecturer, jamais à justifier.

Le mot du prof. Tu sais maintenant lire un cercle avec méthode : un sommet, un arc, une propriété. Les angles inscrits te resserviront au lycée, sur de nouvelles figures. Garde le réflexe : nommer la propriété avant de calculer.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Angles inscrits et angles au centre » (3ac · general · mathematiques)