BURHAN

Résumé : Suites numériques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/resume

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Outils de première : sommes et récurrence

À retenir : À avoir sous les yeux

- Arithmétique : on **ajoute** la même raison r à chaque pas.
- Géométrique : on **multiplie** par la même raison q.
- Une somme de termes consécutifs se calcule avec son **premier terme** et son **nombre de termes**.

Définition : Suite croissante, décroissante, monotone

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, et **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, et **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante, et **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Propriété : Terme général et somme d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.

- Pour tous entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0, $u_n = u_p + (n-p)r$.
- Pour tous entiers p et n tels que $n_0 \leq p \leq n$, la somme des $n-p+1$ termes consécutifs de u_p à u_n vaut

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}.$$

Propriété : Terme général et somme d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.

- Pour tous entiers p et n tels que $n_0 \leq p \leq n$, $u_n = u_p\, q^{n-p}$.

- Si $q \neq 1$, pour tous entiers p et n tels que $n_0 \leq p \leq n$,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

- Si $q = 1$, cette somme vaut $(n - p + 1)\, u_p$.

Méthode : Calculer une somme sans se tromper

1. Reconnais la nature de la suite et sa raison.
2. Repère l'indice du premier terme et celui du dernier.
3. Compte les termes : de l'indice p à l'indice n, il y en a $n - p + 1$.
4. Applique la formule, puis teste-la sur une somme de deux termes.

Exemple : Mini-exemple : une somme arithmétique

La suite définie par $u_n = 5 + 4n$ est arithmétique de raison 4.

La somme $u_2 + u_3 + \cdots + u_{10}$ compte $10 - 2 + 1 = 9$ termes. Avec $u_2 = 13$ et $u_{10} = 45$:

$$u_2 + \cdots + u_{10} = \frac{9 \times (13 + 45)}{2} = 261.$$

Méthode : Récurrence en trois temps

1. **Propriété.** Écris $P(n)$ en entier, avec son rang de départ n_0.
2. **Initialisation.** Calcule les deux membres au rang n_0 et compare-les.
3. **Hérédité.** Fixe un entier $n \geq n_0$ pour lequel $P(n)$ est vraie. Écris « par hypothèse de récurrence » à l'endroit exact où tu t'en sers, et arrive à $P(n+1)$.
4. **Conclusion.** Cite le principe de récurrence et le rang de départ.

Exemple : Mini-exemple : une inégalité par récurrence

Montrons que $3^n \geq 2n + 1$ pour tout entier naturel n.

- **Initialisation.** $3^0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$: l'inégalité est vraie au rang 0.
- **Hérédité.** Soit n un entier naturel tel que $3^n \geq 2n + 1$. Par hypothèse de récurrence, $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 6n + 3$. Or $6n + 3 \geq 2n + 3 = 2(n+1) + 1$, car $n \geq 0$.
- **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $3^n \geq 2n + 1$ pour tout entier naturel n.

Attention : Compter les termes

Une somme qui commence à l'indice 0 et s'arrête à l'indice n a $n+1$ termes. Si tu en comptes n, l'exposant de la formule géométrique est faux.

La limite d'une suite, par intervalles

Définition : Limite finie d'une suite : formulation par intervalles

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite et ℓ un réel. On dit que (u_n) **a pour limite** ℓ, ou **tend vers** ℓ, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : pour tout intervalle ouvert J de centre ℓ, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $u_n \in J$ pour tout entier $n \geq N$. Un intervalle ouvert de centre ℓ s'écrit $]\ell - r, \ell + r[$, avec r un réel strictement positif.

Définition : Limite infinie d'une suite : formulation par intervalles

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

- On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : pour tout réel A, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $u_n > A$ pour tout entier $n \geq N$.
- On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : pour tout réel A, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $u_n < A$ pour tout entier $n \geq N$.

Définition : Suite convergente, suite divergente

- Une suite est **convergente** s'il existe un réel ℓ tel qu'elle ait pour limite ℓ.
- Une suite qui n'est pas convergente est **divergente** : elle tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, ou n'a pas de limite.

À retenir : Lire la définition dans le bon ordre

On choisit d'abord l'intervalle, **ensuite** on trouve le rang N. Plus l'intervalle est étroit, plus N peut être grand. Le rang dépend donc de l'intervalle choisi.

Méthode : Trouver un rang à partir duquel les termes sont dans un intervalle

1. Calcule l'écart $|u_n - \ell|$ et simplifie-le.
2. Écris « écart strictement inférieur au rayon r » et résous cette inégalité d'inconnue n.

3. Donne un entier N qui convient, puis conclus pour tout entier $n \geq N$.

Exemple : Mini-exemple : un rang explicite

Pour tout entier naturel n, soit $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$. On a $u_n - 2 = -\dfrac{5}{n+3}$, donc $|u_n - 2| = \dfrac{5}{n+3}$.

Cet écart est strictement inférieur à $0{,}01$ si et seulement si $n + 3 > 500$, soit $n > 497$.

Avec $N = 498$, tous les termes u_n tels que $n \geq N$ sont dans $]2 - 0{,}01, 2 + 0{,}01[$.

Attention : « À partir d'un certain rang »

La définition ne parle que des termes de rang assez grand. Dans l'exemple, $u_0 = \dfrac{1}{3}$ est loin de 2 : cela n'empêche pas la suite de tendre vers 2.

Calculer une limite

Propriété : Limites des suites de référence

Soit s un nombre rationnel strictement positif. Pour les suites définies pour $n \geq 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} n^s = +\infty$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^s} = 0.$$

En particulier, les suites (n), (n^2), (n^3) et $(\sqrt{n})$ tendent vers $+\infty$, et les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, définies pour $n \geq 1$, tendent vers 0.

Propriété : Opérations sur les limites de suites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui ont chacune une limite, finie ou infinie.

- Les limites de $(u_n + v_n)$, de $(u_n v_n)$ et, lorsque $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ s'obtiennent par les mêmes règles que les limites de fonctions en $+\infty$ (somme, produit, quotient).
- En particulier, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell'$, avec ℓ et ℓ' réels, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $\ell + \ell'$, $(u_n v_n)$ tend vers $\ell\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.
- Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ tend vers 0 ; si (u_n) tend vers 0 avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.

- Les formes indéterminées sont les mêmes que pour les fonctions : $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times(+\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$ et leurs variantes de signe.

Propriété : Limite d'une suite de la forme $u_n = f(n)$

Soit n_0 un entier naturel, f une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, où L est un réel, $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Méthode : Lever une forme indéterminée

1. Applique d'abord les règles opératoires ; ne transforme l'expression que si la forme est indéterminée.
2. Quotient de polynômes en n : mets en facteur la plus haute puissance de n, en haut et en bas.
3. Différence de deux racines carrées : multiplie et divise par leur somme.
4. Termine avec les suites de référence et les règles opératoires.

Exemple : Mini-exemple : terme dominant

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{3n^2 - n}{1 - 2n^2} = \frac{3 - \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2} - 2}.$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers -2 : la suite tend vers $-\dfrac{3}{2}$.

Exemple : Mini-exemple : somme conjuguée

Pour tout entier $n \geq 1$, on multiplie et on divise par $\sqrt{n^2+5n}+n$:

$$\begin{aligned}&\sqrt{n^2+5n} - n\\ &= \frac{5n}{\sqrt{n^2+5n}+n}\\ &= \frac{5}{\sqrt{1+\dfrac{5}{n}}+1}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers 2 : la suite tend vers $\dfrac{5}{2}$.

Attention : Une forme indéterminée n'est pas un résultat

La forme $(+\infty) - (+\infty)$ ne vaut pas 0 : l'exemple de la somme conjuguée donne $\frac{5}{2}$. Écris la forme obtenue, puis transforme l'expression.

Comparer, encadrer, passer à la limite

Théorème : Limite infinie par comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites et p un entier naturel.

- Si $u_n \geq v_n$ pour tout entier $n \geq p$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq p$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème : Convergence par encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, p un entier naturel et ℓ un réel. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout entier $n \geq p$, et si (v_n) et (w_n) ont toutes deux pour limite ℓ, alors (u_n) a pour limite ℓ.

Propriété : Convergence par majoration de l'écart

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, p un entier naturel et ℓ un réel.

- Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ pour tout entier $n \geq p$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- En particulier, (u_n) tend vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ tend vers 0.

Méthode : Conclure par comparaison

1. Minore, majore ou encadre u_n à partir d'un rang p que tu écris.
2. Calcule les limites des suites qui bornent u_n.
3. Nomme le théorème : comparaison si une borne tend vers $+\infty$ ou $-\infty$; encadrement si les deux bornes ont la même limite finie ; majoration de l'écart si $|u_n - \ell| \leq v_n$ avec (v_n) de limite 0.

Exemple : Mini-exemple : encadrement

Pour tout entier naturel n, l'encadrement $-1 \leq \sin n \leq 1$ donne :

$$\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{n+\sin n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+1}.$$

Les deux bornes tendent vers $\frac{1}{2}$. Par encadrement, la suite du milieu tend aussi vers $\frac{1}{2}$.

Exemple : Mini-exemple : comparaison

Pour tout entier naturel n, $v_n = n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n = n(n-1)$.

Comme $n(n-1)$ tend vers $+\infty$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$ par comparaison.

Propriété : Passage à la limite dans une inégalité

Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ, p un entier naturel et a un réel.

- Si $u_n \leq a$ pour tout entier $n \geq p$, alors $\ell \leq a$. Si $u_n \geq a$ pour tout entier $n \geq p$, alors $\ell \geq a$.
- Si (v_n) est une suite convergente de limite ℓ' et si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq p$, alors $\ell \leq \ell'$.

À retenir : Passer à la limite : la convergence d'abord

Le passage à la limite dans une inégalité s'applique à une suite dont on **sait déjà** qu'elle converge. Il situe la limite ; il ne prouve jamais la convergence.

Attention : L'inégalité stricte devient large

Pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n^2} > 0$, et pourtant la limite vaut 0. De $u_n < a$ pour tout n, tu déduis seulement $\ell \leq a$.

La suite (qⁿ)

Propriété : Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel $a \geq 0$ et tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Propriété : Limite de la suite (qⁿ)

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante, égale à 1.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Méthode : Quotient de puissances : factoriser par la plus grande

Dans une expression en a^n et b^n avec $0 < a < b$, mets b^n en facteur, en haut et en bas. Il reste des puissances de raison comprise entre -1 et 1, qui tendent vers 0.

Exemple : Mini-exemple : deux puissances

Pour tout entier naturel n :

$$\frac{2^n + 5^n}{3 \times 5^n + 1} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{3 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}.$$

Comme $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ tendent vers 0, la suite tend vers $\frac{1}{3}$.

Exemple : Mini-exemple : limite d'une somme géométrique

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Cette somme de $n + 1$ termes tend vers $\frac{3}{2}$.

Attention : Raison négative

Pour $q \leq -1$, le signe de q^n alterne et $|q^n| \geq 1$ pour tout n : aucune limite. Pour $-1 < q < 0$, le signe alterne aussi, mais la suite tend vers 0.

Suites monotones

Théorème : Convergence d'une suite monotone et bornée

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Propriété : Position des termes d'une suite monotone par rapport à sa limite

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite convergente de limite ℓ.

- Si (u_n) est croissante, alors $u_n \leq \ell$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- Si (u_n) est décroissante, alors $u_n \geq \ell$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Propriété : Suite monotone non bornée

- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

À retenir : Le réflexe de convergence

Une suite monotone converge dès qu'elle est bornée du côté où elle avance : majorée si elle croît, minorée si elle décroît. Le théorème ne donne pas la valeur de la limite ; tu la cherches ensuite.

Attention : Un majorant n'est pas la limite

La suite définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ est croissante et majorée par 5, mais sa limite vaut 1. Le majorant donne seulement $\ell \leq 5$.

Attention : Croissante ne veut pas dire infinie

La suite définie par $u_n = \dfrac{3n}{n+2}$ croît et tend vers 3. Pour obtenir $+\infty$, montre que la suite n'est pas majorée, ou minore-la par une suite qui tend vers $+\infty$.

Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Deux suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème : Théorème des suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante et $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite décroissante telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. Alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ et, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Méthode : Montrer que deux suites sont adjacentes

1. Étudie le sens de variation de chacune : signe de $u_{n+1} - u_n$, puis de $v_{n+1} - v_n$.
2. Calcule l'écart $v_n - u_n$ et montre qu'il tend vers 0.
3. Conclus : les deux suites convergent vers une même limite ℓ, et $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n.
4. Pour encadrer ℓ, calcule u_n et v_n à un rang choisi : l'encadrement a pour largeur $v_n - u_n$.

Exemple : Mini-exemple : encadrer une limite

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.

On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$ et :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2(n+1)^3} < 0.$$

L'écart $v_n - u_n = \frac{1}{n^2}$ tend vers 0 : les suites sont adjacentes.

Au rang 3, leur limite commune ℓ vérifie $\frac{251}{216} \leq \ell \leq \frac{275}{216}$.

Attention : Sans écart qui tend vers 0, pas de limite commune

Une suite croissante et une suite décroissante peuvent converger vers deux limites distinctes. Par exemple, $\frac{n}{n+1}$ croît vers 1 et $2 + \frac{1}{n+1}$ décroît vers 2.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété : Intervalle stable et termes d'une suite récurrente

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite est bien définie et $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

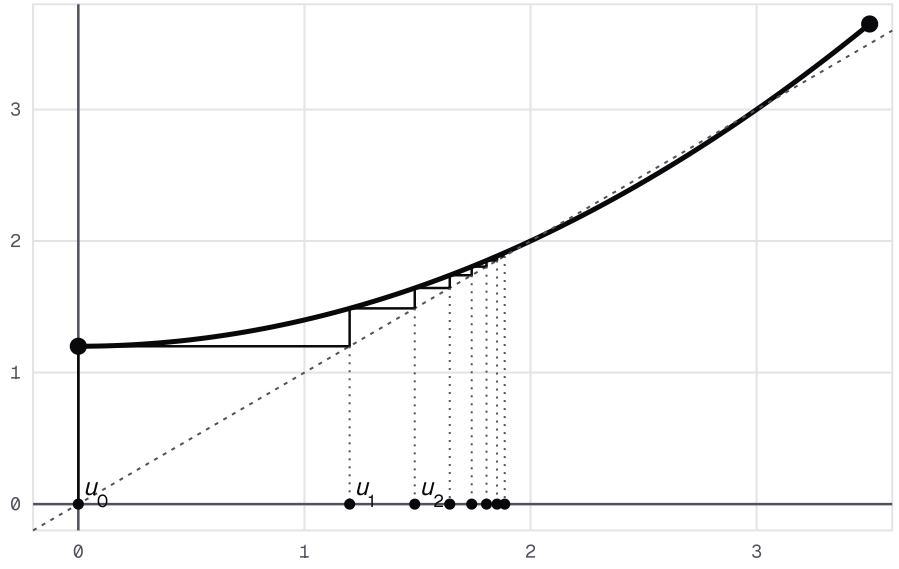
Théorème : Limite de $(f(u_n))$ lorsque f est continue

Soit I un intervalle, f une fonction définie sur I et (u_n) une suite dont tous les termes appartiennent à I. Si (u_n) converge vers un réel ℓ de I et si f est continue en ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge et

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Théorème : Limite d'une suite récurrente convergente : point fixe

Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) converge vers un réel ℓ **qui appartient à** I, alors $f(\ell) = \ell$. Lorsque I est un segment $[a, b]$, la condition $\ell \in I$ est toujours remplie.



$\mathcal{C}_f$ ● Point du graphe ● Termes (u_n) , rabattus sur l'axe des abscisses —— Construction des termes ------ Droite d'équation y = x

Escalier d'une suite récurrente qui converge : les marches se resserrent vers le point où la courbe coupe la droite y = x.

Propriété : Suite récurrente associée à une fonction croissante

Soit I un intervalle, f une fonction croissante sur I telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (u_n) est monotone :

- si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante ;
- si $u_0 \geq u_1$, la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Étude complète d'une suite récurrente

1. **Intervalle stable.** Lis les variations de f sur I et montre que $f(I) \subset I$. Déduis par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n.
2. **Sens de variation.** Le signe de $f(x) - x$ sur I donne celui de $u_{n+1} - u_n$. Si f est croissante sur I, compare seulement u_0 et u_1.
3. **Convergence.** Si la suite croît, un majorant suffit ; si elle décroît, un minorant suffit : elle converge.
4. **Limite.** Écris que f est continue sur I et que ℓ appartient à I, puis résous $f(\ell) = \ell$. Garde la solution compatible avec les bornes obtenues.

Stabilité	Sens de variation
$u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$	$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

Convergence	Limite
monotone et bornée $\Rightarrow$ convergente	f continue sur I, $\ell \in I \Rightarrow f(\ell) = \ell$

Exemple : Mini-exemple : une étude complète

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+8}{6}$, $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

- **Intervalle stable.** Sur $I = [0, 2]$, f est croissante, $f(0) = \dfrac{4}{3}$ et $f(2) = 2$, donc $f(I) = \left[\dfrac{4}{3}, 2\right] \subset I$.
- **Sens de variation.** Pour tout $x \in I$, $f(x) - x = \dfrac{(x-2)(x-4)}{6} \geq 0$: la suite est croissante.
- **Limite.** Majorée par 2, elle converge vers un réel ℓ de I tel que $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 2$ ou $\ell = 4$. Comme $\ell \leq 2$, on obtient $\ell = 2$.

Exemple : Mini-exemple : même fonction, autre départ

Avec $u_0 = 5$, on a $u_1 = \dfrac{11}{2} > u_0$. L'intervalle $[4, +\infty[$ est stable et $f(x) - x > 0$ pour $x > 4$: la suite est croissante. Si elle convergeait, sa limite ℓ vérifierait $\ell \geq 5$ et $f(\ell) = \ell$, alors que les seules solutions sont 2 et 4. La suite n'est donc pas majorée : croissante, elle tend vers $+\infty$.

Attention : Les points fixes ne prouvent pas la convergence

Résoudre $f(\ell) = \ell$ donne des limites **possibles**, pas une limite. Établis d'abord la convergence : avec $u_0 = 5$, la suite ne tend vers aucune des solutions.

Attention : La limite doit être dans l'intervalle

Avant d'écrire $f(\ell) = \ell$, contrôle deux points : ℓ appartient à I, et f est continue en ℓ. Si I n'est pas fermé, la limite peut être une borne qui n'est pas dans I.

Propriété : Suite récurrente associée à une fonction décroissante

Soit I un intervalle, f une fonction décroissante sur I telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante.

Remarque : Si f est décroissante sur I

La suite n'est pas monotone en général. Étudie séparément (u_{2n}) et (u_{2n+1}) : chacune vérifie une récurrence associée à $f \circ f$, qui est croissante sur I.

Passer par une suite auxiliaire

Méthode : Récurrence affine : la suite auxiliaire

Pour $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$:

1. Cherche le réel α tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Pose $v_n = u_n - \alpha$ et soustrais les deux égalités : $v_{n+1} = a\, v_n$.
3. Écris $v_n = v_0\, a^n$, puis reviens à $u_n = \alpha + v_n$.
4. Déduis la limite de celle de (a^n).

Exemple : Mini-exemple : récurrence affine

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

Le réel $\alpha = -3$ vérifie $\alpha = \dfrac{2}{3}\alpha - 1$. La suite définie par $v_n = u_n + 3$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, avec $v_0 = 3$.

Donc $u_n = -3 + 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ pour tout n, et (u_n) tend vers -3 car $0 < \dfrac{2}{3} < 1$.

Méthode : Récurrence homographique : suivre la piste de l'énoncé

1. Repère la suite auxiliaire proposée par l'énoncé, par exemple $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$, où α et β sont les solutions de l'équation $x = f(x)$.
2. Vérifie que $u_n \neq \beta$ pour tout n, par exemple grâce à un intervalle stable.
3. Exprime v_{n+1} en fonction de v_n : tu reconnais une suite géométrique.
4. Exprime u_n à l'aide de v_n, puis passe à la limite.

Exemple : Mini-exemple : récurrence homographique

Soit $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} = 4 - \dfrac{6}{u_n + 1}$.

Cette fonction est croissante sur $]-1, +\infty[$ et fixe 1 et 2 : l'intervalle $]1, 2[$ est stable, donc $u_n \neq 1$.

Avec $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$, on obtient $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$ et $v_0 = -1$.

Comme $u_n = \dfrac{2 - v_n}{1 - v_n}$ et que (v_n) tend vers 0, la suite (u_n) tend vers 2.

Majoration géométrique de l'écart

Méthode : Majorer l'écart par une suite géométrique

1. Établis $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ pour tout n, avec $0 \leq k < 1$. Dans ce chapitre, cette inégalité vient d'un calcul algébrique ou de l'énoncé.
2. Déduis par récurrence $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
3. Comme (k^n) tend vers 0, conclus par la majoration de l'écart.
4. La même inégalité fournit un rang à partir duquel l'écart est sous une précision donnée.

Exemple : Mini-exemple : approcher √5

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2 + u_n}$ pour tout entier naturel n. Tous les termes sont supérieurs ou égaux à 2, et $\sqrt{5} = 2 + \dfrac{1}{2 + \sqrt{5}}$. Donc :

$$u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5} - u_n}{(2 + u_n)(2 + \sqrt{5})},$$

avec un dénominateur supérieur à $4 \times 4 = 16$. Ainsi $|u_{n+1} - \sqrt{5}| \leq \dfrac{1}{16}|u_n - \sqrt{5}|$, puis :

$$|u_n - \sqrt{5}| \leq \frac{\sqrt{5} - 2}{16^n}.$$

La suite tend vers $\sqrt{5}$. Dès $n = 2$, ce majorant est inférieur à 10^{-3}.

Attention : Le coefficient doit être strictement inférieur à 1

Avec $k = 1$, l'inégalité $|u_{n+1} - \ell| \leq |u_n - \ell|$ dit seulement que l'écart ne grandit pas. Elle ne prouve pas qu'il tend vers 0.

Suites implicites

Méthode : Étudier une suite implicite

1. **Existence et unicité.** Pour n fixé, montre que f_n est continue et strictement monotone sur I et qu'elle change de signe : l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n dans I.
2. **Sens de variation.** Calcule $f_{n+1}(x_n)$ à l'aide de $f_n(x_n) = 0$. Compare son signe avec $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, puis conclus par la monotonie de f_{n+1}.
3. **Convergence.** Si I est borné, ses bornes encadrent x_n ; sinon, établis un encadrement. Monotone et bornée, la suite converge.

4. **Limite.** Isole x_n dans $f_n(x_n) = 0$ pour l'encadrer, puis conclus par encadrement.

Exemple : Mini-exemple : une suite implicite

Pour $n \geq 1$, soit $f_n(x) = x^4 + nx - 1$ sur $[0, 1]$.

- **Existence.** La fonction f_n est continue et strictement croissante, avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n > 0$: il existe un unique x_n de $]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
- **Sens de variation.** $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + x_n = x_n > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$, et f_{n+1} est strictement croissante, donc $x_{n+1} < x_n$: la suite décroît.
- **Limite.** $x_n = \dfrac{1 - x_n^4}{n}$ donne $0 < x_n \leq \dfrac{1}{n}$: (x_n) tend vers 0.

Remarque : Pour aller plus loin : la limite de n·xₙ

Approfondissement, au-delà de l'étude standard : dans l'exemple, $nx_n = 1 - x_n^4$. Comme (x_n) tend vers 0, la suite (nx_n) tend vers 1.

Attention : La fonction dépend de n

Dans $f_n(x_n) = 0$, l'entier n figure aussi dans la fonction. Ne passe pas à la limite comme si f_n était fixe : isole d'abord x_n, ou encadre-le.

Coin examen

À retenir : À maîtriser : la suite récurrente

Une suite récurrente $u_{n+1} = g(u_n)$ est étudiée dans 9 des 16 sujets consultés. Elle y prolonge l'étude d'une fonction : le tableau de variations donne l'intervalle stable, le signe de $g(x) - x$ donne le sens de variation.

À retenir : À maîtriser : la récurrence rédigée

« Montrer par récurrence » est écrit dans 7 des 16 sujets consultés. Rédige les trois temps, même pour une inégalité courte.

À retenir : Point important : la suite implicite

Une suite implicite apparaît dans 5 des 16 sujets consultés : existence et unicité, sens de variation, convergence, puis limite.

Méthode : Enchaîner les questions d'un problème

1. Pour un « en déduire », cite le résultat de la question précédente.
2. Avant tout passage à la limite, écris le théorème de convergence utilisé.
3. Donne les valeurs exactes avant toute valeur approchée.