BURHAN

Suites numériques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	10

Exercice 1

Encadrer les termes par récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4}.$$

1.

Calcule u_1 et u_2.

INDICE

Remplace n par 0 dans la relation de récurrence, puis par 1. Garde des fractions exactes.

2.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

INDICE

Écris la propriété $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ ». Dans l'hérédité, encadre d'abord u_n^2 : la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4}$. Déduis-en le sens de variation de (u_n).

INDICE

Mets $u_{n+1} - u_n$ sur le dénominateur 4, puis développe $(u_n - 1)(u_n - 3)$ pour comparer. Pour le signe, regarde chaque facteur grâce à la question 2.

Exercice 2

Une puissance de 2 contre un carré

1.

Montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

INDICE

L'initialisation se fait au rang 4. Pour l'hérédité, multiplie $2^n \geq n^2$ par 2 : il reste à comparer $2n^2$ et $(n+1)^2$, c'est-à-dire n^2 et $2n+1$.

2.

Déduis-en $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n}{n}$.

INDICE

Divise l'inégalité de la question 1 par n, qui est strictement positif. Tu obtiens une minoration par une suite de référence.

3.

Déduis-en aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

INDICE

Passe à l'inverse dans l'inégalité de la question 2 : les deux membres sont strictement positifs. Tu obtiens un encadrement entre 0 et une suite de référence.

Exercice 3

Deux sommes, et le compte des termes

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n = 7 - 3n$, et $(b_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $b_n = 5 \times (-2)^n$.

1.

Montre que (a_n) est arithmétique et que (b_n) est géométrique. Précise leurs raisons.

INDICE

Calcule $a_{n+1} - a_n$ pour tout n : si le résultat ne dépend pas de n, c'est la raison. Pour (b_n), exprime b_{n+1} à l'aide de b_n.

2.

Calcule $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{20}$.

INDICE

Compte d'abord les termes de la somme : de l'indice 0 à l'indice 20. Calcule ensuite le premier et le dernier terme.

3.

Calcule $T = b_2 + b_3 + \cdots + b_9$.

INDICE

Compte les termes de b_2 à b_9 : attention au « $+1$ ». Le premier terme de la somme est b_2, pas b_0.

4.

Exprime $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ en fonction de l'entier naturel n, puis vérifie ta formule avec la question 2.

INDICE

La méthode est celle de la question 2 : nombre de termes, premier terme, dernier terme. Le dernier terme est a_n.

Exercice 4

Trois limites par les opérations

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$a_n = \frac{1 - 2n^3}{n^3 + 4n},$$
$$b_n = n - 3\sqrt{n},$$
$$c_n = \frac{2n + 1}{n\sqrt{n}}.$$

1.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

INDICE

Les opérations donnent une forme « $\frac{-\infty}{+\infty}$ ». Mets en facteur le terme de plus haut degré, n^3, en haut et en bas.

2.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

INDICE

La forme obtenue est « $(+\infty) - (+\infty)$ ». Écris $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$ et mets $\sqrt{n}$ en facteur.

3.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$.

INDICE

Écris $n\sqrt{n}$ comme une puissance de n, puis sépare la fraction en deux.

Exercice 5

Puissances : converger, diverger, ou ni l'un ni l'autre

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \frac{3^{n+1} - 4^n}{2 \times 4^n + 3^n},$$

$$v_n = 1 - \left(\frac{7}{5}\right)^n,$$

$$w_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

1.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

INDICE

La puissance qui domine est 4^n. Divise le numérateur et le dénominateur par 4^n, puis fais apparaître $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

INDICE

Compare la raison $\frac{7}{5}$ à 1, puis applique la règle correspondante pour (q^n).

3.

La suite (w_n) est-elle convergente ? A-t-elle une limite ? Justifie.

INDICE

Situe $-\frac{3}{2}$ par rapport à -1. Pour comprendre, regarde séparément les termes de rang pair et ceux de rang impair.

Exercice 6

Une suite définie par une fonction de n

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x+5}$, et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.

1.

Étudie les variations de f sur $[0, +\infty[$. Déduis-en le sens de variation de (u_n).

INDICE

Calcule $f'(x)$ avec la formule de dérivation d'un quotient. Le dénominateur de $f'(x)$ est un carré : seul le numérateur décide du signe.

2.

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis déduis-en la limite de (u_n).

INDICE

Factorise par x en haut et en bas. Puis rappelle-toi le lien entre la limite de f en $+\infty$ et celle de $(f(n))$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, $-\dfrac{3}{5} \leq u_n < 2$.

INDICE

Pour la minoration, sers-toi du sens de variation et du premier terme. Pour la majoration, calcule $f(x) - 2$ sur un dénominateur commun.

Exercice 7

Encadrer ou minorer pour conclure

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{5n - (-1)^n}{n+3}$ et $z_n = n + 5 \times (-1)^n$.

1.

Montre que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{5n-1}{n+3} \leq v_n \leq \dfrac{5n+1}{n+3}$.

INDICE

Pars de l'encadrement $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Multiplie-le par -1 : le sens des inégalités change.

2.

Déduis-en la limite de (v_n). Nomme le théorème utilisé.

INDICE

Calcule séparément la limite de chacune des deux suites qui encadrent (v_n), en factorisant par n.

3.

Montre que la suite (z_n) tend vers $+\infty$.

INDICE

Ici, un encadrement complet n'est pas utile : une minoration de z_n par une suite qui tend vers $+\infty$ suffit.

Exercice 8

Croissante et majorée

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k + 1}.$$

Ainsi $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^n + 1}$.

1.

Montre que la suite (s_n) est strictement croissante.

INDICE

Écris s_{n+1} à l'aide de s_n : un seul terme s'ajoute.

2.

Montre que, pour tout entier naturel n, $s_n \leq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

INDICE

Compare chaque terme $\frac{1}{2^k + 1}$ à $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Il restera la somme de $n + 1$ termes d'une suite géométrique.

3.

Déduis-en que (s_n) converge, et que sa limite ℓ vérifie $\frac{5}{6} \leq \ell \leq 2$.

INDICE

D'abord, tire de la question 2 un majorant indépendant de n, puis cite le critère pour une suite croissante. Pour situer ℓ, passe à la limite dans des inégalités larges.

Exercice 9

L'image d'une suite par une fonction continue

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{6n-1}{2n+5}$. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$.

1.

Montre que tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à $]-1,+\infty[$.

INDICE

Montrer que $u_n > -1$ revient à étudier le signe de $u_n + 1$. Mets-le sur un seul dénominateur.

2.

Calcule la limite de la suite (u_n).

INDICE

C'est un quotient de deux expressions du premier degré en n : factorise par n.

3.

Déduis-en la limite de la suite $(f(u_n))$. Vérifie chaque hypothèse du théorème utilisé.

INDICE

Le théorème sur la limite de $(f(u_n))$ demande trois choses : les termes dans l'intervalle de f, une limite ℓ dans cet intervalle, et la continuité de f en ℓ.

Exercice 10

Un intervalle stable

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.

Calcule u_1.

INDICE

Calcule u_0^2 sous forme de fraction, puis remplace dans l'expression de f.

2.

Montre que f est croissante sur $[0, +\infty[$, puis que $f\left(\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

INDICE

Calcule $f'(x)$ et étudie son signe. Une fonction continue et croissante envoie un segment sur le segment de ses valeurs aux bornes : compare ensuite $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ à $\dfrac{3}{2}$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

INDICE

Raisonne par récurrence sur la propriété « $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ ». L'hérédité utilise directement la question 2.

4.

On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ. Montre que $\ell = 2$.

INDICE

Situe d'abord ℓ grâce à la question 3 et au passage à la limite. Ensuite, vérifie les hypothèses de la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente avant d'écrire $f(\ell) = \ell$.