BURHAN

Résumé : Oscillations forcées dans un circuit RLC série

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/physique-chimie/oscillations-forcees-circuit-rlc-serie/resume

Chapitre	Semestre
Oscillations forcées dans un circuit RLC série	Semestre 2

Excitateur, résonateur et régime forcé

Remarque : La période propre du circuit livré à lui-même

Rappel : laissé à lui-même après la charge du condensateur, un circuit RLC série faiblement amorti oscille avec une pseudo-période voisine de la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. La résistance amortit ces oscillations libres.

Définition : Oscillations forcées : excitateur et résonateur

Un circuit RLC série branché aux bornes d'un **générateur basses fréquences** (GBF) qui délivre une tension sinusoïdale de fréquence N est le siège d'**oscillations forcées**.

Après un **régime transitoire** bref, le circuit atteint un **régime permanent sinusoïdal forcé** : l'intensité du courant est sinusoïdale, de même fréquence N que la tension du générateur.

Le générateur est l'**excitateur** : il impose sa fréquence. Le circuit RLC est le **résonateur** : l'amplitude de sa réponse dépend de l'écart entre N et sa fréquence propre

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Exemple

Situation. Un GBF réglé sur $N = 900\,\text{Hz}$ alimente une bobine d'inductance $L = 50\,\text{mH}$ en série avec un condensateur de capacité $C = 2{,}2\,\mu\text{F}$.

Fréquence propre. $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 4{,}8 \times 10^{2}\,\text{Hz}$.

Régime permanent. L'intensité oscille à $900\,\text{Hz}$, la fréquence de l'excitateur. La fréquence propre ne change pas la fréquence de la réponse ; elle pèse sur son amplitude et sur son déphasage.

Attention : Le circuit suit le rythme du générateur

Une fois le régime transitoire passé, ne cherche pas la fréquence propre sur l'oscillogramme. Le résonateur vibre au rythme que lui impose le GBF. L'écart entre N et N_0 règle la taille de la réponse et son décalage par rapport à la tension, jamais sa fréquence.

Méthode : Brancher l'oscilloscope sur le circuit

1. **Masse** : place le résistor du côté de la masse du GBF, pour que l'oscilloscope et le générateur aient une borne commune.
2. **Voie 1** : sur l'autre borne du GBF, elle montre la tension $u(t)$ appliquée au circuit.
3. **Voie 2** : entre le résistor et le condensateur, elle montre $u_R = R\,i$, image de l'intensité.
4. **Lecture** : attends le régime permanent, puis divise l'amplitude de u_R par R pour obtenir I_m.

Amplitude, pulsation et valeur efficace

Définition : Grandeurs d'une intensité sinusoïdale et valeurs efficaces

Une intensité sinusoïdale s'écrit

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i),$$

où I_m est l'**amplitude** (en A), ω la **pulsation** (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$), $\omega t + \varphi_i$ la **phase** et φ_i la phase à l'origine. La période T et la fréquence N vérifient

$$\omega = 2\pi N = \frac{2\pi}{T}.$$

Les **valeurs efficaces** de l'intensité et d'une tension sinusoïdales d'amplitudes I_m et U_m sont

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Un ampèremètre et un voltmètre utilisés en mode alternatif indiquent des valeurs efficaces.

Exemple

Expression. $i(t) = 71\cos(400\pi\, t)$, avec i en milliampères et t en secondes.

Lecture. L'amplitude vaut $I_m = 71\,\mathrm{mA}$ et la pulsation $\omega = 400\pi\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Fréquence et période. $N = \dfrac{\omega}{2\pi} = 200\,\mathrm{Hz}$ et $T = \dfrac{1}{N} = 5{,}0\,\mathrm{ms}$.

Valeur efficace. $I = \dfrac{71}{\sqrt{2}} \approx 50\,\mathrm{mA}$.

Attention : Amplitude à l'écran, valeur efficace au voltmètre

L'écran de l'oscilloscope donne une amplitude ; l'ampèremètre et le voltmètre en mode alternatif donnent une valeur efficace, $\sqrt{2}$ fois plus petite. Avant d'écrire $Z = \dfrac{U}{I}$ ou $P = U\,I\cos\varphi$, vérifie que les deux grandeurs sont de même nature.

Impédance et déphasage lus à l'oscilloscope

Définition : Impédance d'un dipôle en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal forcé, l'**impédance** Z d'un dipôle est le quotient de la valeur efficace U de la tension à ses bornes par la valeur efficace I de l'intensité qui le traverse :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}.$$

Elle s'exprime en ohms (Ω).

Définition : Déphasage de la tension par rapport à l'intensité

On prend l'intensité comme origine des phases :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t),$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi).$$

L'angle φ, en radians, est le **déphasage** de la tension u par rapport à l'intensité i. Si $\varphi > 0$, la tension est **en avance** sur l'intensité ; si $\varphi < 0$, elle est **en retard** ; si $\varphi = 0$, elles sont **en phase**.

Sur un oscillogramme de période T, si τ est le décalage horaire entre deux maximums voisins des deux courbes, alors

$$|\varphi| = \frac{2\pi\,\tau}{T}.$$

Méthode : Mesurer sur l'écran de l'oscilloscope

1. **Divisions** : compte-les, puis multiplie par la sensibilité de la voie ou du balayage.
2. **Période** : mesure la durée de plusieurs périodes et divise, l'erreur de lecture se partage.
3. **Décalage** : relève l'écart τ entre deux sommets voisins des deux courbes, puis calcule $|\varphi| = \dfrac{2\pi\,\tau}{T}$.
4. **Signe** : la courbe qui culmine la première est en avance ; si c'est la tension, φ est positif.

Exemple

Mesures. Balayage $0{,}2\,\text{ms/div}$; une période couvre $6{,}0$ divisions, le décalage $1{,}0$ division. Donc $T = 1{,}2\,\text{ms}$ et $\tau = 0{,}20\,\text{ms}$.

Déphasage. $|\varphi| = \dfrac{2\pi \times 0{,}20}{1{,}2} \approx 1{,}0\,\text{rad}$. La tension culmine la première : $\varphi \approx 1{,}0\,\text{rad}$, positif.

Impédance. Pour $U_m = 3{,}0\,\text{V}$ et $I_m = 12\,\text{mA}$:

$$Z = \frac{3{,}0}{12 \times 10^{-3}} = 2{,}5 \times 10^{2}\,\Omega$$

Attention : Le signe du déphasage se lit sur l'écran

La relation $|\varphi| = \dfrac{2\pi\,\tau}{T}$ ne donne qu'une valeur absolue. Le signe vient de l'écran : repère quelle grandeur atteint son maximum en premier. Ici, le déphasage est toujours celui de la tension par rapport à l'intensité.

Impédance d'un RLC série selon la fréquence

Propriété : Impédance et déphasage d'un circuit RLC série

Un circuit RLC série comporte un résistor de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance r, et un condensateur de capacité C ; sa résistance totale est $R_t = R + r$. Il est alimenté par la tension $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. En régime permanent, l'intensité est $i(t) = I_m \cos(\omega t)$, avec

$$\begin{aligned} Z &= \frac{U_m}{I_m} \\ &= \sqrt{R_t^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

et

$$\cos\varphi = \frac{R_t}{Z},$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R_t}.$$

Le déphasage vérifie $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Si $L\omega > \dfrac{1}{C\omega}$, alors $\varphi > 0$: le circuit est **inductif**. Si $L\omega < \dfrac{1}{C\omega}$, alors $\varphi < 0$: le circuit est **capacitif**.

Méthode : Calculer l'impédance pas à pas

1. **Données** : $\omega = 2\pi N$ et $R_t = R + r$.
2. **Deux termes** : calcule à part $L\omega$ et $\dfrac{1}{C\omega}$, tous deux en ohms.
3. **Impédance** : leur différence et R_t donnent Z, puis $I = \dfrac{U}{Z}$.
4. **Déphasage** : $\tan\varphi$ ou $\cos\varphi = \dfrac{R_t}{Z}$, puis φ en radians.
5. **Nature** : le plus grand des deux termes décide ; $L\omega$ l'emporte pour un circuit inductif.

Exemple

Données. $N = 2{,}0\,\text{kHz}$, $L = 15\,\text{mH}$, $C = 0{,}56\,\mu\text{F}$, $R_t = 45\,\Omega$.

Deux termes. $\omega \approx 1{,}26 \times 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $L\omega \approx 1{,}9 \times 10^2\,\Omega$ et $\dfrac{1}{C\omega} \approx 1{,}4 \times 10^2\,\Omega$; leur différence vaut environ $46{,}4\,\Omega$.

Impédance.

$$Z = \sqrt{45^2 + 46{,}4^2} \approx 65\,\Omega$$

Déphasage. $\tan\varphi \approx \dfrac{46{,}4}{45}$, d'où $\varphi \approx 0{,}80\,\text{rad}$: le circuit est inductif.

Résonance d'intensité, bande passante et acuité

Propriété : Résonance d'intensité d'un circuit RLC série

La tension efficace U du générateur est maintenue constante et l'on fait varier sa fréquence N. L'intensité efficace

$$I = \frac{U}{Z}$$

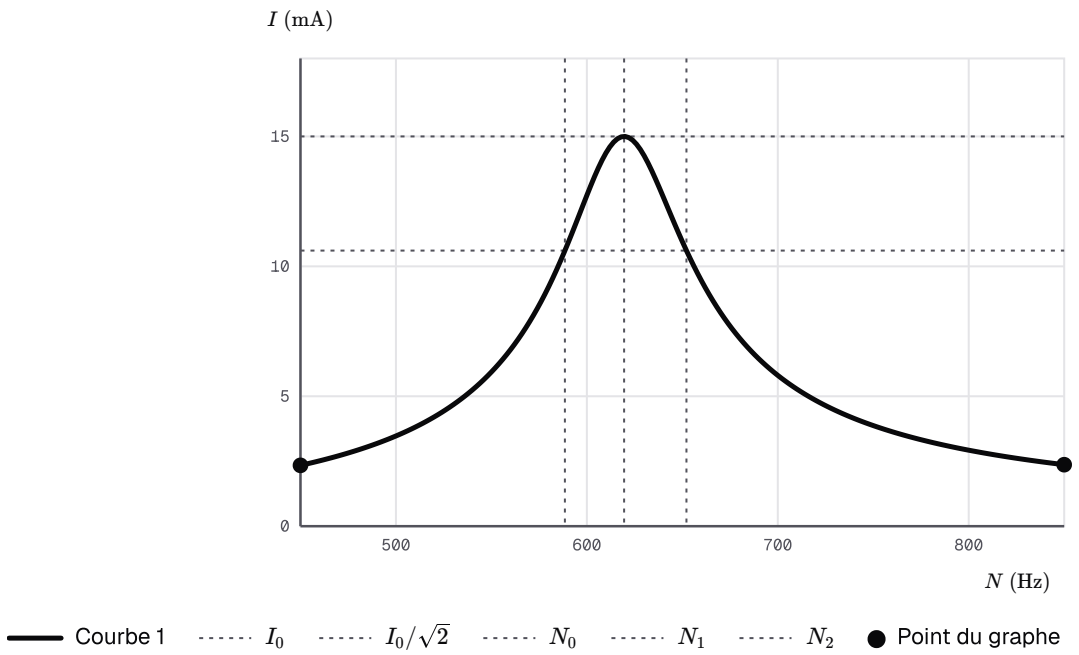
est maximale pour la fréquence

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

égale à la fréquence propre du résonateur : c'est la **résonance d'intensité**. À la résonance :

$$Z = R_t, \qquad I_0 = \frac{U}{R_t}, \qquad \varphi = 0.$$

La tension et l'intensité sont alors en phase.



Courbe de résonance d'intensité et bande passante à -3 dB

Définition : Bande passante à -3 dB

La **bande passante à** $-3\,\mathrm{dB}$ d'un circuit RLC série est l'intervalle des fréquences $[N_1 ; N_2]$ pour lesquelles l'intensité efficace vérifie

$$I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}},$$

où I_0 est l'intensité efficace à la résonance. Sa **largeur** est

$$\Delta N = N_2 - N_1.$$

Propriété : Largeur de la bande passante d'un circuit RLC série

Pour un circuit RLC série de résistance totale R_t et d'inductance L, la largeur de la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$ est

$$\Delta N = \frac{R_t}{2\pi L}.$$

Elle ne dépend pas de la capacité C : à inductance donnée, plus la résistance totale est faible, plus la bande passante est étroite.

Définition : Facteur de qualité d'un circuit RLC série

Le **facteur de qualité** d'un circuit RLC série est le quotient de sa fréquence de résonance par la largeur de sa bande passante :

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N}.$$

Il est sans unité. Plus Q est grand, plus la bande passante est étroite devant N_0 : la résonance est **aiguë**. Un facteur de qualité faible donne une résonance **floue**.

Méthode : Lire une courbe de résonance

1. **Sommet** : lis I_0 et N_0 au maximum de la courbe.
2. **Seuil** : calcule $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ et trace l'horizontale à cette hauteur.
3. **Bande** : ses deux intersections avec la courbe donnent N_1 et N_2, puis $\Delta N = N_2 - N_1$.
4. **Acuité** : $Q = \frac{N_0}{\Delta N}$.
5. **Composants** : ΔN donne L si R_t est connue, puis N_0 donne C.

Exemple

Circuit de la courbe. $L = 0{,}30\,\text{H}$, $C = 0{,}22\,\mu\text{F}$, $R_t = 120\,\Omega$, sous $U = 1{,}8\,\text{V}$.

Résonance. $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 6{,}2 \times 10^2\,\text{Hz}$ et $I_0 = \frac{U}{R_t} = 15\,\text{mA}$.

Bande passante. $\Delta N = \frac{R_t}{2\pi L} \approx 64\,\text{Hz}$.

Acuité. $Q = \frac{N_0}{\Delta N} \approx 9{,}7$: la bande passante ne couvre qu'un dixième environ de N_0, la résonance est aiguë.

Attention : La bobine ajoute sa propre résistance

Dans $I_0 = \frac{U}{R_t}$ et $\Delta N = \frac{R_t}{2\pi L}$, la résistance totale compte celle de la bobine. Avec R seule, tu trouves une intensité trop forte et une résonance plus aiguë qu'en réalité.

Tension du condensateur à la résonance

Propriété : Surtension aux bornes du condensateur à la résonance

Le facteur de qualité d'un circuit RLC série s'écrit

$$Q = \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

À la résonance d'intensité, la tension efficace aux bornes du condensateur vaut

$$U_C = Q\,U,$$

où U est la tension efficace du générateur. Si $Q > 1$, la tension aux bornes du condensateur dépasse celle du générateur : c'est la **surtension**.

Exemple

Facteur de qualité. Pour le circuit de la courbe :

$$Q = \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 9{,}7$$

Surtension. À la résonance, $U_C = Q\,U \approx 9{,}7 \times 1{,}8 \approx 18\ \mathrm{V}$, près de dix fois la tension efficace du générateur.

À retenir : Un condensateur qui supporte la surtension

La tension de service d'un condensateur est la tension maximale qu'il supporte : c'est une amplitude. Compare-la à l'amplitude $U_C\sqrt{2}$ atteinte à la résonance. Si elle est dépassée, ajoute une résistance en série : Q baisse, et la surtension avec lui.

Puissance reçue par un dipôle en régime sinusoïdal

Propriété : Puissance moyenne et facteur de puissance

En régime sinusoïdal forcé, la **puissance instantanée** reçue par un dipôle est $p(t) = u(t)\,i(t)$. Sa valeur moyenne sur une période, la **puissance moyenne**, est

$$P = U\,I\cos\varphi,$$

en watts (W). Le nombre $\cos\varphi$ est le **facteur de puissance** ; le produit $U\,I$ est la **puissance apparente**, en voltampères (VA).

Pour un circuit RLC série,

$$\cos\varphi = \frac{R_t}{Z}, \qquad P = R_t\,I^2 :$$

toute la puissance moyenne reçue est dissipée par effet Joule dans les résistances.

Méthode : Calculer une puissance moyenne et la contrôler

1. **Relevés** : U et I en valeurs efficaces, et φ par l'oscillogramme ou par le calcul.
2. **Facteur** : $\cos\varphi$, égal à $\dfrac{R_t}{Z}$ pour un circuit RLC série.
3. **Puissance** : $P = U\,I\cos\varphi$, en watts.
4. **Contrôle** : la même valeur doit sortir de $R_t\,I^2$, la puissance dissipée par effet Joule.

Exemple

Données. Un dipôle reçoit $U = 6{,}0\,\mathrm{V}$ et $I = 80\,\mathrm{mA}$, avec $\varphi = 0{,}40\,\mathrm{rad}$.

Facteur de puissance. $\cos\varphi \approx 0{,}92$.

Puissances. $P = U\,I\cos\varphi \approx 0{,}44\,\mathrm{W}$, pour une puissance apparente $U\,I = 0{,}48\,\mathrm{VA}$.

Résistance équivalente. La résistance qui dissiperait cette puissance par effet Joule vaut $R_d = \dfrac{P}{I^2} \approx 69\,\Omega$.

Attention **: Puissance apparente et puissance moyenne**

Le produit $U\,I$ se mesure en voltampères : c'est la puissance apparente. Le dipôle ne reçoit en moyenne que $U\,I\cos\varphi$. Les deux ne coïncident qu'en phase, à la résonance pour un circuit RLC série.

Gestes et formules des oscillations forcées

Méthode **: Choisir la méthode selon la grandeur demandée**

- **Montage** : résistor à la masse, voie 1 sur le GBF, voie 2 sur le résistor.
- **Oscillogramme** : divisions fois sensibilité, puis $Z = \dfrac{U_m}{I_m}$ et $|\varphi| = \dfrac{2\pi\,\tau}{T}$.
- **Circuit connu** : $L\omega$ et $\dfrac{1}{C\omega}$ séparément, puis Z et $\tan\varphi$.
- **Inductif ou capacitif** : signe de $L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$.
- **Résonance** : $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ et $I_0 = \dfrac{U}{R_t}$.
- **Courbe de résonance** : horizontale $\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$, bande passante, facteur de qualité.
- **Condensateur** : surtension $U_C = Q\,U$ à la résonance.
- **Énergie** : $P = U\,I\cos\varphi$, contrôlée par $R_t\,I^2$.

Pulsation

$$\omega = 2\pi N = \frac{2\pi}{T}$$

Valeurs efficaces

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Impédance

$$Z = \frac{U}{I}$$

Déphasage lu

$$|\varphi| = \frac{2\pi\,\tau}{T}$$

Circuit RLC série

$$Z^2 = R_t^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

Déphasage calculé

$$\cos\varphi = \frac{R_t}{Z}$$

Résonance

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad I_0 = \frac{U}{R_t}$$

Bande passante

$$\Delta N = \frac{R_t}{2\pi L}$$

Facteur de qualité

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Surtension

$$U_C = Q\,U$$

Puissance moyenne

$$P = U\,I\cos\varphi = R_t\,I^2$$

À retenir : Écrire un calcul avec formule, unités et approximation

Pour une équation du circuit, nomme la loi d'additivité des tensions et la convention récepteur. Une solution proposée se vérifie par substitution. Écris la formule littérale, puis les valeurs avec unités, puis le résultat. Une lecture sur l'écran ou sur une courbe s'écrit avec $\approx$.