BURHAN

Oscillations forcées dans un circuit RLC série : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/physique-chimie/oscillations-forcees-circuit-rlc-serie/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Oscillations forcées dans un circuit RLC série	Niveau examen	5

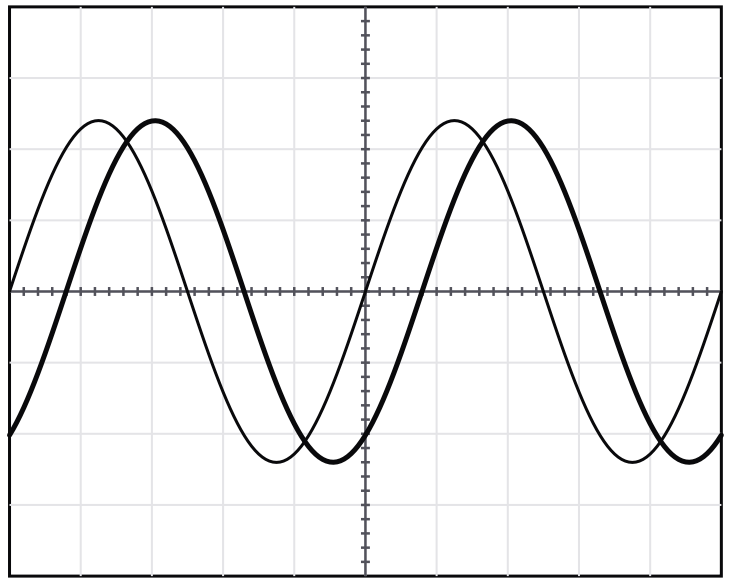
Exercice 1 6 pts

Du déphasage mesuré à la résonance d'un circuit RLC série

Dans un laboratoire de lycée, un GBF réglé sur $N = 1{,}0\,\text{kHz}$ alimente un circuit RLC série. Ce circuit comprend un résistor de résistance $R = 100\,\Omega$, branché du côté de la masse, une bobine et un condensateur.

La voie Y_1 de l'oscilloscope affiche la tension $u(t)$ du générateur, la voie Y_2 la tension $u_R(t)$ du résistor.

Document. Oscillogramme obtenu en régime permanent. Sensibilités : $2\,\text{V/div}$ pour la voie Y_1, $1\,\text{V/div}$ pour la voie Y_2 ; balayage $0{,}2\,\text{ms/div}$.



Voie Y_1 : 2 V/div Voie Y_2 : 1 V/div Balayage : 0,2 ms/div

Voie Y1 : 2 V/div ; voie Y2 : 1 V/div ; balayage : 0,2 ms/div

A.1. 0,75 pts

Partie A : exploitation de l'oscillogramme.

Lire l'amplitude U_m de $u(t)$, l'amplitude U_{Rm} de $u_R(t)$ et la période T. Vérifier la fréquence du GBF.

INDICE

Outil : nombre de divisions multiplié par la sensibilité de la voie ou du balayage.

CORRIGÉ

Amplitudes. Les deux voies culminent à environ $2{,}4$ divisions : $U_m \approx 2{,}4 \times 2 = 4{,}8\,\text{V}$ et $U_{Rm} \approx 2{,}4 \times 1 = 2{,}4\,\text{V}$.

Période. Une période couvre $5{,}0$ divisions : $T \approx 5{,}0 \times 0{,}2 = 1{,}0\,\text{ms}$.

Conclusion. $U_m \approx 4{,}8\,\text{V}$, $U_{Rm} \approx 2{,}4\,\text{V}$ et $T \approx 1{,}0\,\text{ms}$: la fréquence $\dfrac{1}{T} \approx 1{,}0\,\text{kHz}$ est bien celle du GBF.

A.2. 0,75 pts

Calculer l'amplitude I_m de l'intensité, puis l'impédance Z du circuit.

INDICE

Outil : la loi d'Ohm pour le résistor, puis la définition de l'impédance.

CORRIGÉ

Intensité. $I_m = \dfrac{U_{Rm}}{R} \approx \dfrac{2{,}4}{100} = 2{,}4 \times 10^{-2}\,\text{A}$.

Impédance.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{U_m}{I_m} \\ Z &\approx \frac{4{,}8}{2{,}4 \times 10^{-2}} \\ Z &\approx 2{,}0 \times 10^{2}\,\Omega \end{aligned}$$

Conclusion. L'intensité a pour amplitude environ $24\,\text{mA}$ et le circuit une impédance d'environ $2{,}0 \times 10^{2}\,\Omega$.

A.3. 0,5 pts

Mesurer le décalage horaire τ entre les deux courbes, puis calculer le déphasage φ de u par rapport à i. Le circuit est-il inductif ou capacitif ?

INDICE

Outil : la relation entre décalage horaire et déphasage ; le signe se lit sur la courbe en avance.

CORRIGÉ

Décalage. Deux sommets voisins sont séparés d'environ $0{,}8$ division : $\tau \approx 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16\,\text{ms}$.

Valeur absolue. $|\varphi| = \dfrac{2\pi\,\tau}{T} \approx \dfrac{2\pi \times 0{,}16}{1{,}0} \approx 1{,}0\,\text{rad}$.

Signe. La voie Y_2, image de i, culmine la première : la tension est en retard, $\varphi < 0$.

Conclusion. $\varphi \approx -1{,}0\,\text{rad}$: à $1{,}0\,\text{kHz}$, le circuit est capacitif.

A.4. 0,75 pts

Montrer que la résistance totale du circuit s'écrit $R_t = Z\cos\varphi$, puis calculer R_t et la résistance r de la bobine.

INDICE

Outil : le lien entre $\cos\varphi$, R_t et Z. **Point délicat :** garde φ non arrondi.

CORRIGÉ

Relation. Pour un circuit RLC série, $\cos\varphi = \dfrac{R_t}{Z}$, donc $R_t = Z\cos\varphi$.

Application numérique. On garde trois chiffres pour la soustraction qui suit :

$$R_t \approx 200 \times \cos(1{,}005)$$
$$R_t \approx 107\,\Omega$$

Bobine. $r = R_t - R \approx 107 - 100 \approx 7\,\Omega$, valeur peu précise car tirée de lectures à deux chiffres.

Conclusion. La résistance totale vaut environ $107\,\Omega$, à la précision des lectures près, et la bobine a une résistance de quelques ohms, environ $7\,\Omega$.

B.1. 0,75 pts

Partie B : résonance du circuit. On admet que $R_t = 108\,\Omega$, $L = 50\,\text{mH}$ et $C = 0{,}33\,\mu\text{F}$. La tension efficace du GBF est maintenue à $U = 3{,}4\,\text{V}$ quand on fait varier sa fréquence N.

Montrer que l'intensité efficace I est maximale lorsque $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$, puis établir l'expression de la fréquence de résonance N_0.

INDICE

Début : U est constante, donc I est maximale quand l'impédance est minimale. **Ensuite :** cherche le minimum de Z^2.

CORRIGÉ

Minimum de l'impédance. $I = \dfrac{U}{Z}$ avec U constante : I est maximale quand Z est minimale. Or

$$Z^2 = R_t^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

est au moins égal à R_t^2, avec égalité si et seulement si $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$.

Fréquence. Cette condition s'écrit $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$, soit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; avec $\omega_0 = 2\pi N_0$:

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Conclusion. L'intensité est maximale pour $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$, c'est-à-dire à la fréquence $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

B.2. 1 pts

Calculer la fréquence de résonance N_0 et l'intensité efficace I_0 à la résonance.

INDICE

Outil : l'impédance d'un circuit RLC série à la résonance.

CORRIGÉ

Fréquence. $LC = 50 \times 10^{-3} \times 0{,}33 \times 10^{-6} = 1{,}65 \times 10^{-8}\,\text{s}^2$, d'où

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
$$N_0 \approx 1{,}2 \times 10^{3}\,\text{Hz}$$

Intensité. À la résonance, $Z = R_t$ et $I_0 = \dfrac{U}{R_t} = \dfrac{3{,}4}{108} \approx 3{,}1 \times 10^{-2}\,\text{A}$.

Conclusion. La résonance a lieu vers $1{,}2\,\text{kHz}$, avec une intensité efficace d'environ $31\,\text{mA}$.

B.3. 0,75 pts

Calculer la largeur ΔN de la bande passante et le facteur de qualité Q.

INDICE

Outil : la largeur de la bande passante d'un circuit RLC série, puis l'expression de Q en fonction de R_t, L et C.

CORRIGÉ

Bande passante.

$$\Delta N = \frac{R_t}{2\pi L}$$
$$\Delta N = \frac{108}{2\pi \times 0{,}050}$$
$$\Delta N \approx 3{,}4 \times 10^{2}\,\text{Hz}$$

Facteur de qualité. $Q = \dfrac{1}{R_t}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \approx \dfrac{389}{108} \approx 3{,}6$.

Conclusion. La bande passante a une largeur d'environ $3{,}4 \times 10^{2}\,\text{Hz}$ et le facteur de qualité vaut environ $3{,}6$: la bande passante couvre plus du quart de N_0.

B.4. `0,75 pts`

Synthèse. À $1{,}0\,\mathrm{kHz}$, la tension du GBF est en retard sur l'intensité. Expliquer ce résultat par la position de cette fréquence par rapport à N_0, puis décrire l'évolution de I et de φ quand on augmente la fréquence de $1{,}0\,\mathrm{kHz}$ jusqu'à N_0.

INDICE

Début : compare $L\omega$ et $\dfrac{1}{C\omega}$ de part et d'autre de N_0. **Ensuite :** suis l'impédance quand N s'approche de N_0.

CORRIGÉ

Position. $1{,}0\,\mathrm{kHz} < N_0$: $\omega < \omega_0$, donc $LC\omega^2 < 1$ et $L\omega < \dfrac{1}{C\omega}$. Le déphasage est négatif : le circuit est capacitif, la tension en retard.

Évolution. Quand N augmente jusqu'à N_0, l'écart $\dfrac{1}{C\omega} - L\omega$ diminue jusqu'à zéro. L'impédance décroît jusqu'à R_t et I croît jusqu'à I_0 ; φ reste négatif et croît jusqu'à 0.

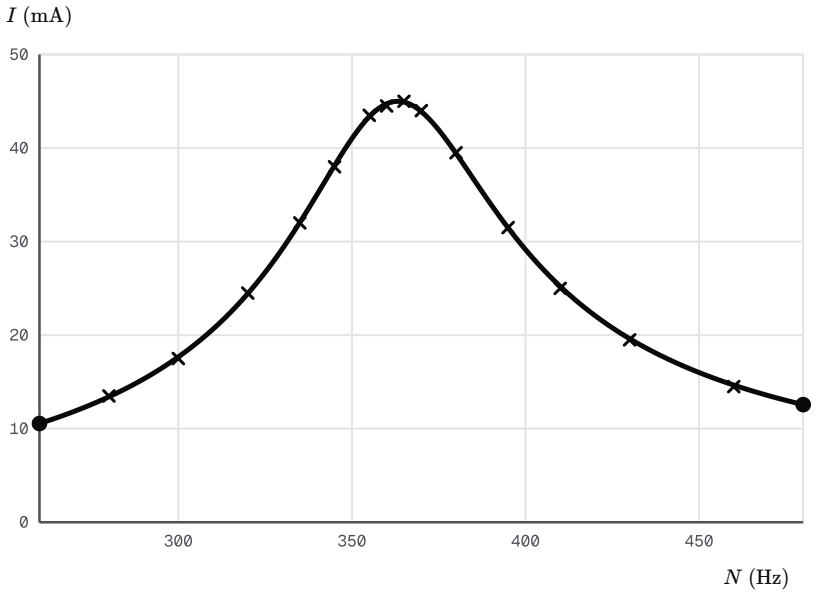
Conclusion. Le retard de la tension vient de ce que la mesure est faite sous la fréquence de résonance ; en montant vers N_0, l'intensité croît et le déphasage s'annule.

Exercice 2 — 6 pts

Mesures d'une résonance et puissance reçue par le circuit

En TP, un GBF de tension efficace maintenue à $U = 2{,}7\,\mathrm{V}$ alimente un circuit RLC série. Il comprend un résistor de résistance $R = 47\,\Omega$, une bobine de résistance $r = 13\,\Omega$ et d'inductance L, et un condensateur de capacité C. On mesure l'intensité efficace I pour différentes fréquences N.

Document. Mesures (croix) et courbe de résonance tracée à partir d'elles.



Intensité efficace mesurée en fonction de la fréquence, et courbe de résonance

A.1. — 0,5 pts

Partie A : exploitation des mesures.

Lire la fréquence de résonance N_0 et l'intensité efficace I_0 à la résonance.

INDICE

Outil : le sommet de la courbe de résonance.

CORRIGÉ

Sommet. La courbe culmine vers $N_0 \approx 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{Hz}$, à $I_0 \approx 45\,\mathrm{mA}$.

Conclusion. Lecture approchée : $N_0 \approx 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{Hz}$ et $I_0 \approx 45\,\mathrm{mA}$.

A.2. 0,75 pts

Déterminer graphiquement les fréquences N_1 et N_2 qui limitent la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$, puis sa largeur ΔN.

INDICE

Outil : la définition de la bande passante ; trace d'abord l'horizontale utile.

CORRIGÉ

Seuil. $\dfrac{I_0}{\sqrt{2}} \approx \dfrac{45}{\sqrt{2}} \approx 32\,\mathrm{mA}$.

Lecture. L'horizontale $I = 32\,\mathrm{mA}$ coupe la courbe vers $N_1 \approx 335\,\mathrm{Hz}$ et $N_2 \approx 395\,\mathrm{Hz}$.

Largeur. $\Delta N = N_2 - N_1 \approx 60\,\mathrm{Hz}$.

Conclusion. La bande passante s'étend d'environ 335 à $395\,\mathrm{Hz}$; sa largeur vaut environ $60\,\mathrm{Hz}$.

A.3. 0,5 pts

Calculer le facteur de qualité Q du circuit.

INDICE

Outil : la définition du facteur de qualité.

CORRIGÉ

Facteur de qualité.

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N}$$
$$Q \approx \frac{360}{60} \approx 6{,}0$$

Conclusion. Le facteur de qualité vaut environ $6{,}0$.

A.4. 0,75 pts

Montrer que l'inductance de la bobine s'écrit

$$L = \frac{U}{2\pi\, I_0\, \Delta N}$$

puis calculer L.

INDICE

Début : exprime R_t à la résonance. **Ensuite :** reporte-la dans la largeur de la bande passante.

CORRIGÉ

Résistance totale. À la résonance, $I_0 = \dfrac{U}{R_t}$, donc $R_t = \dfrac{U}{I_0}$.

Bande passante. $\Delta N = \dfrac{R_t}{2\pi L}$, donc $L = \dfrac{R_t}{2\pi\,\Delta N} = \dfrac{U}{2\pi\, I_0\, \Delta N}$.

Application numérique.

$$L \approx \frac{2{,}7}{2\pi \times 0{,}045 \times 60}$$
$$L \approx 0{,}16\,\mathrm{H}$$

Conclusion. L'inductance de la bobine vaut environ $0{,}16\,\mathrm{H}$.

A.5. 0,5 pts

En déduire la capacité C du condensateur.

INDICE

Outil : l'expression de la fréquence de résonance. **Point délicat :** garde L non arrondie.

CORRIGÉ

Relation. $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, donc

$$C = \frac{1}{4\pi^2 N_0^2 L}$$
$$C \approx 1{,}2 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$$

Conclusion. La capacité du condensateur vaut environ $1{,}2\,\mu\mathrm{F}$.

B.1. 1 pts

Partie B : puissance reçue par le circuit. On admet que $R_t = 60\,\Omega$ et qu'à la résonance l'intensité efficace vaut $I_0 = 45\,\text{mA}$ sous $U = 2{,}7\,\text{V}$.

Calculer la puissance moyenne P_0 reçue par le circuit à la résonance, puis la contrôler par l'effet Joule.

INDICE

Outil : la puissance moyenne en régime sinusoïdal ; à la résonance, la tension et l'intensité sont en phase.

CORRIGÉ

Puissance. À la résonance, $\varphi = 0$ et $\cos\varphi = 1$:

$$P_0 = U\,I_0$$
$$P_0 = 2{,}7 \times 0{,}045$$
$$P_0 \approx 0{,}12\,\text{W}$$

Contrôle. $R_t\,I_0^2 = 60 \times 0{,}045^2 \approx 0{,}12\,\text{W}$.

Conclusion. À la résonance, le circuit reçoit en moyenne environ $0{,}12\,\text{W}$, entièrement dissipés par effet Joule.

B.2. 0,75 pts

Montrer qu'aux fréquences N_1 et N_2 qui limitent la bande passante à $-3\,\text{dB}$, la puissance moyenne reçue vaut $\dfrac{P_0}{2}$.

INDICE

Début : écris l'intensité efficace en limite de bande. **Ensuite :** utilise la puissance dissipée par effet Joule.

CORRIGÉ

Intensité. En N_1 et N_2, $I = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ par définition de la bande passante.

Puissance. Pour un circuit RLC série, $P = R_t\,I^2$:

$$P = R_t\,\frac{I_0^2}{2}$$
$$P = \frac{P_0}{2}$$

Conclusion. Aux limites de la bande passante, la puissance moyenne reçue vaut la moitié de celle reçue à la résonance.

B.3. 0,5 pts

À la fréquence N_1, l'impédance vaut $Z = \sqrt{2}\,R_t$. Calculer le facteur de puissance et le déphasage φ, sachant que $N_1 < N_0$.

INDICE

Outil : l'expression de $\cos\varphi$ d'un circuit RLC série ; sous N_0, le circuit est capacitif.

CORRIGÉ

Facteur de puissance. $\cos\varphi = \dfrac{R_t}{Z} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$.

Signe. Sous la fréquence de résonance, $L\omega < \dfrac{1}{C\omega}$: $\varphi < 0$, donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{4} \approx -0{,}79\,\text{rad}$.

Conclusion. En N_1, le facteur de puissance vaut environ $0{,}71$ et la tension est en retard de $\dfrac{\pi}{4}$ sur l'intensité.

B.4. 0,75 pts

Synthèse. Un élève propose de remplacer le résistor par un résistor de $23{,}5\,\Omega$: « En divisant R par deux, on double la puissance reçue à la résonance. » Discuter cette affirmation, la tension efficace restant $2{,}7\,\text{V}$.

INDICE

Début : exprime P_0 en fonction de U et de R_t. **Ensuite :** calcule la nouvelle résistance totale.

CORRIGÉ

Expression. À la résonance, $P_0 = U\,I_0 = \dfrac{U^2}{R_t}$.

Nouveau circuit. $R_t' = 23{,}5 + 13 = 36{,}5\,\Omega$, d'où $P_0' = \dfrac{2{,}7^2}{36{,}5} \approx 0{,}20\,\text{W}$: la puissance est multipliée par environ $1{,}6$ seulement.

Effet secondaire. La résistance totale diminue, donc la bande passante se rétrécit : la résonance devient plus aiguë.

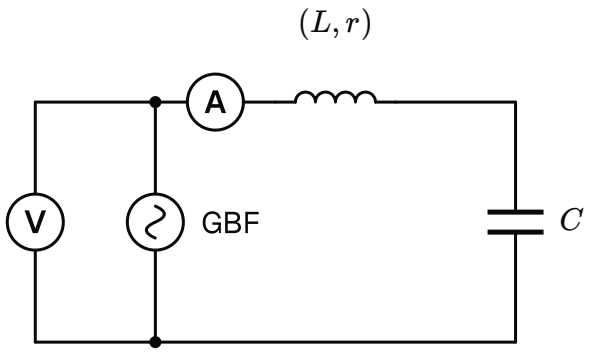
Conclusion. L'affirmation est fausse : la résistance de la bobine reste en série, la résistance totale n'est pas divisée par deux et la puissance ne double pas.

Exercice 3 6 pts

Étude d'une bobine par résonance et choix d'un condensateur

Un technicien veut connaître l'inductance L et la résistance r d'une bobine. Il la monte en série avec un condensateur de capacité $C = 0{,}39\ \mu\text{F}$, aux bornes d'un GBF, avec un ampèremètre et un voltmètre en mode alternatif.

Document. Schéma du montage.



Montage d'étude d'une bobine par résonance

A.1. 0,75 pts

Partie A : caractéristiques de la bobine.

Proposer un protocole qui permet de trouver la fréquence de résonance N_0 de ce circuit avec ce montage.

INDICE

Outil : la grandeur à maintenir constante pour tracer une courbe de résonance.

CORRIGÉ

Réglages. On choisit une tension efficace, par exemple $1{,}50\ \text{V}$, contrôlée au voltmètre.

Recherche. On fait varier la fréquence du GBF ; à chaque réglage, on rétablit la tension efficace choisie, puis on lit l'ampèremètre. Près du maximum, on avance à petits pas.

Conclusion. La fréquence de résonance N_0 est celle pour laquelle l'ampèremètre indique l'intensité la plus grande, la tension efficace restant constante.

A.2. 1 pts

On trouve $N_0 \approx 1{,}47\,\mathrm{kHz}$. En déduire l'inductance L de la bobine.

INDICE

Outil : l'expression de la fréquence de résonance d'un circuit RLC série.

CORRIGÉ

Relation. $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ donne $N_0^2 = \dfrac{1}{4\pi^2 LC}$, soit $L = \dfrac{1}{4\pi^2 N_0^2 C}$.

Application numérique.

$$L = \frac{1}{4\pi^2 N_0^2 C}$$
$$L \approx 3{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{H}$$

Conclusion. L'inductance de la bobine vaut environ $30\,\mathrm{mH}$.

A.3. 0,75 pts

À la résonance, le voltmètre indique $U = 1{,}50\,\mathrm{V}$ et l'ampèremètre $I_0 = 88{,}0\,\mathrm{mA}$. Calculer la résistance r de la bobine.

INDICE

Outil : l'impédance d'un circuit RLC série à la résonance ; ici, aucun résistor n'est monté.

CORRIGÉ

Résistance totale. Le circuit ne comporte que la bobine et le condensateur : $R_t = r$. À la résonance, $Z = R_t$.

Application numérique.

$$r = \frac{U}{I_0}$$
$$r = \frac{1{,}50}{88{,}0 \times 10^{-3}}$$
$$r \approx 17{,}0\,\Omega$$

Conclusion. La bobine a une résistance d'environ $17{,}0\,\Omega$.

A.4. `0,75 pts`

Calculer le facteur de qualité du circuit, puis la tension efficace aux bornes du condensateur pendant la mesure à la résonance.

INDICE

Début : exprime Q avec L, C et la résistance totale. **Point délicat :** garde L et r non arrondies.

CORRIGÉ

Facteur de qualité.

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$Q \approx \frac{278}{17{,}0} \approx 16$$

Surtension. $U_C = Q\,U \approx 16{,}3 \times 1{,}50 \approx 24\,\mathrm{V}$.

Conclusion. Le facteur de qualité vaut environ 16 : pendant la mesure, le condensateur supporte une tension efficace d'environ $24\,\mathrm{V}$, seize fois celle du GBF.

B.1. `1 pts`

Partie B : choix d'un condensateur. On admet que la bobine a une inductance $L = 30\,\mathrm{mH}$ et une résistance $r = 17\,\Omega$. On l'associe en série à un condensateur de capacité C, sans autre résistor. Le GBF délivre $U = 3{,}0\,\mathrm{V}$ à la résonance.

Montrer que, à la résonance, la tension efficace du condensateur vaut $U_C = Q\,U$, avec $Q = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

INDICE

Outil : la tension du condensateur en fonction de sa charge. **Ensuite :** écris-la à la résonance.

CORRIGÉ

Tension du condensateur. Avec $q(t) = \dfrac{I_m}{\omega}\sin(\omega t)$ et $u_C = \dfrac{q}{C}$, la valeur efficace vaut $U_C = \dfrac{I}{C\omega}$.

Résonance. $I = I_0 = \dfrac{U}{r}$ et $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$U_C = \frac{U\sqrt{LC}}{r\,C}$$
$$U_C = \frac{U}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Conclusion. À la résonance, $U_C = Q\,U$ avec $Q = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

B.2. 0,75 pts

Le circuit doit résonner au-dessus de $1{,}5\,\mathrm{kHz}$. On appelle tension de service la plus haute tension que le condensateur supporte entre ses armatures : l'amplitude de u_C ne doit jamais la dépasser. Les condensateurs disponibles sont les suivants.

C	**tension de service**
$0{,}10\,\mu\mathrm{F}$	$100\,\mathrm{V}$
$0{,}33\,\mu\mathrm{F}$	$100\,\mathrm{V}$
$0{,}68\,\mu\mathrm{F}$	$50\,\mathrm{V}$

Calculer la fréquence de résonance obtenue avec chacun. Lequel faut-il écarter ?

INDICE

Outil : l'expression de la fréquence de résonance d'un circuit RLC série.

CORRIGÉ

Fréquences. $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ donne, avec $L = 30\,\mathrm{mH}$:

- pour $0{,}10\,\mu\mathrm{F}$, $N_0 \approx 2{,}9\,\mathrm{kHz}$;
- pour $0{,}33\,\mu\mathrm{F}$, $N_0 \approx 1{,}6\,\mathrm{kHz}$;
- pour $0{,}68\,\mu\mathrm{F}$, $N_0 \approx 1{,}1\,\mathrm{kHz}$.

Conclusion. Le condensateur de $0{,}68\,\mu\mathrm{F}$ est écarté : le circuit résonnerait sous $1{,}5\,\mathrm{kHz}$.

B.3. 0,5 pts

Pour les deux condensateurs restants, calculer l'amplitude de la tension du condensateur à la résonance. Lequel choisir ?

INDICE

Début : calcule Q pour chaque capacité. **Ensuite :** relis la définition de la tension de service.

CORRIGÉ

Condensateur de $0{,}10\,\mu\mathrm{F}$. $Q = \dfrac{1}{17}\sqrt{\dfrac{0{,}030}{0{,}10\times10^{-6}}} \approx 32$ et $Q\,U\sqrt{2} \approx 1{,}4\times10^{2}\,\mathrm{V}$, au-dessus de $100\,\mathrm{V}$.

Condensateur de $0{,}33\,\mu\mathrm{F}$. $Q \approx 18$ et $Q\,U\sqrt{2} \approx 75\,\mathrm{V}$, sous $100\,\mathrm{V}$.

Conclusion. Il faut choisir le condensateur de $0{,}33\,\mu\mathrm{F}$: il donne une résonance vers $1{,}6\,\mathrm{kHz}$ et supporte la surtension.

B.4. `0,5 pts`

Synthèse. On souhaite malgré tout employer le condensateur de $0{,}10\ \mu\mathrm{F}$, en ajoutant un résistor en série. Quelle résistance minimale faut-il ajouter ? Quel en est l'effet sur la résonance ?

INDICE

Début : écris la condition sur Q pour que l'amplitude ne dépasse pas $100\ \mathrm{V}$. **Ensuite :** déduis-en la résistance totale minimale.

CORRIGÉ

Condition. $Q\,U\sqrt{2} \leq 100\ \mathrm{V}$ donne $Q \leq \dfrac{100}{3{,}0\sqrt{2}} \approx 23{,}6$.

Résistance totale. $Q = \dfrac{1}{R_t}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, donc $R_t \geq \dfrac{548}{23{,}6} \approx 23{,}2\ \Omega$. Il faut ajouter au moins $23{,}2 - 17 \approx 6{,}2\ \Omega$: un seuil de sécurité s'arrondit par excès, par exemple avec un résistor normalisé de $6{,}8\ \Omega$.

Effet. La fréquence de résonance ne change pas ; I_0 et Q diminuent, la bande passante s'élargit.

Conclusion. Un résistor d'au moins $6{,}2\ \Omega$ environ, par exemple de $6{,}8\ \Omega$, protège le condensateur de $0{,}10\ \mu\mathrm{F}$, au prix d'une résonance moins aiguë.

Exercice 4 6 pts

Impédance établie par substitution et puissance d'une lampe à ballast

On étudie d'abord un circuit RLC série de laboratoire, puis l'alimentation d'une lampe à décharge par le réseau.

Document. Oscillogramme de la lampe et de son ballast, en partie B.

A.1. 0,75 pts

Partie A : impédance d'un circuit RLC série. Un GBF applique la tension $u(t)$ à un circuit RLC série : résistor $R = 27\,\Omega$, bobine $(L = 0{,}40\,\text{H} ; r = 6{,}0\,\Omega)$, condensateur $C = 10\,\mu\text{F}$. On oriente le circuit dans le sens de i et l'on note q la charge de l'armature vers laquelle le courant est orienté.

Écrire la relation entre u, i, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et q, avec $R_t = R + r$.

INDICE

Outil : la loi d'additivité des tensions, chaque tension étant prise en convention récepteur.

CORRIGÉ

Tensions. En convention récepteur, $u_R = R\,i$, $u_b = r\,i + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $u_C = \dfrac{q}{C}$.

Additivité. $u = u_R + u_b + u_C$, d'où

$$u = R_t\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}$$

Conclusion. D'après la loi d'additivité des tensions, $u = R_t\,i + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{C}$.

A.2. 0,75 pts

En régime permanent, on propose $i(t) = I_m\cos(\omega t)$ et $q(t) = \dfrac{I_m}{\omega}\sin(\omega t)$. Vérifier que $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, puis exprimer $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

INDICE

Outil : la dérivée d'une fonction composée $t \mapsto \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$.

CORRIGÉ

Charge. La dérivée de $\sin(\omega t)$ est $\omega\cos(\omega t)$, donc $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I_m\cos(\omega t) = i$.

Dérivée de l'intensité.

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -I_m\,\omega\sin(\omega t)$$

Conclusion. La charge proposée vérifie $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -I_m\,\omega\sin(\omega t)$.

A.3. 0,5 pts

Montrer que

$$u = R_t I_m \cos(\omega t) - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_m \sin(\omega t)$$

INDICE

Début : reporte i, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et q dans la relation de la question A.1. **Ensuite :** regroupe les termes en $\sin(\omega t)$.

CORRIGÉ

Substitution. On reporte les trois expressions :

$$u = R_t I_m \cos(\omega t) - L I_m \,\omega \sin(\omega t) + \frac{I_m}{C\omega} \sin(\omega t)$$

Regroupement. Les deux derniers termes ont le facteur commun $-I_m \sin(\omega t)$, multiplié par $L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$.

Conclusion. La forme proposée donne $u = R_t I_m \cos(\omega t) - \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) I_m \sin(\omega t)$.

A.4. 0,75 pts

On écrit $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. En développant cette expression, établir que $Z = \dfrac{U_m}{I_m}$ vérifie $Z^2 = R_t^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$ et exprimer $\tan\varphi$.

INDICE

Outil : la formule d'addition du cosinus et l'identification des deux membres.

CORRIGÉ

Développement. $u = U_m \cos\varphi \cos(\omega t) - U_m \sin\varphi \sin(\omega t)$.

Identification. L'égalité vaut pour tout t. En $t = 0$ puis en $t = \dfrac{T}{4}$:

$$U_m \cos\varphi = R_t I_m$$

$$U_m \sin\varphi = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_m$$

Impédance. En élevant au carré et en ajoutant, avec $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, on obtient $Z^2 = R_t^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$. Le quotient des deux égalités donne $\tan\varphi$.

Conclusion. $Z^2 = R_t^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$ et $\tan\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R_t}$.

A.5. 0,5 pts

Calculer Z et φ pour une fréquence $N = 120\,\text{Hz}$.

INDICE

Outil : calcule séparément $L\omega$ et $\dfrac{1}{C\omega}$, en ohms.

CORRIGÉ

Termes. $\omega = 2\pi \times 120 \approx 754\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $L\omega \approx 302\,\Omega$, $\dfrac{1}{C\omega} \approx 133\,\Omega$, d'où une différence d'environ $169\,\Omega$, avec $R_t = 33\,\Omega$.

Impédance.

$$Z = \sqrt{33^2 + 169^2}$$
$$Z \approx 1{,}7 \times 10^2\,\Omega$$

Déphasage. $\tan\varphi \approx \dfrac{169}{33} \approx 5{,}1$, d'où $\varphi \approx 1{,}4\,\text{rad}$.

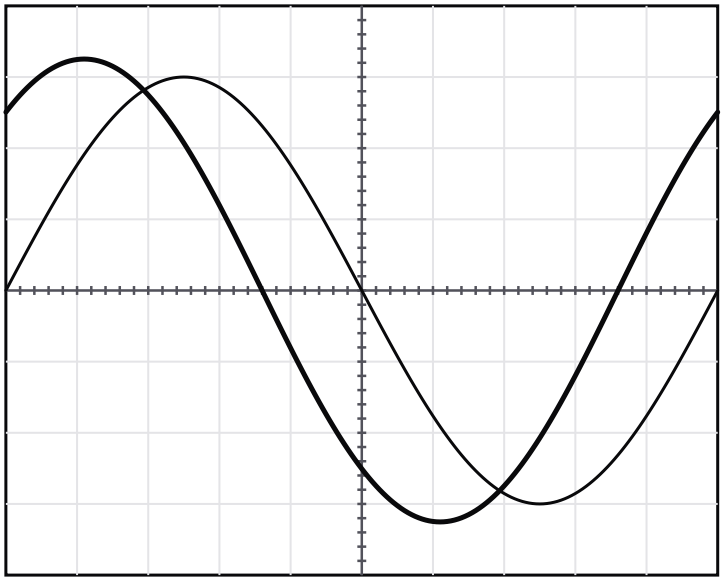
Conclusion. À $120\,\text{Hz}$, $Z \approx 1{,}7 \times 10^2\,\Omega$ et $\varphi \approx 1{,}4\,\text{rad}$: le circuit est inductif.

B.1. `0,75 pts`

Partie B : lampe à ballast. Une lampe à décharge et son ballast, une bobine, forment un dipôle alimenté sous $U = 230\,\mathrm{V}$, $50\,\mathrm{Hz}$. Une sonde transmet $\dfrac{u}{100}$ à la voie Y_1 ; la voie Y_2 reçoit la tension d'un résistor de mesure de $1{,}0\,\Omega$, égale à $1{,}0 \times i$.

Document. Sensibilités : $1\,\mathrm{V/div}$ pour la voie Y_1, $0{,}2\,\mathrm{V/div}$ pour la voie Y_2 ; balayage $2\,\mathrm{ms/div}$.

Lire la période, le décalage horaire et l'amplitude de la voie Y_2. En déduire le déphasage φ de u par rapport à i, puis l'intensité efficace I.



Voie Y1 : 1 V/div (tension divisée par 100) ; voie Y2 : 0,2 V/div ; balayage : 2 ms/div

INDICE

Outil : divisions multipliées par les sensibilités ; le signe de φ se lit sur la courbe en avance.

CORRIGÉ

Lectures. Une période couvre 10 divisions, soit $T \approx 20\,\mathrm{ms}$. Les sommets voisins sont séparés de $1{,}4$ division : $\tau \approx 2{,}8\,\mathrm{ms}$. La voie Y_2 culmine à $3{,}0$ divisions : $I_m \approx \dfrac{0{,}60\,\mathrm{V}}{1{,}0\,\Omega} = 0{,}60\,\mathrm{A}$.

Déphasage. $|\varphi| = \dfrac{2\pi \times 2{,}8}{20} \approx 0{,}88\,\mathrm{rad}$; la voie Y_1 culmine la première : $\varphi > 0$.

Intensité efficace. $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}42\,\mathrm{A}$.

Conclusion. La tension est en avance d'environ $0{,}88\,\mathrm{rad}$ sur l'intensité, dont la valeur efficace vaut environ $0{,}42\,\mathrm{A}$.

B.2. `0,75 pts`

On note $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ la tension du dipôle et $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ l'intensité qui le traverse. La puissance instantanée qu'il reçoit est $p(t) = u(t)\, i(t)$. On admet la formule de transformation

$$\begin{aligned}&\cos a \cos b \\ &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}\end{aligned}$$

et l'on admet que la valeur moyenne de $\cos(2\omega t + \varphi)$ sur une période est nulle.

Montrer que la puissance moyenne reçue par le dipôle vaut $P = U\, I \cos\varphi$.

INDICE

Début : écris $p(t)$ comme le produit de deux cosinus. **Ensuite :** transforme ce produit en somme, puis prends la valeur moyenne de chaque terme.

CORRIGÉ

Produit. $p = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t)$.

Transformation. Avec $a = \omega t + \varphi$ et $b = \omega t$, on a $a + b = 2\omega t + \varphi$ et $a - b = \varphi$. La puissance p est donc la somme du terme constant $\dfrac{U_m I_m}{2}\cos\varphi$ et du terme $\dfrac{U_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \varphi)$.

Valeur moyenne. Le terme en $2\omega t$ oscille autour de zéro : sa moyenne est nulle, d'où

$$P = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi$$

$$P = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\,\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\varphi$$

Valeurs efficaces. Avec $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$, on obtient $P = U\, I \cos\varphi$.

Conclusion. La puissance moyenne reçue par le dipôle vaut $P = U\, I \cos\varphi$.

B.3. `0,75 pts`

Calculer le facteur de puissance et la puissance moyenne P reçue par le dipôle.

INDICE

Outil : l'expression de la puissance moyenne en régime sinusoïdal.

CORRIGÉ

Facteur de puissance. $\cos\varphi \approx \cos(0{,}88) \approx 0{,}64$.

Puissance moyenne.

$$\begin{aligned}P &= U\, I \cos\varphi \\ P &\approx 230 \times 0{,}424 \\ &\quad \times 0{,}637 \\ P &\approx 62\ \mathrm{W}\end{aligned}$$

Conclusion. Le facteur de puissance vaut environ $0{,}64$ et la lampe avec son ballast reçoit en moyenne environ $62\ \mathrm{W}$.

B.4. `0,5 pts`

Synthèse. Pour annuler le déphasage, on propose d'ajouter un condensateur en série, de capacité telle que le dipôle soit à la résonance à $50\,\text{Hz}$. La lampe est conçue pour fonctionner sous l'intensité efficace trouvée à la question B.1 ; elle ne supporte pas une intensité nettement plus grande.

Calculer la résistance totale du dipôle, puis l'intensité efficace qu'il appellerait. Cette solution convient-elle à la lampe ?

INDICE

Début : la résistance totale se tire de $\cos\varphi$ et de l'impédance $\dfrac{U}{I}$. **Ensuite :** à la résonance, l'impédance se réduit à la résistance totale.

CORRIGÉ

Résistance totale. $Z = \dfrac{U}{I} \approx \dfrac{230}{0{,}424} \approx 542\,\Omega$ et $R_t = Z\cos\varphi \approx 3{,}5 \times 10^{2}\,\Omega$.

Résonance. L'impédance deviendrait R_t : $I' = \dfrac{U}{R_t} \approx \dfrac{230}{346} \approx 0{,}67\,\text{A}$, contre $0{,}42\,\text{A}$ avant.

Conclusion. Le condensateur en série annulerait bien le déphasage, mais l'intensité augmenterait d'environ $57\,\%$: la lampe, conçue pour environ $0{,}42\,\text{A}$, serait surchargée, et cette solution ne convient pas.

Exercice 5 6 pts

Oscillations libres puis forcées du capteur d'un détecteur de métaux

Le capteur d'un détecteur de métaux est un circuit RLC série : une bobine d'inductance $L = 8{,}2\,\mathrm{mH}$, un condensateur de capacité $C = 56\,\mathrm{nF}$ et une résistance totale $R_t = 90\,\Omega$. Quand un objet métallique approche de la bobine, son inductance diminue légèrement.

Document. Courbe de résonance du capteur, en partie B.

A.1. 1 pts

Partie A : du régime libre au régime forcé. On charge le condensateur, puis on le relie à la bobine : le circuit est le siège d'oscillations libres amorties, de pseudo-période voisine de la période propre T_0.

Rappeler l'expression de T_0 et la calculer.

INDICE

Outil : la période propre d'un circuit LC.

CORRIGÉ

Expression. Rappel : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

Application numérique.

$$LC = 4{,}59 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}^2$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$T_0 \approx 1{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$$

Conclusion. La période propre du capteur vaut environ $0{,}13\,\mathrm{ms}$.

A.2. 0,5 pts

Pourquoi l'amplitude des oscillations libres diminue-t-elle ? Quel rôle joue un GBF branché sur le circuit ?

INDICE

Outil : l'effet Joule dans la résistance totale, et les mots excitateur et résonateur.

CORRIGÉ

Régime libre. L'énergie initiale du condensateur est peu à peu dissipée par effet Joule dans R_t : l'amplitude décroît.

Régime forcé. Le GBF, excitateur, fournit de l'énergie au circuit et lui impose sa fréquence ; le circuit est le résonateur.

Conclusion. Les oscillations libres s'amortissent par effet Joule ; avec un GBF, des oscillations forcées d'amplitude constante s'installent après le régime transitoire.

A.3. 0,75 pts

Le circuit est alimenté par un GBF de tension efficace constante et de fréquence N réglable. Montrer que l'intensité efficace est maximale pour $N = \dfrac{1}{T_0}$.

INDICE

Début : à tension efficace constante, cherche le minimum de l'impédance. **Ensuite :** exprime la pulsation correspondante en fonction de T_0.

CORRIGÉ

Impédance minimale. $I = \dfrac{U}{Z}$ est maximale quand $Z = \sqrt{R_t^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$ est minimale, c'est-à-dire pour $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$.

Pulsation. $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{2\pi}{T_0}$, donc $N_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{T_0}$.

Conclusion. L'intensité efficace est maximale quand la fréquence du GBF vaut $\dfrac{1}{T_0}$, l'inverse de la période propre.

A.4. 0,5 pts

On règle le GBF sur $N = 5{,}0\,\text{kHz}$. À quelle fréquence oscille l'intensité en régime permanent ? Le circuit est-il inductif ou capacitif ?

INDICE

Outil : en régime forcé, la fréquence est imposée par l'excitateur ; compare N à $\dfrac{1}{T_0}$.

CORRIGÉ

Fréquence. En régime permanent, l'intensité oscille à $5{,}0\,\text{kHz}$, la fréquence du GBF.

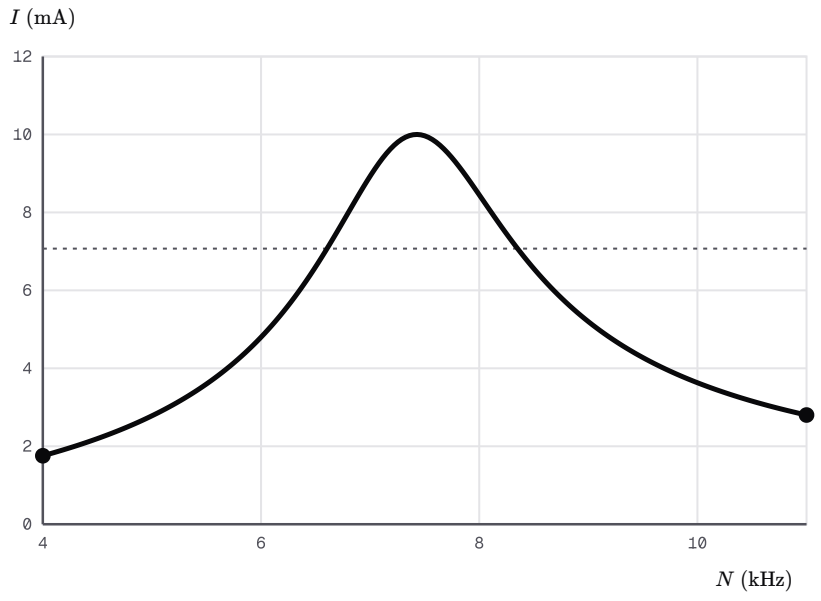
Nature. $\dfrac{1}{T_0} \approx 7{,}4\,\text{kHz}$: N est plus petite que la fréquence de résonance, donc $L\omega < \dfrac{1}{C\omega}$.

Conclusion. L'intensité oscille à $5{,}0\,\text{kHz}$ et, à cette fréquence, le circuit est capacitif.

B.1. 0,5 pts

Partie B : sensibilité du capteur. On admet que $L = 8{,}2\,\text{mH}$ et $C = 56\,\text{nF}$. Le GBF délivre une tension efficace constante $U = 0{,}90\,\text{V}$; l'horizontale tracée est celle de l'intensité $\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Lire la fréquence de résonance N_0 et l'intensité efficace I_0.



Courbe de résonance du capteur, à tension efficace constante

INDICE

Outil : le sommet de la courbe de résonance.

CORRIGÉ

Sommet. La courbe culmine vers $N_0 \approx 7{,}4\,\text{kHz}$, à $I_0 \approx 10\,\text{mA}$.

Conclusion. Lecture approchée : $N_0 \approx 7{,}4\,\text{kHz}$ et $I_0 \approx 10\,\text{mA}$.

B.2. 0,5 pts

Lire les fréquences N_1 et N_2 qui limitent la bande passante à $-3\,\text{dB}$, puis calculer sa largeur ΔN.

INDICE

Outil : les intersections de l'horizontale tracée avec la courbe.

CORRIGÉ

Lecture. L'horizontale coupe la courbe vers $N_1 \approx 6{,}60\,\text{kHz}$ et $N_2 \approx 8{,}35\,\text{kHz}$.

Largeur. $\Delta N = N_2 - N_1 \approx 1{,}75\,\text{kHz}$.

Conclusion. La bande passante a une largeur d'environ $1{,}75\,\text{kHz}$.

B.3. 0,5 pts

Calculer le facteur de qualité Q du capteur.

INDICE

Outil : la définition du facteur de qualité.

CORRIGÉ

Facteur de qualité.

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N}$$
$$Q \approx \frac{7{,}4}{1{,}75} \approx 4{,}2$$

Conclusion. Le facteur de qualité du capteur vaut environ $4{,}2$: sa bande passante couvre près du quart de N_0.

B.4. 0,75 pts

Vérifier la résistance totale $R_t = 90\,\Omega$ du capteur de deux façons : à partir de ΔN, puis à partir de I_0.

INDICE

Début : isole R_t dans la largeur de la bande passante. **Ensuite :** utilise l'impédance à la résonance.

CORRIGÉ

Par la bande passante. $R_t = 2\pi L\,\Delta N \approx 2\pi \times 8{,}2 \times 10^{-3} \times 1\,750 \approx 90\,\Omega$.

Par la résonance. $R_t = \dfrac{U}{I_0} \approx \dfrac{0{,}90}{10 \times 10^{-3}} = 90\,\Omega$.

Conclusion. Les deux méthodes donnent environ $90\,\Omega$: les lectures sont cohérentes avec la résistance totale du capteur.

B.5. 1 pts

Synthèse. L'approche d'une pièce métallique diminue l'inductance de $2{,}0\,\%$. Calculer le décalage de la fréquence de résonance qui en résulte et le comparer à ΔN. Que faudrait-il modifier pour que l'intensité mesurée à la fréquence N_0 varie davantage ?

INDICE

Début : N_0 varie comme $\dfrac{1}{\sqrt{L}}$. **Ensuite :** relie la sensibilité à la largeur de la bande passante.

CORRIGÉ

Nouvelle fréquence. $N_0' = \dfrac{N_0}{\sqrt{0{,}980}} \approx 1{,}010\,N_0$: la fréquence de résonance augmente d'environ $1\,\%$, soit environ $75\,\mathrm{Hz}$.

Comparaison. Ce décalage est environ vingt fois plus petit que $\Delta N \approx 1{,}75\,\mathrm{kHz}$: à la fréquence N_0, l'intensité ne change presque pas.

Conclusion. Le capteur est peu sensible. Pour qu'un décalage de $75\,\mathrm{Hz}$ change nettement l'intensité, il faut une bande passante plus étroite : une résistance totale plus faible et un facteur de qualité plus grand.