BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	8

Exercice 1

Récurrence, monotonie, convergence

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - x^2$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

1.

Montre que g est croissante sur $[0, 1]$ et que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.

INDICE

Étudie le signe de $g'(x)$ sur $[0, 1]$. Pour l'image du segment, utilise la continuité et la monotonie de g sur $[0, 1]$.

2.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

INDICE

Écris $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ». Pour l'hérédité, deux écritures de g aident : $g(x) = x(2 - x)$ et $1 - g(x) = (1 - x)^2$.

3.

Montre que la suite (u_n) est strictement croissante.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ et factorise. Le signe de chaque facteur vient de la question 2.

4.

Justifie que (u_n) converge, puis détermine sa limite.

INDICE

Croissante et majorée : cite le critère. Pour la limite, situe-la d'abord dans $[0, 1]$, puis vérifie les hypothèses de la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente. Deux points fixes apparaîtront : un seul convient.

5.

Montre que, pour tout entier naturel n, $1 - u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$. Retrouve ainsi la limite de la question 4.

INDICE

Raisonne par récurrence. L'hérédité repose sur l'égalité $1 - u_{n+1} = (1 - u_n)^2$ vue à la question 2.

Exercice 2

Une récurrence homographique et sa suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

1.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est défini et $u_n \geq 0$. Calcule u_1 et u_2.

INDICE

La propriété à transmettre est « u_n existe et $u_n \geq 0$ ». Dans l'hérédité, le dénominateur $u_n + 3$ est alors strictement positif.

2.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$. Justifie que v_n est défini, puis montre que (v_n) est géométrique ; précise sa raison et son premier terme.

INDICE

Le dénominateur $u_n + 2$ ne s'annule pas grâce à la question 1. Pour la raison, remplace u_{n+1} par son expression dans v_{n+1}, puis multiplie le numérateur et le dénominateur par $u_n + 3$.

3.

Exprime u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n. Déduis-en la limite de (u_n).

INDICE

Pars de $v_n(u_n + 2) = u_n - 2$ et isole u_n ; vérifie que tu ne divises pas par 0. Écris ensuite v_n avec la question 2.

4.

Montre que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 - \dfrac{4}{5^n + 1}$. Déduis-en que la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2.

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression de la question 3 par 5^n, puis calcule $2 - u_n$. Le sens de variation se lit alors sur $5^n + 1$.

Exercice 3

Encadrer une somme de n termes

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+k}.$$

Ainsi $u_n = \dfrac{2n}{n^2+1} + \dfrac{2n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{2n}{n^2+n}$.

1.

Calcule u_1 et u_2.

INDICE

Pour $n=1$, la somme n'a qu'un terme. Pour $n=2$, elle en a deux : $k=1$ et $k=2$.

2.

Soit $n \geq 1$. Montre que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, $\dfrac{2n}{n^2+n} \leq \dfrac{2n}{n^2+k} \leq \dfrac{2n}{n^2+1}$.

INDICE

Encadre d'abord le dénominateur n^2+k. Puis passe à l'inverse : la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3.

Déduis-en que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{2n^2}{n^2+1}$.

INDICE

Ajoute les n encadrements de la question 2, pour k allant de 1 à n. Les bornes ne dépendent pas de k.

4.

Détermine la limite de (u_n). Montre aussi que $u_n < 2$ pour tout $n \geq 1$: qu'en conclut-on pour la limite, et pourquoi ce n'est pas une contradiction ?

INDICE

Calcule la limite de chaque borne en factorisant par la plus haute puissance de n. Pour la seconde partie, compare $\dfrac{2n^2}{n^2+1}$ à 2, puis relis le passage à la limite dans une inégalité.

Exercice 4

Deux moyennes qui encadrent racine de 3

Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1.

Calcule a_1, b_1, a_2 et b_2.

INDICE

Applique les deux relations avec $n = 0$, puis avec $n = 1$. Pour b_2, garde $a_1 + b_1$ sous forme de fraction.

2.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $a_n b_n = 3$.

INDICE

Une seule propriété $P(n)$ regroupe les trois affirmations. Dans l'hérédité, calcule le produit $a_{n+1}b_{n+1}$: une simplification apparaît.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}$. Déduis-en que $a_n \geq b_n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Réduis $a_{n+1} - b_{n+1}$ au dénominateur $2(a_n + b_n)$ et reconnais une identité remarquable. Le rang 0 se traite à part.

4.

Montre que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante.

INDICE

Calcule $a_{n+1} - a_n$, puis $b_{n+1} - b_n$ sur un dénominateur commun. Le facteur $a_n - b_n$ apparaît dans les deux cas.

5.

Montre que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$, puis que $0 \leq a_n - b_n \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

INDICE

Écris $\dfrac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} = \dfrac{a_n - b_n}{2} \times \dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$ et majore le second facteur par 1. La seconde inégalité se démontre par récurrence.

6.

Déduis-en que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis que leur limite commune est $\sqrt{3}$. Donne un encadrement de $\sqrt{3}$ par deux fractions.

INDICE

L'écart tend vers 0 par encadrement ; cite ensuite le théorème des suites adjacentes. Pour identifier la limite, passe à la limite dans $a_n b_n = 3$ et fixe le signe de la limite.

Exercice 5

Une suite récurrente selon son premier terme

Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x^3 + 6}{7}$. On étudie les suites (u_n) définies par un premier terme u_0 de $[0, 2]$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1.

Vérifie que, pour tout réel $x \geq 0$, $h(x) - x = \dfrac{(x-1)(x-2)(x+3)}{7}$. Donne le signe de $h(x) - x$ sur $[0, 1]$, puis sur $[1, 2]$.

INDICE

Développe le produit $(x-1)(x-2)$, puis multiplie par $x+3$, et compare avec $7\,(h(x) - x)$. Pour le signe, regarde chaque facteur sur chaque intervalle.

2.

Montre que h est croissante sur $[0, +\infty[$, puis que $h([0, 1]) \subset [0, 1]$ et $h([1, 2]) \subset [1, 2]$.

INDICE

Calcule $h'(x)$. Ensuite, une fonction continue et croissante envoie un segment sur le segment de ses valeurs aux bornes : calcule $h(0)$, $h(1)$ et $h(2)$.

3.

Dans cette question, $u_0 = 0$. Montre que (u_n) est croissante et majorée par 1, puis qu'elle converge vers 1.

INDICE

L'intervalle stable $[0, 1]$ contient u_0 : tous les termes y restent. La monotonie vient alors du signe de $h(x) - x$ sur $[0, 1]$. Pour la limite, vérifie les hypothèses de la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente.

4.

Dans cette question, $u_0 = \dfrac{3}{2}$. Calcule u_1, étudie la monotonie de (u_n) et détermine sa limite.

INDICE

Travaille cette fois dans l'intervalle stable $[1, 2]$. Pour départager les points fixes, sers-toi de la majoration $u_n \leq u_0$.

5.

Que devient la suite (u_n) lorsque $u_0 = 2$? Et lorsque $u_0 = 1$?

INDICE

Calcule $h(2)$ et $h(1)$, puis cherche ce que devient un terme égal à un point fixe.

Exercice 6

Une suite définie par une équation

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n + 3x - 2$.

1.

Soit $n \geq 1$. Montre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, notée x_n, et que $0 < x_n < 1$.

INDICE

Montre que f_n est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, comme somme de deux fonctions. Calcule ensuite $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

2.

Calcule x_1 et x_2.

INDICE

Pour $n = 1$, l'équation est du premier degré. Pour $n = 2$, c'est un trinôme : garde la racine qui appartient à $[0, 1]$.

3.

Montre que, pour tout entier $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n - 1)$. Déduis-en que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

INDICE

Dans $f_{n+1}(x_n)$, remplace $3x_n - 2$ par sa valeur tirée de $f_n(x_n) = 0$. Ensuite, compare $f_{n+1}(x_n)$ à $f_{n+1}(x_{n+1})$.

4.

Montre que, pour tout entier $n \geq 1$, $x_n < \dfrac{2}{3}$. Déduis-en que la suite (x_n) converge.

INDICE

Isole x_n dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$. Le signe de x_n^n fait le reste.

5.

Montre que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 < \dfrac{2}{3} - x_n \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Déduis-en la limite de (x_n).

INDICE

Écris $\dfrac{2}{3} - x_n$ à l'aide de x_n^n, avec l'égalité de la question 4. Puis majore x_n^n grâce à $0 < x_n < \dfrac{2}{3}$.

Exercice 7

Croissante, mais sans limite finie

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}.$$

1.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.

INDICE

La propriété à transmettre est « u_n existe et $u_n \geq 1$ ». Dans l'hérédité, $u_n \neq 0$ rend le quotient possible.

2.

Montre que la suite (u_n) est strictement croissante.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$: il reste un seul terme.

3.

Suppose, par l'absurde, que (u_n) converge vers un réel ℓ. Montre que $\ell \geq 1$, puis obtiens une contradiction en utilisant la fonction p définie sur $[1, +\infty[$ par $p(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

INDICE

Passe à la limite dans $u_n \geq 1$. Ensuite, calcule de deux façons la limite de (u_{n+1}) : directement, et comme $(p(u_n))$ avec la continuité de p.

4.

Déduis-en $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

INDICE

Si la suite était majorée, quel critère s'appliquerait ? Combine ce critère avec la question 3, puis cite le résultat sur les suites croissantes non majorées.

Exercice 8

Majorer l'écart à la limite

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+6}{x+1}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1.

Montre que, pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) = 2 + \dfrac{4}{x+1}$. Déduis-en que $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$, puis que u_n est défini et $u_n \geq 1$ pour tout entier naturel n. Calcule u_1 et u_2.

INDICE

Réduis $2 + \dfrac{4}{x+1}$ au même dénominateur. Pour $x \geq 1$, encadre $\dfrac{4}{x+1}$; la propriété de l'intervalle stable donne ensuite les termes.

2.

Montre que, pour tout réel $x \geq 1$, $|f(x) - 3| = \dfrac{|x-3|}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}|x-3|$.

INDICE

Calcule $f(x) - 3$ sur le dénominateur $x+1$. Pour la majoration, minore $x+1$ quand $x \geq 1$.

3.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $|u_n - 3| \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Déduis-en la limite de (u_n).

INDICE

L'hérédité applique la question 2 avec $x = u_n$, ce qui est permis grâce à la question 1. Pour la limite, pense à la majoration de l'écart par une suite qui tend vers 0.

4.

Détermine un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, $|u_n - 3| \leq 10^{-3}$.

INDICE

Il suffit que le majorant de la question 3 soit inférieur ou égal à 10^{-3}. Réécris cette condition avec une puissance de 2, puis encadre 1000 entre deux puissances de 2.