BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5,5 pts

Une racine carrée et la suite qu'elle engendre

On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{4x+5}$, et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On donne $2^8 = 256$ et $2^9 = 512$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,5 pts

Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

INDICE

Vois f comme la composée de $x \mapsto 4x+5$, à valeurs positives sur cet intervalle, et de la racine carrée. Deux fonctions strictement croissantes composées donnent une fonction strictement croissante.

CORRIGÉ

Continuité et monotonie. La fonction $x \mapsto 4x+5$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $4x+5 \geq 0$ pour tout $x \geq -\frac{5}{4}$. La fonction racine carrée est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Par composée, f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$.

Limite. Lorsque x tend vers $+\infty$, $4x+5$ tend vers $+\infty$, donc $\sqrt{4x+5}$ aussi.

Conclusion. f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. 0,5 pts

Résoudre dans $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$ l'équation $x = f(x)$.

INDICE

Une racine carrée est positive : déduis-en d'abord le signe d'une éventuelle solution. Une fois les deux membres positifs, élever au carré ne fait rien perdre.

CORRIGÉ

Signe d'une solution. Soit $x \geq -\frac{5}{4}$ une solution. Comme $f(x) \geq 0$, on a $x \geq 0$.

Résolution. Pour $x \geq 0$, les deux membres de $\sqrt{4x+5} = x$ sont positifs ; l'équation équivaut donc à $4x+5 = x^2$, soit $x^2 - 4x - 5 = 0$, c'est-à-dire :

$$(x-5)(x+1) = 0.$$

La racine -1 est strictement négative : elle ne convient pas. La racine 5 convient, car $f(5) = \sqrt{25} = 5$.

Conclusion. L'équation $x = f(x)$ a pour unique solution 5.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - x = \dfrac{(5-x)(x+1)}{\sqrt{4x+5}+x}$. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $[1, 5]$.

INDICE

Multiplie et divise $\sqrt{4x+5} - x$ par la quantité conjuguée $\sqrt{4x+5} + x$, après avoir vérifié qu'elle ne s'annule pas. Le numérateur obtenu se factorise grâce à la question 2.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $x \geq 0$. Alors $\sqrt{4x+5} \geq \sqrt{5} > 0$, donc $\sqrt{4x+5} + x > 0$. On multiplie et on divise par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{\left(\sqrt{4x+5}\right)^2 - x^2}{\sqrt{4x+5}+x} \\ &= \frac{4x+5-x^2}{\sqrt{4x+5}+x}. \end{aligned}$$

Or $4x + 5 - x^2 = -(x-5)(x+1) = (5-x)(x+1)$, d'où l'égalité demandée.

Le signe. Sur $[1, 5]$, on a $5 - x \geq 0$, $x + 1 > 0$, et le dénominateur est strictement positif.

Conclusion. Pour tout $x \in [1, 5]$, $f(x) - x \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = 5$.

4. 0,5 pts

Montrer que $f([1, 5]) \subset [1, 5]$.

INDICE

La fonction f est continue et strictement croissante : l'image du segment $[1, 5]$ se lit sur ses valeurs aux bornes.

CORRIGÉ

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, 5]$ (question 1), donc $f([1, 5]) = [f(1), f(5)]$. Or $f(1) = \sqrt{9} = 3$ et $f(5) = 5$. Ainsi :

$$f([1, 5]) = [3, 5].$$

Conclusion. $f([1, 5]) = [3, 5] \subset [1, 5]$.

5. 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 5$.

INDICE

Prends pour propriété $P(n)$: « $1 \leq u_n \leq 5$ ». Dans l'hérédité, applique la question 4 au réel u_n.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $1 \leq u_n \leq 5$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_n \in [1, 5]$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ appartient à $f([1, 5])$, qui est contenu dans $[1, 5]$ (question 4). Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $1 \leq u_n \leq 5$ pour tout entier naturel n.

6. 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est croissante.

INDICE

Écris $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, puis utilise le signe trouvé à la question 3. Justifie que u_n est bien dans l'intervalle où ce signe est connu.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 5, $u_n \in [1, 5]$; d'après la question 3, $f(u_n) - u_n \geq 0$. Donc :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0.$$

Conclusion. La suite (u_n) est croissante.

7. 0,75 pts

En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

INDICE

Croissante et majorée : nomme le critère de convergence. Pour la limite, utilise la propriété « limite d'une suite récurrente convergente » : contrôle chacune de ses hypothèses, y compris l'appartenance de la limite à l'intervalle stable.

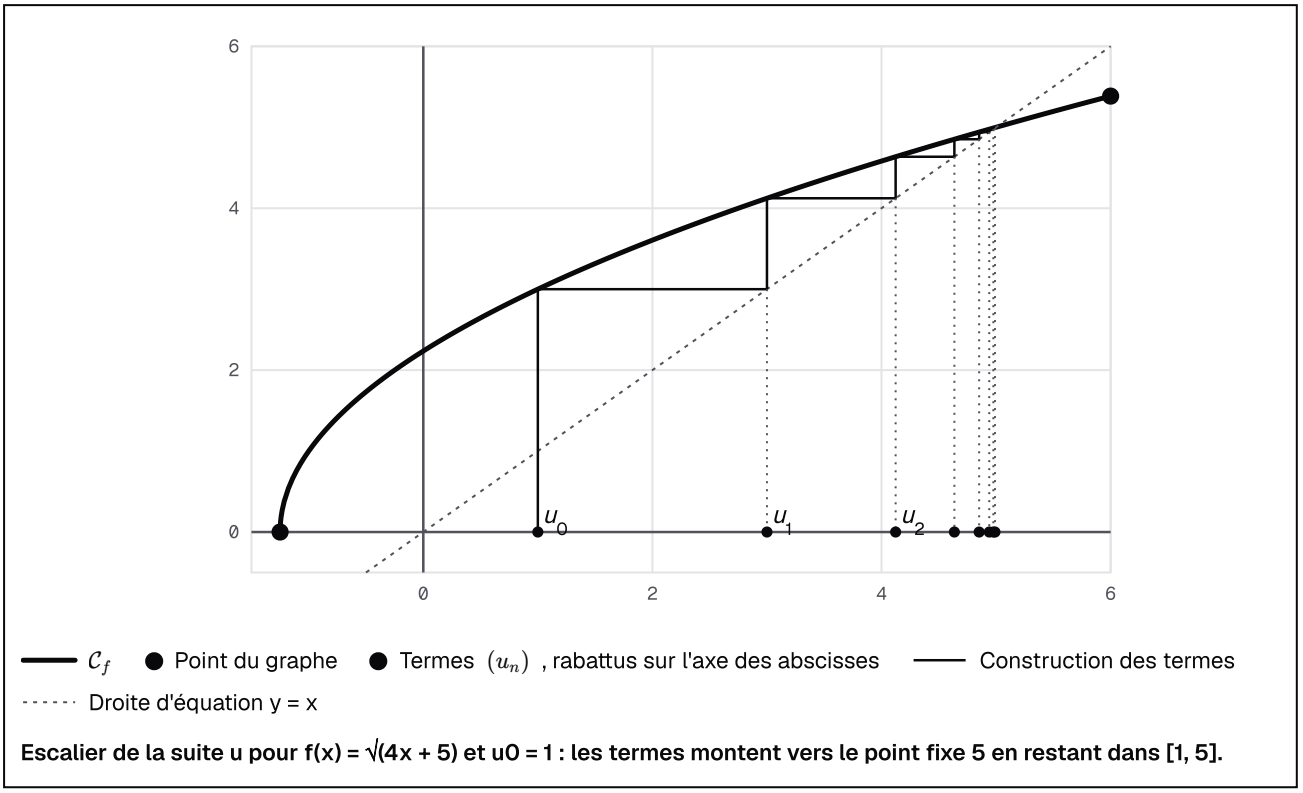
CORRIGÉ

Convergence. La suite (u_n) est croissante (question 6) et majorée par 5 (question 5). D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge vers un réel ℓ.

Situer ℓ. Pour tout n, $1 \leq u_n \leq 5$; en passant à la limite dans ces inégalités larges, $1 \leq \ell \leq 5$.

Point fixe. Posons $I = [1, 5]$. La fonction f est continue sur I (question 1), $f(I) \subset I$ (question 4), $u_0 \in I$ et $\ell \in I$. La propriété « limite d'une suite récurrente convergente » donne alors $f(\ell) = \ell$. D'après la question 2, $\ell = 5$.

Conclusion. (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.



Escalier de la suite u pour f(x) = √(4x + 5) et u0 = 1 : les termes montent vers le point fixe 5 en restant dans [1, 5].

8. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x \in [1,5]$, $0 \leq 5 - f(x) \leq \dfrac{1}{2}(5-x)$.

INDICE

Écris $5 - f(x) = \sqrt{25} - \sqrt{4x+5}$ et utilise la quantité conjuguée. Pour majorer, minore le dénominateur grâce à $x \geq 1$.

CORRIGÉ

Soit $x \in [1,5]$.

Minoration. D'après la question 4, $f(x) \leq 5$, donc $5 - f(x) \geq 0$.

Expression conjuguée. Comme $5 + \sqrt{4x+5} > 0$:

$$\begin{aligned} 5 - f(x) &= \frac{25 - (4x+5)}{5 + \sqrt{4x+5}} \\ &= \frac{4(5-x)}{5 + \sqrt{4x+5}}. \end{aligned}$$

Majoration. Comme $x \geq 1$, $4x+5 \geq 9$, donc $\sqrt{4x+5} \geq 3$ et $5 + \sqrt{4x+5} \geq 8$. Le numérateur $4(5-x)$ est positif, donc :

$$\begin{aligned} 5 - f(x) &\leq \frac{4(5-x)}{8} \\ &= \frac{1}{2}(5-x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in [1,5]$, $0 \leq 5 - f(x) \leq \dfrac{1}{2}(5-x)$.

9. 0,5 pts

En déduire que, pour tout entier naturel n, $0 \leq 5 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis retrouver la limite de la suite (u_n).

INDICE

Raisonne par récurrence en appliquant la question 8 au réel u_n. Pour la limite, combine la limite de (q^n) et le théorème de majoration de l'écart.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $0 \leq 5 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation. $5 - u_0 = 4 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $u_n \in [1, 5]$ (question 5), la question 8 appliquée à $x = u_n$ donne :

$$\begin{aligned} 0 \leq 5 - u_{n+1} &\leq \frac{1}{2}(5 - u_n) \\ &\leq \frac{1}{2} \times 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Limite. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, la suite $\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ tend vers 0. Puisque $|u_n - 5| \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n, le théorème de majoration de l'écart s'applique.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 5 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$, et l'on retrouve $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

10. 0,25 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 9$, $5 - u_n < 10^{-2}$.

INDICE

Comparer $4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ à $\frac{1}{100}$ revient à comparer 2^n à 400. Sers-toi des puissances de 2 fournies.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 9$. Alors $2^n \geq 2^9 = 512 > 400$, donc :

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{2^n} < \frac{4}{400} = 10^{-2}.$$

D'après la question 9, $5 - u_n \leq \frac{4}{2^n} < 10^{-2}$.

Remarque. Pour $n = 8$, la majoration ne suffit pas : elle donne seulement $\frac{4}{256} = \frac{1}{64}$, qui dépasse 10^{-2}.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 9$, $5 - u_n < 10^{-2}$.

Exercice 2 4,25 pts

La solution de nx = cos x quand n grandit

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction g_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g_n(x) = nx - \cos x$.

On donne $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,75 pts

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la fonction g_n est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

INDICE

Pas besoin de dériver : g_n est la somme de $x \mapsto nx$ et de $x \mapsto -\cos x$. Rappelle-toi le sens de variation du cosinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto nx$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car $n > 0$. La fonction cosinus est continue et décroissante sur $[0, \pi]$, donc $x \mapsto -\cos x$ est continue et croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Stricte croissance. Soit $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$. Alors $na < nb$ et $-\cos a \leq -\cos b$; en additionnant, $g_n(a) < g_n(b)$.

Conclusion. g_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme de deux fonctions continues, et strictement croissante sur cet intervalle.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, notée x_n, et que $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$.

INDICE

Calcule $g_n(0)$ et $g_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$, puis applique le théorème des valeurs intermédiaires sous sa forme pour une fonction continue strictement monotone.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. La fonction g_n est continue et strictement croissante sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (question 1). De plus :

$$g_n(0) = -\cos 0 = -1 < 0,$$
$$g_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{n\pi}{2} > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue strictement monotone, l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $g_n(0) \neq 0$ et $g_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, on a $x_n \neq 0$ et $x_n \neq \frac{\pi}{2}$.

Conclusion. x_n existe, est unique, et $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$. Par définition, $nx_n = \cos x_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

3. 0,5 pts

Montrer que $\frac{\pi}{6} < x_1 < \frac{\pi}{4}$.

INDICE

Détermine les signes de $g_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et de $g_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ avec les valeurs fournies. Conclus avec la stricte croissance de g_1 et $g_1(x_1) = 0$.

CORRIGÉ

Signe de $g_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$. On a $g_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Or $\frac{\pi}{6} < \frac{3{,}15}{6} = 0{,}525$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1{,}73}{2} = 0{,}865$, donc $g_1\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$.

Signe de $g_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$. On a $g_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or $\frac{\pi}{4} > \frac{3{,}14}{4} = 0{,}785$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1{,}42}{2} = 0{,}71$, donc $g_1\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

Position de x_1. Si l'on avait $x_1 \leq \frac{\pi}{6}$, la croissance de g_1 donnerait $0 = g_1(x_1) \leq g_1\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$, ce qui est absurde. De même, $x_1 \geq \frac{\pi}{4}$ donnerait $0 = g_1(x_1) \geq g_1\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, ce qui est absurde.

Conclusion. $\frac{\pi}{6} < x_1 < \frac{\pi}{4}$.

4. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $g_{n+1}(x_n) = x_n$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

INDICE

Écris $g_{n+1}(x_n) = (n+1)x_n - \cos x_n$ et remplace $\cos x_n$ grâce à la relation de la question 2. Compare ensuite $g_{n+1}(x_n)$ et $g_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $n \geq 1$. Comme $\cos x_n = n x_n$:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x_n) &= (n+1)x_n - n x_n \\ &= x_n. \end{aligned}$$

Comparaison. Or $x_n > 0$ (question 2), donc $g_{n+1}(x_n) > 0 = g_{n+1}(x_{n+1})$. Les réels x_n et x_{n+1} appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, où g_{n+1} est strictement croissante. Si l'on avait $x_n \leq x_{n+1}$, on aurait $g_{n+1}(x_n) \leq g_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, ce qui est faux. Donc $x_{n+1} < x_n$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $g_{n+1}(x_n) = x_n$, et la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

5. 0,25 pts

En déduire que la suite (x_n) est convergente.

INDICE

Une suite décroissante et minorée converge. Cherche un minorant dans la question 2.

CORRIGÉ

La suite (x_n) est décroissante (question 4) et minorée par 0 (question 2). D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge.

Conclusion. La suite (x_n) est convergente.

6. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1, 0 < x_n \leq \dfrac{1}{n}$.

INDICE

Pars de la relation $nx_n = \cos x_n$ obtenue à la question 2, et majore le cosinus par 1.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. D'après la question 2, $x_n > 0$ et $nx_n = \cos x_n$. Or $\cos x_n \leq 1$, donc $nx_n \leq 1$; comme $n > 0$, $x_n \leq \dfrac{1}{n}$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1, 0 < x_n \leq \dfrac{1}{n}$.

7. 0,25 pts

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

INDICE

Encadre x_n entre deux suites qui ont la même limite, puis nomme le théorème.

CORRIGÉ

Pour tout $n \geq 1, 0 < x_n \leq \dfrac{1}{n}$ (question 6). La suite nulle et la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ont pour limite 0. On applique le théorème d'encadrement.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

8. 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$.

INDICE

D'après la question 2, $nx_n = \cos x_n$. La suite (x_n) tend vers 0 (question 7) et le cosinus est continu en 0 : applique le théorème sur la limite de $(f(u_n))$ lorsque f est continue.

CORRIGÉ

Pour tout $n \geq 1$, $nx_n = \cos x_n$ (question 2). La suite (x_n) converge vers 0 (question 7), et la fonction cosinus, définie sur $\mathbb{R}$, est continue en 0. D'après le théorème sur la limite de $(f(u_n))$ lorsque f est continue, la suite $(\cos x_n)$ converge vers $\cos 0 = 1$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$.

Exercice 3 5,25 pts

Une récurrence homographique à paramètre

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_a(x) = \frac{x + a^2}{x + 1},$$

et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f_a(u_n).$$

La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.

INDICE

Raisonne par récurrence. Dans l'hérédité, examine le quotient $f_a(u_n)$: son numérateur, puis son dénominateur.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « u_n est défini et $u_n \geq 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $u_n + 1 \geq 1 > 0$, donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n + a^2}{u_n + 1}$ est défini. Son numérateur est strictement positif, car $u_n \geq 0$ et $a^2 > 0$; donc $u_{n+1} > 0$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.

2. 0,5 pts

Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $f_a(x) = x$.

INDICE

Multiplie par $x + 1$, qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$, puis garde en tête le signe de x et celui de a.

CORRIGÉ

Soit $x \geq 0$. Comme $x + 1 > 0$, l'équation $f_a(x) = x$ équivaut à $x + a^2 = x(x + 1)$, soit $x^2 = a^2$, c'est-à-dire $x = a$ ou $x = -a$.

Comme $a > 0$, seul a appartient à $[0, +\infty[$.

Conclusion. L'équation $f_a(x) = x$ a pour unique solution a dans $[0, +\infty[$.

3. `0,75 pts`

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - a}{u_n + a}$. Justifier que v_n est défini, calculer v_0, et montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q_a = \dfrac{1-a}{1+a}$.

INDICE

Remplace u_{n+1} par $\dfrac{u_n + a^2}{u_n + 1}$ dans v_{n+1}, multiplie numérateur et dénominateur par $u_n + 1$, puis factorise chacun d'eux.

CORRIGÉ

Définition et premier terme. Pour tout n, $u_n \geq 0$ (question 1) et $a > 0$, donc $u_n + a > 0$: v_n est défini. On a $v_0 = \dfrac{0 - a}{0 + a} = -1$.

Relation de récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $u_n + 1 > 0$:

$$v_{n+1} = \frac{u_n + a^2 - a(u_n + 1)}{u_n + a^2 + a(u_n + 1)}.$$

On factorise le numérateur :

$$\begin{aligned} &u_n + a^2 - a(u_n + 1) \\ &= (1 - a)(u_n - a), \end{aligned}$$

puis le dénominateur :

$$\begin{aligned} &u_n + a^2 + a(u_n + 1) \\ &= (1 + a)(u_n + a). \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{1-a}{1+a}\, v_n$.

Conclusion. $v_0 = -1$ et (v_n) est géométrique de raison $q_a = \dfrac{1-a}{1+a}$.

4. 0,5 pts

Montrer que $-1 < q_a < 1$. En déduire la limite de la suite (v_n).

INDICE

Calcule $q_a + 1$ et $1 - q_a$ en réduisant au même dénominateur. Pour la limite, écris d'abord v_n en fonction de n.

CORRIGÉ

Encadrement de la raison. Comme $a > 0$:

$$\begin{aligned} q_a + 1 &= \frac{(1-a)+(1+a)}{1+a} \\ &= \frac{2}{1+a} > 0, \\ 1 - q_a &= \frac{(1+a)-(1-a)}{1+a} \\ &= \frac{2a}{1+a} > 0. \end{aligned}$$

Donc $-1 < q_a < 1$.

Limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0\, q_a^n = -q_a^n$. Comme $-1 < q_a < 1$, la suite (q_a^n) tend vers 0.

Conclusion. $-1 < q_a < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$ et $u_n = a\,\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

INDICE

Que donnerait l'égalité $v_n = 1$ dans la définition de v_n ? Pour exprimer u_n, chasse le dénominateur dans cette définition et regroupe les termes en u_n.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_n \neq 1$. Si l'on avait $v_n = 1$, on aurait $u_n - a = u_n + a$, soit $a = 0$, ce qui est faux.

Expression de u_n. De $v_n(u_n + a) = u_n - a$, on tire :

$$u_n(1 - v_n) = a(1 + v_n).$$

Comme $1 - v_n \neq 0$:

$$u_n = a\,\frac{1+v_n}{1-v_n}.$$

Limite. La suite (v_n) tend vers 0 (question 4). Par opérations sur les limites, $(1 + v_n)$ et $(1 - v_n)$ tendent vers 1, qui n'est pas nul ; donc (u_n) tend vers a.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$: pour toute valeur du paramètre $a > 0$, la suite converge vers le point fixe trouvé à la question 2.

6. 0,5 pts

Dans cette question, $a = 1$. Montrer que $u_n = 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Calcule la raison q_1 et utilise la question 5, ou simplifie directement $f_1(x)$.

CORRIGÉ

Pour $a = 1$ et pour tout $x \geq 0$, $f_1(x) = \dfrac{x+1}{x+1} = 1$. Soit $n \geq 1$: comme $u_{n-1} \geq 0$ (question 1), $u_n = f_1(u_{n-1}) = 1$.

Vérification par la suite auxiliaire. $q_1 = 0$, donc $v_n = 0$ pour $n \geq 1$, et $u_n = 1 \times \dfrac{1+0}{1-0} = 1$.

Conclusion. Pour $a = 1$, $u_n = 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

7. 0,5 pts

Dans la suite de l'exercice, $a = 2$. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

INDICE

Calcule q_2, puis utilise l'expression $v_n = v_0\, q_2^n$ et la question 5.

CORRIGÉ

Pour $a = 2$, $q_2 = \dfrac{1-2}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$ et $v_0 = -1$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'après la question 5 :

$$\begin{aligned} u_n &= 2\,\frac{1+v_n}{1-v_n} \\ &= 2\,\frac{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $u_n = 2\,\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

8. 0,5 pts

Montrer que $u_n < 2$ lorsque n est pair et que $u_n > 2$ lorsque n est impair. En déduire que la suite (u_n) n'est pas monotone.

INDICE

Exprime $u_n - 2$ à l'aide de v_n, puis étudie son signe selon la parité de n. Pour la monotonie, compare u_0, u_1 et u_2.

CORRIGÉ

Signe de $u_n - 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 5 :

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= 2\,\frac{1+v_n}{1-v_n} - 2 \\ &= \frac{4v_n}{1-v_n}. \end{aligned}$$

Or $1 - v_n > 0$, car $|v_n| = \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 1$ et $v_n \neq 1$. Donc $u_n - 2$ a le signe de $v_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

- Si n est pair, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$, donc $v_n < 0$ et $u_n < 2$.
- Si n est impair, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n < 0$, donc $v_n > 0$ et $u_n > 2$.

Monotonie. En particulier $u_0 < 2 < u_1$ et $u_2 < 2 < u_1$: la suite croît de u_0 à u_1, puis décroît de u_1 à u_2.

Conclusion. $u_n < 2$ pour n pair et $u_n > 2$ pour n impair ; la suite (u_n) n'est pas monotone. Ses termes passent alternativement de part et d'autre de leur limite 2, car la raison q_2 est négative.

9. `0,75 pts`

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_n - 2| \leq 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, et retrouver ainsi la limite de (u_n).

INDICE

Pars de $u_n - 2 = \dfrac{4v_n}{1 - v_n}$ et minore $1 - v_n$ lorsque $n \geq 1$. Le rang 0 se vérifie à part. Conclus avec le théorème de majoration de l'écart.

CORRIGÉ

Rang 0. $|u_0 - 2| = 2 \leq 6$.

Rang $n \geq 1$. Soit $n \geq 1$. Alors $|v_n| = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leq \dfrac{1}{3}$, donc $1 - v_n \geq 1 - |v_n| \geq \dfrac{2}{3}$. Il vient :

$$\begin{aligned} |u_n - 2| &= \frac{4|v_n|}{1 - v_n} \\ &\leq \frac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \\ &= 6\left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Limite. Comme $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, la suite $\left(6\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ tend vers 0. Par le théorème de majoration de l'écart, (u_n) tend vers 2.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$, ce qui confirme la question 5 avec $a = 2$.

Exercice 4 5 pts

Une somme de racines entre deux suites adjacentes

On considère les suites $(S_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ définies, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$
$$a_n = S_n - 2\sqrt{n},$$
$$b_n = S_n - 2\sqrt{n+1}.$$

On donne $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$. En déduire que $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < 2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

INDICE

Multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. Pour l'encadrement, compare ce dénominateur à $2\sqrt{x}$ et à $2\sqrt{x+1}$.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $x > 0$. Le réel $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ est strictement positif. Avec la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} &2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \\ &= \frac{2\left((x+1) - x\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

L'encadrement. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $x < x+1$, donc $0 < \sqrt{x} < \sqrt{x+1}$. Il vient :

$$2\sqrt{x} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x},$$
$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} < 2\sqrt{x+1}.$$

Ces trois nombres sont strictement positifs ; en passant aux inverses, puis en multipliant par 2 :

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, avec l'égalité précédente, $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < 2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2. 0,5 pts

Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante.

INDICE

Calcule $a_{n+1} - a_n$: le terme $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ apparaît, à comparer grâce à la question 1 appliquée à $x = n$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. Comme $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} - a_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\quad - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right). \end{aligned}$$

La question 1, appliquée au réel $x = n > 0$, donne $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Donc $a_{n+1} - a_n < 0$.

Conclusion. La suite (a_n) est strictement décroissante.

3. 0,5 pts

Montrer que la suite (b_n) est strictement croissante.

INDICE

Même calcul pour $b_{n+1} - b_n$, mais applique cette fois la question 1 au réel $x = n + 1$, avec l'autre inégalité.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} & b_{n+1} - b_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\quad - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right). \end{aligned}$$

La question 1, appliquée au réel $x = n + 1 > 0$, donne $2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Donc $b_{n+1} - b_n > 0$.

Conclusion. La suite (b_n) est strictement croissante.

4. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 < a_n - b_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n)$.

INDICE

L'écart $a_n - b_n$ ne fait plus intervenir S_n. Pour la limite, encadre-le entre deux suites de limite 0.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $n \geq 1$. On a :

$$a_n - b_n = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

D'après la question 1 avec $x = n$, ce nombre est strictement compris entre $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, qui est strictement positif, et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Donc $0 < a_n - b_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Limite. La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, donc $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tend vers 0. On applique le théorème d'encadrement.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $0 < a_n - b_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

5. 0,5 pts

En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis qu'elles convergent vers un même réel ℓ tel que $b_n \leq \ell \leq a_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Rassemble les trois conditions de la définition (questions 2, 3 et 4), puis cite le théorème qui en découle.

CORRIGÉ

La suite (b_n) est croissante (question 3), la suite (a_n) est décroissante (question 2), et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$ (question 4). Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ, et $b_n \leq \ell \leq a_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Conclusion. (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers un même réel ℓ tel que, pour tout $n \geq 1$, $b_n \leq \ell \leq a_n$.

6. 0,5 pts

Montrer que $-1{,}84 < \ell \leq -1$.

INDICE

Écris l'encadrement de la question 5 au rang $n = 1$, puis utilise la valeur fournie pour $\sqrt{2}$.

CORRIGÉ

Encadrement au rang 1. On a $S_1 = 1$, donc $a_1 = 1 - 2\sqrt{1} = -1$ et $b_1 = 1 - 2\sqrt{2}$. La question 5 donne :

$$1 - 2\sqrt{2} \leq \ell \leq -1.$$

Valeur numérique. Or $\sqrt{2} < 1{,}42$, donc $2\sqrt{2} < 2{,}84$ et $1 - 2\sqrt{2} > 1 - 2{,}84 = -1{,}84$.

Conclusion. $-1{,}84 < \ell \leq -1$.

7. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq a_n - \ell < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire que $0 \leq a_n - \ell < 10^{-1}$ pour tout entier $n \geq 100$.

INDICE

Encadre $a_n - \ell$ grâce à l'inégalité $b_n \leq \ell$, puis compare $\sqrt{n}$ à 10 lorsque $n \geq 100$.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $n \geq 1$. Comme $\ell \leq a_n$, on a $a_n - \ell \geq 0$. Comme $b_n \leq \ell$, on a $a_n - \ell \leq a_n - b_n$, et la question 4 donne $a_n - b_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. D'où :

$$0 \leq a_n - \ell < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

À partir du rang 100. Si $n \geq 100$, la stricte croissance de la racine carrée donne $\sqrt{n} \geq 10$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{10}$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq a_n - \ell < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, et pour tout $n \geq 100$, $0 \leq a_n - \ell < 10^{-1}$.

8. 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

INDICE

Exprime S_n à l'aide de a_n, puis minore a_n par une constante. Le théorème de comparaison conclut.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. On a $S_n = a_n + 2\sqrt{n}$ et $a_n \geq \ell$ (question 5), donc :

$$S_n \geq \ell + 2\sqrt{n}.$$

La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, donc $(\ell + 2\sqrt{n})$ aussi. On applique le théorème de comparaison.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

9. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$.

INDICE

Divise l'égalité $S_n = a_n + 2\sqrt{n}$ par $\sqrt{n}$. La suite (a_n) converge : que dire du produit de a_n par $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$?

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. En divisant $S_n = a_n + 2\sqrt{n}$ par $\sqrt{n} > 0$:

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2 + a_n \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La suite (a_n) converge vers ℓ (question 5) et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tend vers 0 ; par produit, $\left(\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right)$ tend vers $\ell \times 0 = 0$. On conclut par somme.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$.

Remarque. S_n tend vers $+\infty$ (question 8), mais son quotient par $2\sqrt{n}$ tend vers 1 : la somme S_n grandit comme $2\sqrt{n}$, et l'écart $S_n - 2\sqrt{n} = a_n$ reste borné.

Exercice 5 5,5 pts

Une récurrence vers zéro et sa suite auxiliaire arithmétique

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n).$$

La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que, pour tout réel $x\geq 0$, $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que $f([0,1])=\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

INDICE

Dérive le quotient, sachant que la dérivée de $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ est $x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, puis réduis le numérateur au même dénominateur. L'image du segment se lit sur les valeurs aux bornes.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $x\mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et la racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et ne s'annule pas. Pour tout $x\geq 0$, sa dérivée en x vaut :

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Le quotient f est donc dérivable sur $[0,+\infty[$.

Calcul de $f'(x)$. Soit $x\geq 0$. D'après la dérivée d'un quotient, en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Variations et image. Ainsi $f'(x)>0$ pour tout $x\geq 0$: f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Elle y est continue, car dérivable. L'image du segment $[0,1]$ est donc $[f(0),f(1)]$, avec $f(0)=0$ et $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Conclusion. f est dérivable et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, et $f([0,1])=\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $0 < f(x) < x$. En déduire que l'équation $x = f(x)$ admet 0 pour unique solution dans $[0, 1]$.

INDICE

Pour $x > 0$, compare $\sqrt{1 + x^2}$ à 1, puis divise.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $x > 0$. Alors $1 + x^2 > 1$, donc $\sqrt{1 + x^2} > 1$ par stricte croissance de la racine carrée. Comme $x > 0$, il vient :

$$0 < \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} < x,$$

c'est-à-dire $0 < f(x) < x$.

Points fixes. Aucun réel x de $]0, 1]$ ne vérifie donc $x = f(x)$, alors que $f(0) = 0$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $0 < f(x) < x$, et l'unique solution de $x = f(x)$ dans $[0, 1]$ est 0.

3. 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 1$.

INDICE

Prends pour propriété $P(n)$: « $0 < u_n \leq 1$ ». Dans l'hérédité, la question 2 appliquée au réel u_n fournit les deux inégalités.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $0 < u_n \leq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $u_n > 0$, la question 2 donne $0 < f(u_n) < u_n$, donc $0 < u_{n+1} < u_n \leq 1$. Ainsi $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $0 < u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n.

4. 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

INDICE

Étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ à l'aide des questions 2 et 3.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3, $u_n > 0$; d'après la question 2, $f(u_n) < u_n$. Donc :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0.$$

Conclusion. La suite (u_n) est strictement décroissante.

5. 0,75 pts

En déduire que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

INDICE

Décroissante et minorée : nomme le critère. Pour la limite, vérifie toutes les hypothèses de la propriété « limite d'une suite récurrente convergente » sur l'intervalle $[0,1]$, y compris l'appartenance de la limite à cet intervalle.

CORRIGÉ

Convergence. La suite (u_n) est décroissante (question 4) et minorée par 0 (question 3). D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge vers un réel ℓ.

Situer ℓ. Pour tout n, $0 \leq u_n \leq 1$; en passant à la limite dans ces inégalités larges, $0 \leq \ell \leq 1$.

Point fixe. Posons $I = [0,1]$. La fonction f est continue sur I, $f(I) = \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \subset I$ (question 1), $u_0 \in I$ et $\ell \in I$. La propriété « limite d'une suite récurrente convergente » donne alors $f(\ell) = \ell$, et la question 2 impose $\ell = 0$.

Conclusion. (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

6. 0,75 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1. En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n.

INDICE

Exprime $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}^2}$ à l'aide de u_n : le carré fait disparaître la racine. Pour revenir à u_n, souviens-toi de son signe.

CORRIGÉ

Relation de récurrence. D'après la question 3, $u_n > 0$ pour tout n : v_n est défini. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2}{1 + u_n^2}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1 + u_n^2}{u_n^2} \\ &= \frac{1}{u_n^2} + 1 \\ &= v_n + 1. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 1, de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{1^2} = 1$.

Expressions explicites. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times 1 = n + 1$. Comme $u_n > 0$, on a $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$.

Conclusion. (v_n) est arithmétique de raison 1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n + 1$ et $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

7. 0,25 pts

Retrouver la limite de la suite (u_n) à partir de cette expression.

INDICE

Cherche d'abord la limite de la suite $\left(\sqrt{n+1}\right)$.

CORRIGÉ

On a $u_n = g(n)$, où g est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x+1}$ tend vers $+\infty$, donc $g(x)$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, ce qui confirme la question 5.

8. 0,5 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $T_n = \dfrac{1}{u_0^2} + \dfrac{1}{u_1^2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n^2}$. Exprimer T_n en fonction de n, puis déterminer l'entier naturel n tel que $T_n = 210$.

INDICE

Reconnais dans T_n une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (v_n) : compte les termes, repère le premier et le dernier.

CORRIGÉ

Expression de T_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 6, $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ est la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique, de premier terme $v_0 = 1$ et de dernier terme $v_n = n+1$. Donc :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{(n+1)(1+n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Résolution de $T_n = 210$. L'égalité équivaut à $(n+1)(n+2) = 420$. Le produit $(n+1)(n+2)$ augmente strictement avec n, et $20 \times 21 = 420$; la seule valeur qui convient est donc $n+1 = 20$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, et $T_n = 210$ pour $n = 19$.

9. 0,25 pts

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 10^{-2}$.

INDICE

Traduis l'inégalité sur $\sqrt{n+1}$, puis sur $n+1$, en justifiant chaque passage.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les nombres u_n et 10^{-2} sont strictement positifs, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et la racine carrée y est strictement croissante. Donc $u_n \leq 10^{-2}$ équivaut à :

$$\begin{aligned} & \sqrt{n+1} \geq 100 \\ \iff & n+1 \geq 10^4 \\ \iff & n \geq 9999. \end{aligned}$$

Conclusion. Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 10^{-2}$ est 9999.

10. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,u_n = 1$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = +\infty$.

INDICE

Pour $n \geq 1$, écris $\sqrt{n}\,u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ et utilise la continuité de la racine carrée en 1. Écris ensuite $n\,u_n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}\,u_n$.

CORRIGÉ

Limite de $\sqrt{n}\,u_n$. Soit $n \geq 1$. D'après la question 6 :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\,u_n &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

La suite $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 1 et la fonction racine carrée est continue en 1 : par le théorème sur la limite de $(f(u_n))$ lorsque f est continue, la suite $\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right)$ tend vers $\sqrt{1}=1$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,u_n = 1$.

Limite de $n\,u_n$. On écrit $n\,u_n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}\,u_n$: c'est le produit d'une suite de limite $+\infty$ et d'une suite de limite $1 > 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = +\infty$: la suite (u_n) tend vers 0 moins vite que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.