BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5,5 pts

Une racine carrée et la suite qu'elle engendre

On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{4x+5}$, et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On donne $2^8 = 256$ et $2^9 = 512$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,5 pts

Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

INDICE

Vois f comme la composée de $x \mapsto 4x+5$, à valeurs positives sur cet intervalle, et de la racine carrée. Deux fonctions strictement croissantes composées donnent une fonction strictement croissante.

2. 0,5 pts

Résoudre dans $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$ l'équation $x = f(x)$.

INDICE

Une racine carrée est positive : déduis-en d'abord le signe d'une éventuelle solution. Une fois les deux membres positifs, élever au carré ne fait rien perdre.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - x = \dfrac{(5-x)(x+1)}{\sqrt{4x+5}+x}$. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $[1, 5]$.

INDICE

Multiplie et divise $\sqrt{4x+5} - x$ par la quantité conjuguée $\sqrt{4x+5} + x$, après avoir vérifié qu'elle ne s'annule pas. Le numérateur obtenu se factorise grâce à la question 2.

4. 0,5 pts

Montrer que $f([1,5]) \subset [1,5]$.

INDICE

La fonction f est continue et strictement croissante : l'image du segment $[1,5]$ se lit sur ses valeurs aux bornes.

5. 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 5$.

INDICE

Prends pour propriété $P(n)$: « $1 \leq u_n \leq 5$ ». Dans l'hérédité, applique la question 4 au réel u_n.

6. 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est croissante.

INDICE

Écris $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, puis utilise le signe trouvé à la question 3. Justifie que u_n est bien dans l'intervalle où ce signe est connu.

7. 0,75 pts

En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

INDICE

Croissante et majorée : nomme le critère de convergence. Pour la limite, utilise la propriété « limite d'une suite récurrente convergente » : contrôle chacune de ses hypothèses, y compris l'appartenance de la limite à l'intervalle stable.

8. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x \in [1, 5]$, $0 \leq 5 - f(x) \leq \dfrac{1}{2}(5 - x)$.

INDICE

Écris $5 - f(x) = \sqrt{25} - \sqrt{4x + 5}$ et utilise la quantité conjuguée. Pour majorer, minore le dénominateur grâce à $x \geq 1$.

9. 0,5 pts

En déduire que, pour tout entier naturel n, $0 \leq 5 - u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, puis retrouver la limite de la suite (u_n).

INDICE

Raisonne par récurrence en appliquant la question 8 au réel u_n. Pour la limite, combine la limite de (q^n) et le théorème de majoration de l'écart.

10. 0,25 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 9$, $5 - u_n < 10^{-2}$.

INDICE

Comparer $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ à $\dfrac{1}{100}$ revient à comparer 2^n à 400. Sers-toi des puissances de 2 fournies.

Exercice 2 4,25 pts

La solution de nx = cos x quand n grandit

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction g_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g_n(x) = nx - \cos x$.

On donne $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,75 pts

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la fonction g_n est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

INDICE

Pas besoin de dériver : g_n est la somme de $x \mapsto nx$ et de $x \mapsto -\cos x$. Rappelle-toi le sens de variation du cosinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, notée x_n, et que $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$.

INDICE

Calcule $g_n(0)$ et $g_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$, puis applique le théorème des valeurs intermédiaires sous sa forme pour une fonction continue strictement monotone.

3. 0,5 pts

Montrer que $\frac{\pi}{6} < x_1 < \frac{\pi}{4}$.

INDICE

Détermine les signes de $g_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et de $g_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ avec les valeurs fournies. Conclus avec la stricte croissance de g_1 et $g_1(x_1) = 0$.

4. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $g_{n+1}(x_n) = x_n$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

INDICE

Écris $g_{n+1}(x_n) = (n+1)x_n - \cos x_n$ et remplace $\cos x_n$ grâce à la relation de la question 2. Compare ensuite $g_{n+1}(x_n)$ et $g_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

5. 0,25 pts

En déduire que la suite (x_n) est convergente.

INDICE

Une suite décroissante et minorée converge. Cherche un minorant dans la question 2.

6. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 < x_n \leq \dfrac{1}{n}$.

INDICE

Pars de la relation $nx_n = \cos x_n$ obtenue à la question 2, et majore le cosinus par 1.

7. 0,25 pts

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

INDICE

Encadre x_n entre deux suites qui ont la même limite, puis nomme le théorème.

8. 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = 1$.

INDICE

D'après la question 2, $nx_n = \cos x_n$. La suite (x_n) tend vers 0 (question 7) et le cosinus est continu en 0 : applique le théorème sur la limite de $(f(u_n))$ lorsque f est continue.

Exercice 3 5,25 pts

Une récurrence homographique à paramètre

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_a(x) = \frac{x + a^2}{x + 1},$$

et la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f_a(u_n).$$

La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.

INDICE

Raisonne par récurrence. Dans l'hérédité, examine le quotient $f_a(u_n)$: son numérateur, puis son dénominateur.

2. 0,5 pts

Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $f_a(x) = x$.

INDICE

Multiplie par $x + 1$, qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$, puis garde en tête le signe de x et celui de a.

3. 0,75 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - a}{u_n + a}$. Justifier que v_n est défini, calculer v_0, et montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q_a = \dfrac{1 - a}{1 + a}$.

INDICE

Remplace u_{n+1} par $\dfrac{u_n + a^2}{u_n + 1}$ dans v_{n+1}, multiplie numérateur et dénominateur par $u_n + 1$, puis factorise chacun d'eux.

4. 0,5 pts

Montrer que $-1 < q_a < 1$. En déduire la limite de la suite (v_n).

INDICE

Calcule $q_a + 1$ et $1 - q_a$ en réduisant au même dénominateur. Pour la limite, écris d'abord v_n en fonction de n.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$ et $u_n = a\,\dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

INDICE

Que donnerait l'égalité $v_n = 1$ dans la définition de v_n ? Pour exprimer u_n, chasse le dénominateur dans cette définition et regroupe les termes en u_n.

6. 0,5 pts

Dans cette question, $a = 1$. Montrer que $u_n = 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Calcule la raison q_1 et utilise la question 5, ou simplifie directement $f_1(x)$.

7. 0,5 pts

Dans la suite de l'exercice, $a = 2$. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

INDICE

Calcule q_2, puis utilise l'expression $v_n = v_0\, q_2^n$ et la question 5.

8. 0,5 pts

Montrer que $u_n < 2$ lorsque n est pair et que $u_n > 2$ lorsque n est impair. En déduire que la suite (u_n) n'est pas monotone.

INDICE

Exprime $u_n - 2$ à l'aide de v_n, puis étudie son signe selon la parité de n. Pour la monotonie, compare u_0, u_1 et u_2.

9. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_n - 2| \leq 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, et retrouver ainsi la limite de (u_n).

INDICE

Pars de $u_n - 2 = \dfrac{4v_n}{1 - v_n}$ et minore $1 - v_n$ lorsque $n \geq 1$. Le rang 0 se vérifie à part. Conclus avec le théorème de majoration de l'écart.

Exercice 4 5 pts

Une somme de racines entre deux suites adjacentes

On considère les suites $(S_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ définies, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$
$$a_n = S_n - 2\sqrt{n},$$
$$b_n = S_n - 2\sqrt{n+1}.$$

On donne $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$. En déduire que $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < 2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

INDICE

Multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. Pour l'encadrement, compare ce dénominateur à $2\sqrt{x}$ et à $2\sqrt{x+1}$.

2. 0,5 pts

Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante.

INDICE

Calcule $a_{n+1} - a_n$: le terme $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ apparaît, à comparer grâce à la question 1 appliquée à $x = n$.

3. 0,5 pts

Montrer que la suite (b_n) est strictement croissante.

INDICE

Même calcul pour $b_{n+1} - b_n$, mais applique cette fois la question 1 au réel $x = n+1$, avec l'autre inégalité.

4. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 < a_n - b_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n)$.

INDICE

L'écart $a_n - b_n$ ne fait plus intervenir S_n. Pour la limite, encadre-le entre deux suites de limite 0.

5. 0,5 pts

En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis qu'elles convergent vers un même réel ℓ tel que $b_n \leq \ell \leq a_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Rassemble les trois conditions de la définition (questions 2, 3 et 4), puis cite le théorème qui en découle.

6. 0,5 pts

Montrer que $-1{,}84 < \ell \leq -1$.

INDICE

Écris l'encadrement de la question 5 au rang $n = 1$, puis utilise la valeur fournie pour $\sqrt{2}$.

7. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq a_n - \ell < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire que $0 \leq a_n - \ell < 10^{-1}$ pour tout entier $n \geq 100$.

INDICE

Encadre $a_n - \ell$ grâce à l'inégalité $b_n \leq \ell$, puis compare $\sqrt{n}$ à 10 lorsque $n \geq 100$.

8. 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

INDICE

Exprime S_n à l'aide de a_n, puis minore a_n par une constante. Le théorème de comparaison conclut.

9. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$.

INDICE

Divise l'égalité $S_n = a_n + 2\sqrt{n}$ par $\sqrt{n}$. La suite (a_n) converge : que dire du produit de a_n par $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$?

Exercice 5 5,5 pts

Une récurrence vers zéro et sa suite auxiliaire arithmétique

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que $f([0,1]) = \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

INDICE

Dérive le quotient, sachant que la dérivée de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, puis réduis le numérateur au même dénominateur. L'image du segment se lit sur les valeurs aux bornes.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $0 < f(x) < x$. En déduire que l'équation $x = f(x)$ admet 0 pour unique solution dans $[0, 1]$.

INDICE

Pour $x > 0$, compare $\sqrt{1+x^2}$ à 1, puis divise.

3. 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 1$.

INDICE

Prends pour propriété $P(n)$: « $0 < u_n \leq 1$ ». Dans l'hérédité, la question 2 appliquée au réel u_n fournit les deux inégalités.

4. 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

INDICE

Étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ à l'aide des questions 2 et 3.

5. 0,75 pts

En déduire que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

INDICE

Décroissante et minorée : nomme le critère. Pour la limite, vérifie toutes les hypothèses de la propriété « limite d'une suite récurrente convergente » sur l'intervalle $[0, 1]$, y compris l'appartenance de la limite à cet intervalle.

6. 0,75 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1. En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n.

INDICE

Exprime $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}^2}$ à l'aide de u_n : le carré fait disparaître la racine. Pour revenir à u_n, souviens-toi de son signe.

7. 0,25 pts

Retrouver la limite de la suite (u_n) à partir de cette expression.

INDICE

Cherche d'abord la limite de la suite $\left(\sqrt{n+1}\right)$.

8. 0,5 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $T_n = \dfrac{1}{u_0^2} + \dfrac{1}{u_1^2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n^2}$. Exprimer T_n en fonction de n, puis déterminer l'entier naturel n tel que $T_n = 210$.

INDICE

Reconnais dans T_n une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (v_n) : compte les termes, repère le premier et le dernier.

9. 0,25 pts

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 10^{-2}$.

INDICE

Traduis l'inégalité sur $\sqrt{n+1}$, puis sur $n+1$, en justifiant chaque passage.

10. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,u_n = 1$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = +\infty$.

INDICE

Pour $n \geq 1$, écris $\sqrt{n}\,u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ et utilise la continuité de la racine carrée en 1. Écris ensuite $n\,u_n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}\,u_n$.