BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	8

Exercice 1

Récurrence, monotonie, convergence

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - x^2$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

1.

Montre que g est croissante sur $[0, 1]$ et que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.

INDICE

Étudie le signe de $g'(x)$ sur $[0, 1]$. Pour l'image du segment, utilise la continuité et la monotonie de g sur $[0, 1]$.

CORRIGÉ

Variations. La fonction g est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 2(1 - x).$$

Pour $x \in [0, 1]$, $g'(x) \geq 0$, et g' ne s'annule qu'en 1 : g est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Image du segment. g est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, donc :

$$g([0, 1]) = [g(0), g(1)] = [0, 1].$$

Conclusion. g est croissante sur $[0, 1]$ et $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.

2.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

INDICE

Écris $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ». Pour l'hérédité, deux écritures de g aident : $g(x) = x(2 - x)$ et $1 - g(x) = (1 - x)^2$.

CORRIGÉ

Deux écritures de g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = x(2 - x),$$
$$1 - g(x) = (1 - x)^2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 < \dfrac{1}{2} < 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 1$.

- $u_n > 0$ et $2 - u_n > 1 > 0$, donc $u_{n+1} = u_n(2 - u_n) > 0$.
- $u_n \neq 1$, donc $1 - u_{n+1} = (1 - u_n)^2 > 0$, soit $u_{n+1} < 1$.

Ainsi $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

3.

Montre que la suite (u_n) est strictement croissante.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ et factorise. Le signe de chaque facteur vient de la question 2.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2u_n - u_n^2 - u_n \\ &= u_n(1 - u_n). \end{aligned}$$

D'après la question 2, $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Conclusion. La suite (u_n) est strictement croissante.

4.

Justifie que (u_n) converge, puis détermine sa limite.

INDICE

Croissante et majorée : cite le critère. Pour la limite, situe-la d'abord dans $[0, 1]$, puis vérifie les hypothèses de la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente. Deux points fixes apparaîtront : un seul convient.

CORRIGÉ

Convergence. La suite (u_n) est croissante (question 3) et majorée par 1 (question 2). Toute suite croissante et majorée converge : (u_n) converge vers un réel ℓ.

Situer ℓ. La suite étant croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} = u_0 \leq u_n \leq 1$. Par passage à la limite dans ces inégalités larges, $\dfrac{1}{2} \leq \ell \leq 1$; en particulier $\ell \in [0, 1]$.

Point fixe. g est continue sur $[0, 1]$, $g([0, 1]) \subset [0, 1]$, $u_0 \in [0, 1]$ et $\ell \in [0, 1]$. D'après la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente, $g(\ell) = \ell$, c'est-à-dire :

$$2\ell - \ell^2 = \ell \iff \ell(1 - \ell) = 0.$$

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Comme $\ell \geq \dfrac{1}{2}$, seule la valeur 1 convient.

Conclusion. (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

5.

Montre que, pour tout entier naturel n, $1-u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$. Retrouve ainsi la limite de la question 4.

INDICE

Raisonne par récurrence. L'hérédité repose sur l'égalité $1-u_{n+1}=(1-u_n)^2$ vue à la question 2.

CORRIGÉ

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $Q(n)$ la propriété « $1-u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$ ».

Initialisation. $2^0=1$ et $1-u_0=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^1$: $Q(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vraie. D'après la question 2, $1-u_{n+1}=(1-u_n)^2$. Donc :

$$\begin{aligned}1-u_{n+1}&=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\times 2^n}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

$Q(n+1)$ est vraie. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1-u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.

Retrouver la limite. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après l'inégalité de Bernoulli avec $a=1$, $2^n=(1+1)^n\geq 1+n>n$. Comme $0<\frac{1}{2}<1$, la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)_{k\geq 0}$ est décroissante ; avec $k=2^n\geq n$:

$$0<1-u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Le majorant tend vers 0 ; d'après le théorème d'encadrement, $(1-u_n)$ tend vers 0.

Conclusion. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1-u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$, et l'on retrouve $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Exercice 2

Une récurrence homographique et sa suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

1.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est défini et $u_n \geq 0$. Calcule u_1 et u_2.

INDICE

La propriété à transmettre est « u_n existe et $u_n \geq 0$ ». Dans l'hérédité, le dénominateur $u_n + 3$ est alors strictement positif.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « u_n est défini et $u_n \geq 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $u_n \geq 0$, $u_n + 3 \geq 3 > 0$: le quotient u_{n+1} est défini. Son numérateur $3u_n + 4$ est strictement positif, donc $u_{n+1} > 0$. $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \geq 0$.

Calcul des premiers termes. $u_1 = \dfrac{4}{3}$, puis :

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{4 + 4}{\frac{4}{3} + 3} \\ &= \frac{8}{\frac{13}{3}} = \frac{24}{13}. \end{aligned}$$

Conclusion. Tous les termes sont définis et positifs ; $u_1 = \dfrac{4}{3}$ et $u_2 = \dfrac{24}{13}$.

2.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$. Justifie que v_n est défini, puis montre que (v_n) est géométrique ; précise sa raison et son premier terme.

INDICE

Le dénominateur $u_n + 2$ ne s'annule pas grâce à la question 1. Pour la raison, remplace u_{n+1} par son expression dans v_{n+1}, puis multiplie le numérateur et le dénominateur par $u_n + 3$.

CORRIGÉ

Définition de v_n. D'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 2 \geq 2 > 0$: v_n est défini.

Relation de récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n + 3 > 0$, on multiplie le numérateur et le dénominateur de v_{n+1} par $u_n + 3$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{3u_n + 4 - 2(u_n + 3)}{3u_n + 4 + 2(u_n + 3)} \\ &= \frac{u_n - 2}{5u_n + 10} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}\, v_n$.

Premier terme. $v_0 = \dfrac{0 - 2}{0 + 2} = -1$.

Conclusion. (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -1$.

3.

Exprime u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n. Déduis-en la limite de (u_n).

INDICE

Pars de $v_n(u_n+2)=u_n-2$ et isole u_n ; vérifie que tu ne divises pas par 0. Écris ensuite v_n avec la question 2.

CORRIGÉ

u_n en fonction de v_n. Soit $n\in\mathbb{N}$. De $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$, on tire $v_nu_n+2v_n=u_n-2$, soit :

$$u_n(1-v_n)=2(1+v_n).$$

D'après la question 2, $v_n=-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n<0$, donc $1-v_n>0$ et :

$$u_n=\frac{2(1+v_n)}{1-v_n}.$$

u_n en fonction de n.

$$u_n=\frac{2\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}.$$

Limite. Comme $-1<\dfrac{1}{5}<1$, la suite $\left(\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)$ tend vers 0. Par opérations, la limite vaut $\dfrac{2(1-0)}{1+0}$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

4.

Montre que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 - \dfrac{4}{5^n + 1}$. Déduis-en que la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2.

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression de la question 3 par 5^n, puis calcule $2 - u_n$. Le sens de variation se lit alors sur $5^n + 1$.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $n \in \mathbb{N}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $5^n > 0$:

$$u_n = \frac{2\,(5^n - 1)}{5^n + 1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} &2 - u_n \\ &= \frac{2\,(5^n + 1) - 2\,(5^n - 1)}{5^n + 1} \\ &= \frac{4}{5^n + 1}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$u_n = 2 - \frac{4}{5^n + 1}.$$

Majoration. En particulier $u_n < 2$: la suite est majorée par 2.

Monotonie. On a $5^{n+1} + 1 > 5^n + 1 > 0$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\dfrac{4}{5^{n+1} + 1} < \dfrac{4}{5^n + 1}$, soit $u_{n+1} > u_n$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - \dfrac{4}{5^n + 1}$; la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2.

Exercice 3

Encadrer une somme de n termes

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+k}.$$

Ainsi $u_n = \dfrac{2n}{n^2+1} + \dfrac{2n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{2n}{n^2+n}$.

1.

Calcule u_1 et u_2.

INDICE

Pour $n=1$, la somme n'a qu'un terme. Pour $n=2$, elle en a deux : $k=1$ et $k=2$.

CORRIGÉ

Pour $n=1$. La somme n'a qu'un terme : $u_1 = \dfrac{2}{1+1} = 1$.

Pour $n=2$. La somme a deux termes :

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{4}{4+1} + \frac{4}{4+2} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{22}{15}. \end{aligned}$$

Conclusion. $u_1 = 1$ et $u_2 = \dfrac{22}{15}$.

2.

Soit $n \geq 1$. Montre que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, $\dfrac{2n}{n^2+n} \leq \dfrac{2n}{n^2+k} \leq \dfrac{2n}{n^2+1}$.

INDICE

Encadre d'abord le dénominateur n^2+k. Puis passe à l'inverse : la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$.

CORRIGÉ

Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Alors :

$$0 < n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n.$$

La fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc :

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

On multiplie par $2n > 0$: le sens des inégalités est conservé.

Conclusion. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, $\dfrac{2n}{n^2+n} \leq \dfrac{2n}{n^2+k} \leq \dfrac{2n}{n^2+1}$.

3.

Déduis-en que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{2n^2}{n^2+1}$.

INDICE

Ajoute les n encadrements de la question 2, pour k allant de 1 à n. Les bornes ne dépendent pas de k.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. On ajoute les encadrements de la question 2 pour $k = 1, 2, \ldots, n$. La somme compte n termes, et les bornes ne dépendent pas de k :

$$n \times \frac{2n}{n^2+n} \leq u_n$$

et

$$u_n \leq n \times \frac{2n}{n^2+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned} n \times \frac{2n}{n^2+n} &= \frac{2n^2}{n(n+1)} \\ &= \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{2n^2}{n^2+1}$.

4.

Détermine la limite de (u_n). Montre aussi que $u_n < 2$ pour tout $n \geq 1$: qu'en conclut-on pour la limite, et pourquoi ce n'est pas une contradiction ?

INDICE

Calcule la limite de chaque borne en factorisant par la plus haute puissance de n. Pour la seconde partie, compare $\dfrac{2n^2}{n^2+1}$ à 2, puis relis le passage à la limite dans une inégalité.

CORRIGÉ

Limite. Soit $n \geq 1$. En factorisant par la plus haute puissance de n :

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}},$$
$$\frac{2n^2}{n^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Ces deux suites tendent vers 2. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Inégalité stricte. Pour $n \geq 1$, $n^2 < n^2+1$, donc :

$$u_n \leq \frac{2n^2}{n^2+1} < 2.$$

Pas de contradiction. Le passage à la limite dans l'inégalité stricte $u_n < 2$ donne seulement une inégalité large : la limite est inférieure ou égale à 2. Ici elle vaut exactement 2, ce qui est compatible.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ alors que $u_n < 2$ pour tout $n \geq 1$: une inégalité stricte devient large à la limite.

Exercice 4

Deux moyennes qui encadrent racine de 3

Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$
$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1.

Calcule a_1, b_1, a_2 et b_2.

INDICE

Applique les deux relations avec $n = 0$, puis avec $n = 1$. Pour b_2, garde $a_1 + b_1$ sous forme de fraction.

CORRIGÉ

Rang 1.

$$a_1 = \frac{3 + 1}{2} = 2,$$
$$b_1 = \frac{2 \times 3 \times 1}{3 + 1} = \frac{3}{2}.$$

Rang 2.

$$a_2 = \frac{2 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4},$$
$$b_2 = \frac{2 \times 2 \times \frac{3}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{6}{\frac{7}{2}} = \frac{12}{7}.$$

Conclusion. $a_1 = 2$, $b_1 = \dfrac{3}{2}$, $a_2 = \dfrac{7}{4}$ et $b_2 = \dfrac{12}{7}$.

2.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $a_n b_n = 3$.

INDICE

Une seule propriété $P(n)$ regroupe les trois affirmations. Dans l'hérédité, calcule le produit $a_{n+1}b_{n+1}$: une simplification apparaît.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $a_n b_n = 3$ ».

Initialisation. $a_0 = 3 > 0$, $b_0 = 1 > 0$ et $a_0 b_0 = 3$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $a_n > 0$ et $b_n > 0$, on a $a_n + b_n > 0$. Les deux quotients sont donc définis et strictement positifs : $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$. De plus :

$$\begin{aligned} a_{n+1}b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \times \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \\ &= a_n b_n = 3. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $a_n b_n = 3$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}$. Déduis-en que $a_n \geq b_n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Réduis $a_{n+1} - b_{n+1}$ au dénominateur $2(a_n + b_n)$ et reconnais une identité remarquable. Le rang 0 se traite à part.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $a_n + b_n > 0$, on réduit au dénominateur $2(a_n + b_n)$:

$$\begin{aligned} &a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} \\ &= \frac{a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2}{2(a_n + b_n)} \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}. \end{aligned}$$

Le signe. Un carré est positif et $2(a_n + b_n) > 0$, donc $a_{n+1} - b_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $a_n \geq b_n$ pour tout $n \geq 1$. Au rang 0, $a_0 = 3 \geq 1 = b_0$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $a_n \geq b_n$.

4.

Montre que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante.

INDICE

Calcule $a_{n+1} - a_n$, puis $b_{n+1} - b_n$ sur un dénominateur commun. Le facteur $a_n - b_n$ apparaît dans les deux cas.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La suite (a_n).

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \\ &= \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0, \end{aligned}$$

car $a_n \geq b_n$ (question 3).

La suite (b_n).

$$\begin{aligned} & b_{n+1} - b_n \\ &= \frac{2a_n b_n - b_n(a_n + b_n)}{a_n + b_n} \\ &= \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n} \geq 0, \end{aligned}$$

car $b_n > 0$, $a_n - b_n \geq 0$ et $a_n + b_n > 0$.

Conclusion. La suite (a_n) est décroissante et la suite (b_n) est croissante.

5.

Montre que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$, puis que $0 \leq a_n - b_n \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

INDICE

Écris $\dfrac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} = \dfrac{a_n - b_n}{2} \times \dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$ et majore le second facteur par 1. La seconde inégalité se démontre par récurrence.

CORRIGÉ

Première inégalité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $b_n > 0$, on a $0 \leq a_n - b_n \leq a_n + b_n$, donc $0 \leq \dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \leq 1$.

D'après la question 3 :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n - b_n}{2} \times \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \\ &\leq \frac{a_n - b_n}{2}. \end{aligned}$$

Seconde inégalité. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $0 \leq a_n - b_n \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation. $a_0 - b_0 = 2 = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. D'après la question 3 et l'inégalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &\leq \frac{a_n - b_n}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Avec $a_{n+1} - b_{n+1} \geq 0$ (question 3), $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$ et $0 \leq a_n - b_n \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

6.

Déduis-en que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis que leur limite commune est $\sqrt{3}$. Donne un encadrement de $\sqrt{3}$ par deux fractions.

INDICE

L'écart tend vers 0 par encadrement ; cite ensuite le théorème des suites adjacentes. Pour identifier la limite, passe à la limite dans $a_n b_n = 3$ et fixe le signe de la limite.

CORRIGÉ

Suites adjacentes. Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, la suite $\left(2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ tend vers 0. Par encadrement (question 5), $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$. La suite (b_n) est croissante et (a_n) est décroissante (question 4) : les deux suites sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ, et $b_n \leq \ell \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Identification de la limite. Par produit des limites, $(a_n b_n)$ tend vers ℓ^2. Or $a_n b_n = 3$ pour tout n (question 2), donc $\ell^2 = 3$. De plus $\ell \geq b_0 = 1 > 0$. Donc $\ell = \sqrt{3}$.

Encadrement. Avec $n = 2$ et la question 1 :

$$\frac{12}{7} \leq \sqrt{3} \leq \frac{7}{4}.$$

Conclusion. (a_n) et (b_n) sont adjacentes, de limite commune $\sqrt{3}$, et $\dfrac{12}{7} \leq \sqrt{3} \leq \dfrac{7}{4}$.

Exercice 5

Une suite récurrente selon son premier terme

Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x^3 + 6}{7}$. On étudie les suites (u_n) définies par un premier terme u_0 de $[0, 2]$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1.

Vérifie que, pour tout réel $x \geq 0$, $h(x) - x = \dfrac{(x-1)(x-2)(x+3)}{7}$. Donne le signe de $h(x) - x$ sur $[0, 1]$, puis sur $[1, 2]$.

INDICE

Développe le produit $(x-1)(x-2)$, puis multiplie par $x+3$, et compare avec $7\,(h(x) - x)$. Pour le signe, regarde chaque facteur sur chaque intervalle.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $x \geq 0$. On a $7\,(h(x) - x) = x^3 - 7x + 6$. Par ailleurs $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, puis :

$$\begin{aligned}&(x^2 - 3x + 2)(x + 3)\\ &= x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x\\ &\quad + 2x + 6\\ &= x^3 - 7x + 6.\end{aligned}$$

D'où $h(x) - x = \dfrac{(x-1)(x-2)(x+3)}{7}$.

Le signe. Pour $x \geq 0$, $x + 3 > 0$.

- Sur $[0, 1]$: $x - 1 \leq 0$ et $x - 2 < 0$, donc $h(x) - x \geq 0$.
- Sur $[1, 2]$: $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$, donc $h(x) - x \leq 0$.

Conclusion. $h(x) - x \geq 0$ sur $[0, 1]$ et $h(x) - x \leq 0$ sur $[1, 2]$; l'expression s'annule en 1 et en 2.

2.

Montre que h est croissante sur $[0,+\infty[$, puis que $h([0,1]) \subset [0,1]$ et $h([1,2]) \subset [1,2]$.

INDICE

Calcule $h'(x)$. Ensuite, une fonction continue et croissante envoie un segment sur le segment de ses valeurs aux bornes : calcule $h(0)$, $h(1)$ et $h(2)$.

CORRIGÉ

Variations. La fonction h est un polynôme, et :

$$\forall x \geq 0, \quad h'(x) = \frac{3x^2}{7}.$$

Pour $x > 0$, $h'(x) > 0$, et h' ne s'annule qu'en 0 : h est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Images des segments. h est continue et strictement croissante sur chacun des segments $[0,1]$ et $[1,2]$, avec $h(0) = \frac{6}{7}$, $h(1) = 1$ et $h(2) = 2$. Donc :

$$h([0,1]) = \left[\frac{6}{7}, 1\right] \subset [0,1],$$

$$h([1,2]) = [1,2].$$

Conclusion. h est croissante sur $[0,+\infty[$, $h([0,1]) \subset [0,1]$ et $h([1,2]) \subset [1,2]$.

3.

Dans cette question, $u_0 = 0$. Montre que (u_n) est croissante et majorée par 1, puis qu'elle converge vers 1.

INDICE

L'intervalle stable $[0, 1]$ contient u_0 : tous les termes y restent. La monotonie vient alors du signe de $h(x) - x$ sur $[0, 1]$. Pour la limite, vérifie les hypothèses de la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente.

CORRIGÉ

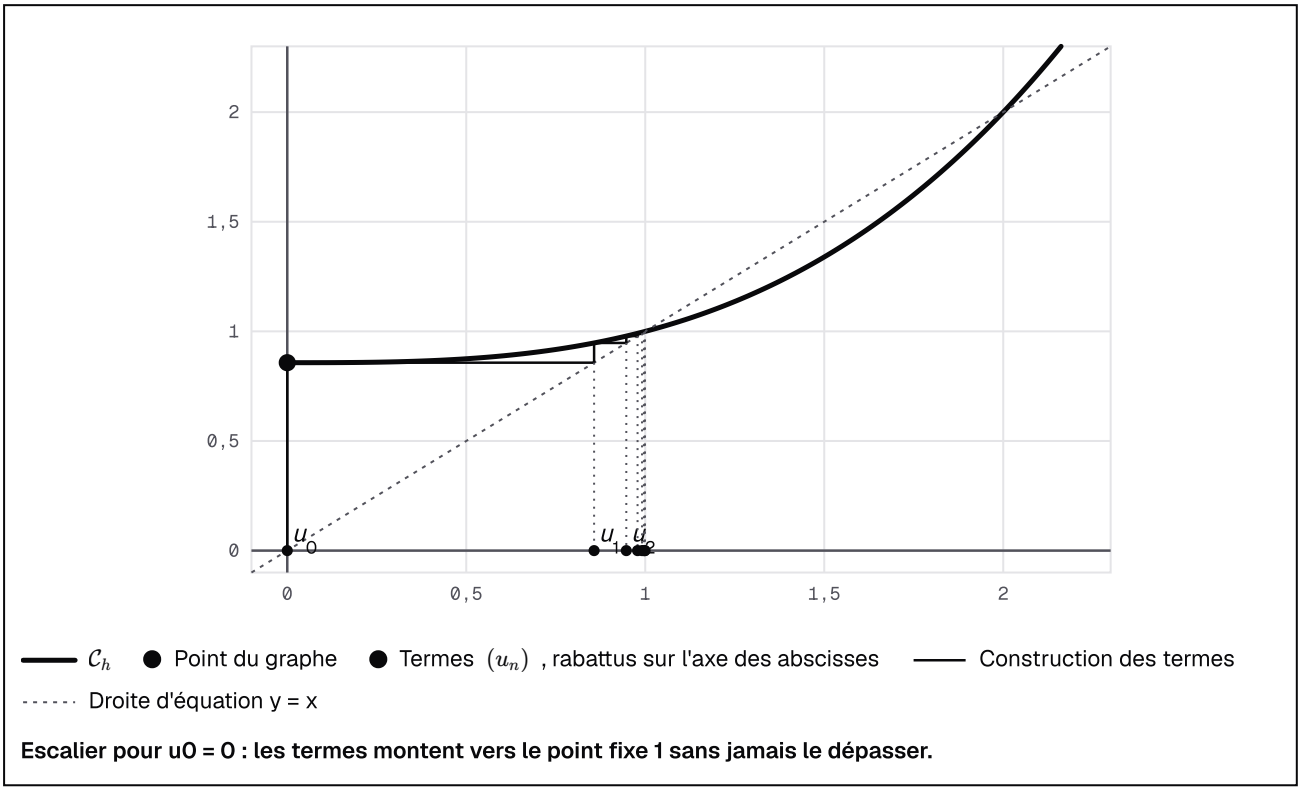
Majoration. L'intervalle $[0, 1]$ est stable par h et $u_0 = 0 \in [0, 1]$. D'après la propriété de l'intervalle stable, $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est majorée par 1.

Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in [0, 1]$, la question 1 donne $u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est croissante.

Limite. Croissante et majorée, elle converge vers un réel ℓ. Par passage à la limite dans $0 \leq u_n \leq 1$, $\ell \in [0, 1]$. La fonction h est continue sur $[0, 1]$, cet intervalle est stable par h et contient u_0 : d'après la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente, $h(\ell) = \ell$.

D'après la question 1, les solutions de $h(x) = x$ dans $[0, +\infty[$ sont 1 et 2. La seule dans $[0, 1]$ est 1.

Conclusion. (u_n) est croissante, majorée par 1, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.



Escalier pour u0 = 0 : les termes montent vers le point fixe 1 sans jamais le dépasser.

4.

Dans cette question, $u_0 = \dfrac{3}{2}$. Calcule u_1, étudie la monotonie de (u_n) et détermine sa limite.

INDICE

Travaille cette fois dans l'intervalle stable $[1, 2]$. Pour départager les points fixes, sers-toi de la majoration $u_n \leq u_0$.

CORRIGÉ

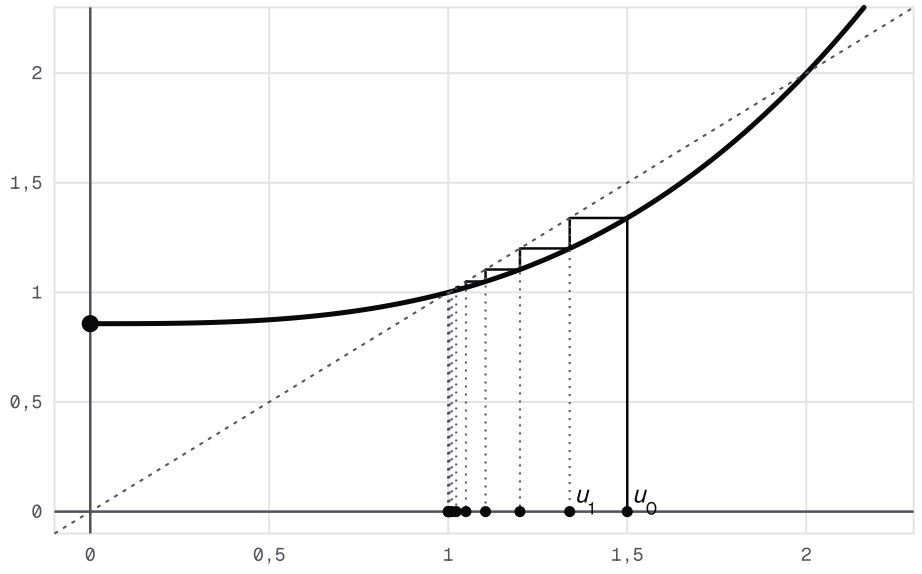
Premier terme.

$$u_1 = h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{27}{8} + 6}{7} = \frac{75}{56}.$$

Monotonie. L'intervalle $[1, 2]$ est stable par h et $u_0 = \dfrac{3}{2} \in [1, 2]$. D'après la propriété de l'intervalle stable, $u_n \in [1, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n \leq 0$ (question 1) : la suite est décroissante, et minorée par 1.

Limite. Décroissante et minorée, elle converge vers un réel ℓ. Pour tout n, $1 \leq u_n \leq u_0 = \dfrac{3}{2}$; par passage à la limite, $1 \leq \ell \leq \dfrac{3}{2}$. La fonction h est continue sur $[1, 2]$, cet intervalle est stable par h et contient ℓ : d'après la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente, $h(\ell) = \ell$. Parmi 1 et 2, seul 1 appartient à $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.

Conclusion. $u_1 = \dfrac{75}{56}$, la suite (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.



Escalier pour u0 = 3/2 : les termes descendent vers le point fixe 1, en restant au-dessus de lui.

5.

Que devient la suite (u_n) lorsque $u_0 = 2$? Et lorsque $u_0 = 1$?

INDICE

Calcule $h(2)$ et $h(1)$, puis cherche ce que devient un terme égal à un point fixe.

CORRIGÉ

Cas $u_0 = 2$. On a $h(2) = \dfrac{8+6}{7} = 2$. La propriété « $u_n = 2$ » est vraie au rang 0, et elle est héréditaire : si $u_n = 2$, alors $u_{n+1} = h(2) = 2$. Donc $u_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est constante, de limite 2.

Cas $u_0 = 1$. De même, $h(1) = 1$: la suite est constante, égale à 1.

Bilan. Les raisonnements des questions 3 et 4 restent valables pour tout u_0 de $[0, 1]$, puis de $]1, 2[$: la limite vaut alors 1.

Conclusion. Pour $u_0 = 2$, la suite est constante égale à 2 ; pour $u_0 = 1$, elle est constante égale à 1. Seul le premier terme $u_0 = 2$ donne la limite 2.

Exercice 6

Une suite définie par une équation

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n + 3x - 2$.

1.

Soit $n \geq 1$. Montre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0,1]$, notée x_n, et que $0 < x_n < 1$.

INDICE

Montre que f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, comme somme de deux fonctions. Calcule ensuite $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

CORRIGÉ

Monotonie. La fonction f_n est un polynôme, donc continue sur $[0,1]$. Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto 3x - 2$ sont croissantes sur $[0,1]$, la seconde strictement. Leur somme f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

Existence et unicité. Continue et strictement croissante, f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur :

$$[f_n(0), f_n(1)] = [-2, 2].$$

Ce segment contient 0 : l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n dans $[0,1]$.

Position de x_n. Comme $f_n(0) = -2 \neq 0$ et $f_n(1) = 2 \neq 0$, on a $x_n \neq 0$ et $x_n \neq 1$.

Conclusion. L'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0,1]$, et $0 < x_n < 1$.

2.

Calcule x_1 et x_2.

INDICE

Pour $n = 1$, l'équation est du premier degré. Pour $n = 2$, c'est un trinôme : garde la racine qui appartient à $[0,1]$.

CORRIGÉ

Pour $n = 1$. L'équation $x + 3x - 2 = 0$ donne $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

Pour $n = 2$. L'équation s'écrit $x^2 + 3x - 2 = 0$. Le discriminant vaut $9 + 8 = 17$; les racines sont :

$$\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < 0,$$
$$\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Comme $4 < \sqrt{17} < 5$, la seconde appartient à $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, donc à $[0,1]$.

Conclusion. $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.

3.

Montre que, pour tout entier $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n - 1)$. Déduis-en que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

INDICE

Dans $f_{n+1}(x_n)$, remplace $3x_n - 2$ par sa valeur tirée de $f_n(x_n) = 0$. Ensuite, compare $f_{n+1}(x_n)$ à $f_{n+1}(x_{n+1})$.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $n \geq 1$. Comme $f_n(x_n) = 0$, on a $3x_n - 2 = -x_n^n$. Donc :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1} + 3x_n - 2 \\ &= x_n^{n+1} - x_n^n \\ &= x_n^n(x_n - 1). \end{aligned}$$

Comparaison. Comme $0 < x_n < 1$, $x_n^n > 0$ et $x_n - 1 < 0$:

$$f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

La fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0, 1]$, qui contient x_n et x_{n+1}. Si l'on avait $x_n \geq x_{n+1}$, on aurait $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$, ce qui est faux. Donc $x_n < x_{n+1}$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n - 1)$, et la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

4.

Montre que, pour tout entier $n \geq 1$, $x_n < \dfrac{2}{3}$. Déduis-en que la suite (x_n) converge.

INDICE

Isole x_n dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$. Le signe de x_n^n fait le reste.

CORRIGÉ

Majoration. Soit $n \geq 1$. De $f_n(x_n) = 0$, on tire :

$$x_n = \frac{2 - x_n^n}{3}.$$

Comme $x_n > 0$, $x_n^n > 0$, donc $x_n < \dfrac{2}{3}$.

Convergence. La suite (x_n) est croissante (question 3) et majorée par $\dfrac{2}{3}$. Toute suite croissante et majorée converge.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $x_n < \dfrac{2}{3}$, et la suite (x_n) converge.

5.

Montre que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 < \frac{2}{3} - x_n \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Déduis-en la limite de (x_n).

INDICE

Écris $\frac{2}{3} - x_n$ à l'aide de x_n^n, avec l'égalité de la question 4. Puis majore x_n^n grâce à $0 < x_n < \frac{2}{3}$.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $n \geq 1$. D'après la question 4, $\frac{2}{3} - x_n = \frac{x_n^n}{3}$. Comme $0 < x_n < \frac{2}{3}$ et que $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$, on a $0 < x_n^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. D'où :

$$0 < \frac{2}{3} - x_n \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Limite. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, le majorant tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement, $\left(\frac{2}{3} - x_n\right)$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 7

Croissante, mais sans limite finie

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}.$$

1.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.

INDICE

La propriété à transmettre est « u_n existe et $u_n \geq 1$ ». Dans l'hérédité, $u_n \neq 0$ rend le quotient possible.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « u_n est défini et $u_n \geq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $u_n \geq 1$, $u_n \neq 0$: le terme u_{n+1} est défini. De plus $\dfrac{1}{u_n^2} > 0$, donc $u_{n+1} > u_n \geq 1$. $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, u_n est défini et $u_n \geq 1$.

2.

Montre que la suite (u_n) est strictement croissante.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$: il reste un seul terme.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, $u_n \neq 0$ et :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2} > 0.$$

Conclusion. La suite (u_n) est strictement croissante.

3.

Suppose, par l'absurde, que (u_n) converge vers un réel ℓ. Montre que $\ell \geq 1$, puis obtiens une contradiction en utilisant la fonction p définie sur $[1, +\infty[$ par $p(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$.

INDICE

Passe à la limite dans $u_n \geq 1$. Ensuite, calcule de deux façons la limite de (u_{n+1}) : directement, et comme $(p(u_n))$ avec la continuité de p.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers un réel ℓ.

Situer ℓ. Pour tout n, $u_n \geq 1$. Par passage à la limite dans cette inégalité large, $\ell \geq 1$.

Deux limites pour (u_{n+1}). Pour tout n, $u_{n+1} = p(u_n)$ et $u_n \in [1, +\infty[$. La fonction p est rationnelle et définie sur $[1, +\infty[$, donc continue en ℓ, qui appartient à cet intervalle. D'après le théorème sur la limite de $(f(u_n))$, (u_{n+1}) tend vers $p(\ell)$. Mais (u_{n+1}) tend aussi vers ℓ.

Contradiction. Par unicité de la limite, $p(\ell) = \ell$, soit $\dfrac{1}{\ell^2} = 0$. C'est impossible : un quotient de numérateur 1 ne s'annule jamais.

Conclusion. La suite (u_n) ne converge pas.

4.

Déduis-en $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

INDICE

Si la suite était majorée, quel critère s'appliquerait ? Combine ce critère avec la question 3, puis cite le résultat sur les suites croissantes non majorées.

CORRIGÉ

La suite (u_n) est croissante (question 2). Si elle était majorée, elle serait convergente, comme toute suite croissante et majorée, ce qui contredit la question 3. Donc (u_n) n'est pas majorée.

Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 8

Majorer l'écart à la limite

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}$, et (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n).$$

1.

Montre que, pour tout réel $x\geq 1$, $f(x)=2+\dfrac{4}{x+1}$. Déduis-en que $f([1,+\infty[)\subset[1,+\infty[$, puis que u_n est défini et $u_n\geq 1$ pour tout entier naturel n. Calcule u_1 et u_2.

INDICE

Réduis $2+\dfrac{4}{x+1}$ au même dénominateur. Pour $x\geq 1$, encadre $\dfrac{4}{x+1}$; la propriété de l'intervalle stable donne ensuite les termes.

CORRIGÉ

Autre écriture de f. Soit $x\geq 1$:

$$\begin{aligned}2+\frac{4}{x+1}&=\frac{2x+2+4}{x+1}\\&=f(x).\end{aligned}$$

Intervalle stable. Pour $x\geq 1$, $x+1\geq 2$, donc $0<\dfrac{4}{x+1}\leq 2$ et $2<f(x)\leq 4$. Ainsi :

$$f([1,+\infty[)\subset\,]2,4]\subset[1,+\infty[\,.$$

Termes de la suite. L'intervalle $[1,+\infty[$ est stable par f et contient $u_0=1$. D'après la propriété de l'intervalle stable, la suite (u_n) est bien définie et $u_n\geq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Premiers termes. $u_1=f(1)=\dfrac{8}{2}=4$ et $u_2=f(4)=\dfrac{14}{5}$.

Conclusion. $f([1,+\infty[)\subset[1,+\infty[$, tous les termes sont définis et supérieurs ou égaux à 1, $u_1=4$ et $u_2=\dfrac{14}{5}$.

2.

Montre que, pour tout réel $x \geq 1$, $|f(x) - 3| = \dfrac{|x-3|}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}|x-3|$.

INDICE

Calcule $f(x) - 3$ sur le dénominateur $x+1$. Pour la majoration, minore $x+1$ quand $x \geq 1$.

CORRIGÉ

Calcul de l'écart. Soit $x \geq 1$. Comme $2x + 6 - 3(x+1) = 3 - x$:

$$f(x) - 3 = \frac{3-x}{x+1}.$$

Comme $x + 1 > 0$:

$$|f(x) - 3| = \frac{|x-3|}{x+1}.$$

Majoration. Or $x + 1 \geq 2$, donc $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 1$, $|f(x) - 3| = \dfrac{|x-3|}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}|x-3|$.

3.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $|u_n - 3| \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Déduis-en la limite de (u_n).

INDICE

L'hérédité applique la question 2 avec $x = u_n$, ce qui est permis grâce à la question 1. Pour la limite, pense à la majoration de l'écart par une suite qui tend vers 0.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $|u_n - 3| \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation. $|u_0 - 3| = 2 = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a $u_n \geq 1$ (question 1) ; la question 2 avec $x = u_n$ donne :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 3| &= |f(u_n) - 3| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - 3| \\ &\leq \frac{1}{2} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 3| \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Limite. Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, le majorant tend vers 0. D'après le théorème de convergence par majoration de l'écart, (u_n) tend vers 3.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

4.

Détermine un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, $|u_n - 3| \leq 10^{-3}$.

INDICE

Il suffit que le majorant de la question 3 soit inférieur ou égal à 10^{-3}. Réécris cette condition avec une puissance de 2, puis encadre 1000 entre deux puissances de 2.

CORRIGÉ

D'après la question 3, il suffit que $2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $2^{n-1} \geq 1000$.

On a $2^9 = 512 < 1000$ et $2^{10} = 1024 \geq 1000$. Pour $n \geq 11$, $2^{n-1} \geq 2^{10} \geq 1000$.

Conclusion. $N = 11$ convient : pour tout $n \geq 11$, $|u_n - 3| \leq 10^{-3}$.