BURHAN

Suites numériques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	10

Exercice 1

Encadrer les termes par récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4}.$$

1.

Calcule u_1 et u_2.

INDICE

Remplace n par 0 dans la relation de récurrence, puis par 1. Garde des fractions exactes.

CORRIGÉ

Calcul de u_1. Avec $n = 0$:

$$u_1 = \frac{0^2 + 3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Calcul de u_2. Avec $n = 1$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1^2 + 3}{4} \\ &= \frac{\frac{9}{16} + 3}{4} \\ &= \frac{57}{64}. \end{aligned}$$

Conclusion. $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{57}{64}$.

2.

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

INDICE

Écris la propriété $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ ». Dans l'hérédité, encadre d'abord u_n^2 : la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 1$. La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$, donc $0 \leq u_n^2 \leq 1$. On ajoute 3, puis on divise par $4 > 0$:

$$\frac{3}{4} \leq \frac{u_n^2 + 3}{4} \leq 1,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{3}{4} \leq u_{n+1} \leq 1.$$

A fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq 1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire. Donc, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4}$. Déduis-en le sens de variation de (u_n).

INDICE

Mets $u_{n+1} - u_n$ sur le dénominateur 4, puis développe $(u_n - 1)(u_n - 3)$ pour comparer. Pour le signe, regarde chaque facteur grâce à la question 2.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2 + 3}{4} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{4}. \end{aligned}$$

D'autre part, en développant :

$$\begin{aligned} &(u_n - 1)(u_n - 3) \\ &= u_n^2 - 4u_n + 3. \end{aligned}$$

D'où l'égalité demandée.

Le signe. D'après la question 2, $u_n \leq 1$. Donc $u_n - 1 \leq 0$ et $u_n - 3 \leq -2 < 0$. Le produit de deux réels négatifs est positif : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4} \geq 0$: la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2

Une puissance de 2 contre un carré

1.

Montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

INDICE

L'initialisation se fait au rang 4. Pour l'hérédité, multiplie $2^n \geq n^2$ par 2 : il reste à comparer $2n^2$ et $(n+1)^2$, c'est-à-dire n^2 et $2n+1$.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 4$, notons $P(n)$ la propriété « $2^n \geq n^2$ ».

Initialisation. $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$: $P(4)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 4$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. En multipliant $2^n \geq n^2$ par $2 > 0$:

$$2^{n+1} \geq 2n^2 = n^2 + n^2.$$

Comme $n \geq 3$, on a $n^2 \geq 3n = 2n + n \geq 2n + 1$. Donc :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &\geq n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(4)$ est vraie et la propriété est héréditaire à partir du rang 4. Donc $2^n \geq n^2$ pour tout entier $n \geq 4$.

2.

Déduis-en $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n}{n}$.

INDICE

Divise l'inégalité de la question 1 par n, qui est strictement positif. Tu obtiens une minoration par une suite de référence.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 4$. En divisant $2^n \geq n^2$ par $n > 0$:

$$\frac{2^n}{n} \geq n.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. D'après le théorème de comparaison pour une limite infinie, la suite minorée par (n) tend aussi vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n}{n} = +\infty$.

3.

Déduis-en aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

INDICE

Passe à l'inverse dans l'inégalité de la question 2 : les deux membres sont strictement positifs. Tu obtiens un encadrement entre 0 et une suite de référence.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 4$. D'après la question 2, $\dfrac{2^n}{n} \geq n > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc :

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Les suites (0) et $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ont pour limite 0. On applique le théorème d'encadrement.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Exercice 3

Deux sommes, et le compte des termes

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n = 7 - 3n$, et $(b_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $b_n = 5 \times (-2)^n$.

1.

Montre que (a_n) est arithmétique et que (b_n) est géométrique. Précise leurs raisons.

INDICE

Calcule $a_{n+1} - a_n$ pour tout n : si le résultat ne dépend pas de n, c'est la raison. Pour (b_n), exprime b_{n+1} à l'aide de b_n.

CORRIGÉ

La suite (a_n). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_{n+1} = 7 - 3(n+1) = 4 - 3n$, donc :

$$\begin{aligned} & a_{n+1} - a_n \\ &= (4 - 3n) - (7 - 3n) \\ &= -3. \end{aligned}$$

La différence ne dépend pas de n.

La suite (b_n). Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 5 \times (-2)^{n+1} \\ &= -2 \times 5 \times (-2)^n \\ &= -2\, b_n. \end{aligned}$$

Conclusion. (a_n) est arithmétique de raison -3 et (b_n) est géométrique de raison -2.

2.

Calcule $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{20}$.

INDICE

Compte d'abord les termes de la somme : de l'indice 0 à l'indice 20. Calcule ensuite le premier et le dernier terme.

CORRIGÉ

De a_0 à a_{20}, il y a $20 - 0 + 1 = 21$ termes. Le premier vaut $a_0 = 7$ et le dernier $a_{20} = 7 - 60 = -53$.

La suite est arithmétique : la somme vaut le nombre de termes multiplié par la demi-somme des termes extrêmes.

$$\begin{aligned} S &= 21 \times \frac{7 + (-53)}{2} \\ &= 21 \times (-23) \\ &= -483. \end{aligned}$$

Conclusion. $S = -483$.

3.

Calcule $T = b_2 + b_3 + \cdots + b_9$.

INDICE

Compte les termes de b_2 à b_9 : attention au « $+1$ ». Le premier terme de la somme est b_2, pas b_0.

CORRIGÉ

De b_2 à b_9, il y a $9 - 2 + 1 = 8$ termes. Le premier est $b_2 = 5 \times 4 = 20$ et la raison vaut $-2 \neq 1$. Donc :

$$\begin{aligned} T &= 20 \times \frac{1 - (-2)^8}{1 - (-2)} \\ &= 20 \times \frac{1 - 256}{3} \\ &= 20 \times (-85) \\ &= -1700. \end{aligned}$$

Conclusion. $T = -1700$.

4.

Exprime $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ en fonction de l'entier naturel n, puis vérifie ta formule avec la question 2.

INDICE

La méthode est celle de la question 2 : nombre de termes, premier terme, dernier terme. Le dernier terme est a_n.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. De a_0 à a_n, il y a $n + 1$ termes ; le premier vaut 7 et le dernier $7 - 3n$. Donc :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= (n+1) \times \frac{7 + 7 - 3n}{2} \\ &= \frac{(n+1)(14 - 3n)}{2}. \end{aligned}$$

Vérification. Avec $n = 20$:

$$\frac{21 \times (-46)}{2} = -483.$$

On retrouve la valeur de la question 2.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \dfrac{(n+1)(14 - 3n)}{2}$.

Exercice 4

Trois limites par les opérations

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$a_n = \frac{1 - 2n^3}{n^3 + 4n},$$
$$b_n = n - 3\sqrt{n},$$
$$c_n = \frac{2n + 1}{n\sqrt{n}}.$$

1.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

INDICE

Les opérations donnent une forme « $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ ». Mets en facteur le terme de plus haut degré, n^3, en haut et en bas.

CORRIGÉ

Le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée.

Factorisation. Soit $n \geq 1$. On met n^3 en facteur en haut et en bas :

$$a_n = \frac{n^3\left(\frac{1}{n^3} - 2\right)}{n^3\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{\frac{1}{n^3} - 2}{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

Passage à la limite. Les suites $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ tendent vers 0. Par opérations sur les limites, la limite vaut $\dfrac{0 - 2}{1 + 0}$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -2$.

2.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

INDICE

La forme obtenue est « $(+\infty) - (+\infty)$ ». Écris $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$ et mets $\sqrt{n}$ en facteur.

CORRIGÉ

Les suites (n) et $(3\sqrt{n})$ tendent toutes deux vers $+\infty$: la différence est une forme indéterminée.

Soit $n \geq 1$. Comme $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$:

$$b_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - 3\right).$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc $\sqrt{n} - 3$ tend aussi vers $+\infty$. Par produit de deux limites infinies positives, (b_n) tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$.

3.

Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

INDICE

Écris $n\sqrt{n}$ comme une puissance de n, puis sépare la fraction en deux.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. On a $n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$ et $\dfrac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Donc :

$$c_n = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Les exposants $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$ sont des rationnels strictement positifs. D'après les limites des suites de référence, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ tendent vers 0. On conclut par somme.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

Exercice 5

Puissances : converger, diverger, ou ni l'un ni l'autre

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \frac{3^{n+1} - 4^n}{2 \times 4^n + 3^n},$$

$$v_n = 1 - \left(\frac{7}{5}\right)^n,$$

$$w_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

1.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

INDICE

La puissance qui domine est 4^n. Divise le numérateur et le dénominateur par 4^n, puis fais apparaître $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

CORRIGÉ

Mise en facteur de la puissance dominante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On divise le numérateur et le dénominateur par $4^n > 0$:

$$u_n = \frac{3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{2 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Passage à la limite. Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, la suite $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ tend vers 0. Le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers 2 ; on conclut par quotient.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.

2.

Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

INDICE

Compare la raison $\frac{7}{5}$ à 1, puis applique la règle correspondante pour (q^n).

CORRIGÉ

On a $\frac{7}{5} > 1$, donc la suite $\left(\left(\frac{7}{5}\right)^n\right)$ tend vers $+\infty$. Par somme avec la constante 1, (v_n) tend vers $-\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

3.

La suite (w_n) est-elle convergente ? A-t-elle une limite ? Justifie.

INDICE

Situe $-\dfrac{3}{2}$ par rapport à -1. Pour comprendre, regarde séparément les termes de rang pair et ceux de rang impair.

CORRIGÉ

On a $-\dfrac{3}{2} \leq -1$. D'après le théorème sur la limite de (q^n), la suite (w_n) n'a pas de limite, ni finie ni infinie.

Lecture sur les rangs. Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$w_{2p} = \left(\frac{9}{4}\right)^p,$$

$$w_{2p+1} = -\frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^p.$$

Comme $\dfrac{9}{4} > 1$, les termes de rang pair tendent vers $+\infty$ et ceux de rang impair vers $-\infty$.

Conclusion. La suite (w_n) n'est pas convergente : elle diverge et n'a aucune limite.

Exercice 6

Une suite définie par une fonction de n

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x+5}$, et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.

1.

Étudie les variations de f sur $[0, +\infty[$. Déduis-en le sens de variation de (u_n).

INDICE

Calcule $f'(x)$ avec la formule de dérivation d'un quotient. Le dénominateur de $f'(x)$ est un carré : seul le numérateur décide du signe.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est rationnelle et son dénominateur vérifie $2x+5>0$ sur $[0,+\infty[$: f est dérivable sur cet intervalle. Soit $x \geq 0$. D'après la dérivée d'un quotient, le numérateur de $f'(x)$ vaut :

$$4(2x+5) - 2(4x-3) = 26.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{26}{(2x+5)^2}.$$

Variations. Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < n+1$ donne $f(n) < f(n+1)$, soit $u_n < u_{n+1}$: la suite (u_n) est strictement croissante.

2.

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis déduis-en la limite de (u_n).

INDICE

Factorise par x en haut et en bas. Puis rappelle-toi le lien entre la limite de f en $+\infty$ et celle de $(f(n))$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. En mettant x en facteur en haut et en bas :

$$f(x) = \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{4}{2} = 2$.

La suite est de la forme $u_n = f(n)$ et f tend vers 2 en $+\infty$: (u_n) a la même limite.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, $-\dfrac{3}{5} \leq u_n < 2$.

INDICE

Pour la minoration, sers-toi du sens de variation et du premier terme. Pour la majoration, calcule $f(x) - 2$ sur un dénominateur commun.

CORRIGÉ

Minoration. D'après la question 1, (u_n) est croissante. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geq u_0 = f(0) = -\frac{3}{5}.$$

Majoration. Soit $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{4x-3}{2x+5} - 2 \\ &= \frac{-13}{2x+5} < 0, \end{aligned}$$

car $4x - 3 - 2(2x+5) = -13$.

Avec $x = n$, on obtient $u_n < 2$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $-\dfrac{3}{5} \leq u_n < 2$.

Exercice 7

Encadrer ou minorer pour conclure

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{5n-(-1)^n}{n+3}$ et $z_n = n + 5 \times (-1)^n$.

1.

Montre que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{5n-1}{n+3} \leq v_n \leq \dfrac{5n+1}{n+3}$.

INDICE

Pars de l'encadrement $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Multiplie-le par -1 : le sens des inégalités change.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $-1 \leq -(-1)^n \leq 1$. En ajoutant $5n$:

$$5n - 1 \leq 5n - (-1)^n$$

et

$$5n - (-1)^n \leq 5n + 1.$$

On divise par $n+3 > 0$: le sens des inégalités est conservé.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{5n-1}{n+3} \leq v_n \leq \dfrac{5n+1}{n+3}$.

2.

Déduis-en la limite de (v_n). Nomme le théorème utilisé.

INDICE

Calcule séparément la limite de chacune des deux suites qui encadrent (v_n), en factorisant par n.

CORRIGÉ

Limites des suites qui encadrent. Soit $n \geq 1$. En mettant n en facteur :

$$\frac{5n-1}{n+3} = \frac{5-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}},$$

qui tend vers 5. De même, $\dfrac{5n+1}{n+3}$ tend vers 5.

Encadrement. La suite (v_n) est encadrée par deux suites de même limite 5. On applique le théorème d'encadrement.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 5$.

3.

Montre que la suite (z_n) tend vers $+\infty$.

INDICE

Ici, un encadrement complet n'est pas utile : une minoration de z_n par une suite qui tend vers $+\infty$ suffit.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(-1)^n \geq -1$, on a $5 \times (-1)^n \geq -5$, donc :

$$z_n \geq n - 5.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n - 5) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison pour une limite infinie, (z_n) tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = +\infty$.

Exercice 8

Croissante et majorée

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k + 1}.$$

Ainsi $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^n + 1}$.

1.

Montre que la suite (s_n) est strictement croissante.

INDICE

Écris s_{n+1} à l'aide de s_n : un seul terme s'ajoute.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. La somme s_{n+1} compte un terme de plus que s_n :

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{2^{n+1} + 1}.$$

Donc :

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2^{n+1} + 1} > 0.$$

Conclusion. La suite (s_n) est strictement croissante.

2.

Montre que, pour tout entier naturel n, $s_n \leq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

INDICE

Compare chaque terme $\frac{1}{2^k+1}$ à $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Il restera la somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique.

CORRIGÉ

Comparaison terme à terme. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $2^k + 1 > 2^k > 0$:

$$\frac{1}{2^k+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Somme géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$. On ajoute ces inégalités pour k de 0 à n. La somme obtenue compte $n+1$ termes, de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2} \neq 1$:

$$\begin{aligned} s_n &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3.

Déduis-en que (s_n) converge, et que sa limite ℓ vérifie $\frac{5}{6} \leq \ell \leq 2$.

INDICE

D'abord, tire de la question 2 un majorant indépendant de n, puis cite le critère pour une suite croissante. Pour situer ℓ, passe à la limite dans des inégalités larges.

CORRIGÉ

Convergence. D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 2$: la suite (s_n) est majorée par 2. Elle est croissante (question 1). Toute suite croissante et majorée converge : (s_n) converge vers un réel ℓ.

Majoration de ℓ. Pour tout n, $s_n \leq 2$. Par passage à la limite dans une inégalité large, $\ell \leq 2$.

Minoration de ℓ. La suite est croissante, donc chacun de ses termes est inférieur ou égal à sa limite :

$$\ell \geq s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Conclusion. (s_n) converge et sa limite vérifie $\frac{5}{6} \leq \ell \leq 2$.

Exercice 9

L'image d'une suite par une fonction continue

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{6n-1}{2n+5}$. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$.

1.

Montre que tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à $]-1,+\infty[$.

INDICE

Montrer que $u_n > -1$ revient à étudier le signe de $u_n + 1$. Mets-le sur un seul dénominateur.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On étudie le signe de $u_n + 1$:

$$\begin{aligned} u_n + 1 &= \frac{6n-1+2n+5}{2n+5} \\ &= \frac{8n+4}{2n+5}. \end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc $u_n + 1 > 0$, soit $u_n > -1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1,+\infty[$.

2.

Calcule la limite de la suite (u_n).

INDICE

C'est un quotient de deux expressions du premier degré en n : factorise par n.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. En mettant n en facteur en haut et en bas :

$$u_n = \frac{6 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}}.$$

Comme $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 0, la limite vaut $\dfrac{6}{2}$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

3.

Déduis-en la limite de la suite $(f(u_n))$. Vérifie chaque hypothèse du théorème utilisé.

INDICE

Le théorème sur la limite de $(f(u_n))$ demande trois choses : les termes dans l'intervalle de f, une limite ℓ dans cet intervalle, et la continuité de f en ℓ.

CORRIGÉ

On vérifie les hypothèses une à une, avec $I =]-1, +\infty[$.

- Tous les termes u_n appartiennent à I (question 1).
- La suite (u_n) converge vers 3, et $3 \in I$ (question 2).
- La fonction f est rationnelle et définie sur I, donc continue sur I, en particulier en 3.

D'après le théorème sur la limite de $(f(u_n))$, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(3)$:

$$f(3) = \frac{9+6}{4} = \frac{15}{4}.$$

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \dfrac{15}{4}$.

Exercice 10

Un intervalle stable

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.

Calcule u_1.

INDICE

Calcule u_0^2 sous forme de fraction, puis remplace dans l'expression de f.

CORRIGÉ

On a $u_0^2 = \dfrac{9}{4}$, donc :

$$\begin{aligned} u_1 = f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{\frac{27}{4}}{\frac{9}{4}+2} \\ &= \frac{\frac{27}{4}}{\frac{17}{4}} \\ &= \frac{27}{17}. \end{aligned}$$

Conclusion. $u_1 = \dfrac{27}{17}$.

2.

Montre que f est croissante sur $[0,+\infty[$, puis que $f\left(\left[\frac{3}{2},2\right]\right)\subset\left[\frac{3}{2},2\right]$.

INDICE

Calcule $f'(x)$ et étudie son signe. Une fonction continue et croissante envoie un segment sur le segment de ses valeurs aux bornes : compare ensuite $f\left(\frac{3}{2}\right)$ à $\frac{3}{2}$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est rationnelle et $x^2+2>0$: f est dérivable sur $[0,+\infty[$. Soit $x\geq 0$. D'après la dérivée d'un quotient, le numérateur de $f'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned}&6x\left(x^2+2\right)-3x^2\times 2x\\&=6x^3+12x-6x^3\\&=12x.\end{aligned}$$

Donc :

$$f'(x)=\frac{12x}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Variations. Pour $x>0$, $f'(x)>0$, et f' ne s'annule qu'en 0 : f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Image du segment. f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$, et $f(2)=\frac{12}{6}=2$. Donc :

$$\begin{aligned}f\left(\left[\frac{3}{2},2\right]\right)&=\left[f\left(\frac{3}{2}\right),f(2)\right]\\&=\left[\frac{27}{17},2\right].\end{aligned}$$

Comparaison des bornes. On a :

$$\frac{27}{17}-\frac{3}{2}=\frac{54-51}{34}=\frac{3}{34}>0.$$

Conclusion. f est croissante sur $[0,+\infty[$ et $f\left(\left[\frac{3}{2},2\right]\right)=\left[\frac{27}{17},2\right]\subset\left[\frac{3}{2},2\right]$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

INDICE

Raisonne par récurrence sur la propriété « $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ ». L'hérédité utilise directement la question 2.

CORRIGÉ

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ la propriété « $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ ».

Initialisation. $u_0 = \frac{3}{2}$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ appartient à $f\left(\left[\frac{3}{2}, 2\right]\right)$, qui est inclus dans $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ d'après la question 2. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

4.

On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ. Montre que $\ell = 2$.

INDICE

Situe d'abord ℓ grâce à la question 3 et au passage à la limite. Ensuite, vérifie les hypothèses de la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente avant d'écrire $f(\ell) = \ell$.

CORRIGÉ

Situer ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ (question 3). Par passage à la limite dans ces inégalités larges, $\frac{3}{2} \leq \ell \leq 2$.

Équation du point fixe. Posons $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Les hypothèses sont réunies : f est continue sur I, $f(I) \subset I$, $u_0 \in I$ et $\ell \in I$. D'après la propriété de la limite d'une suite récurrente convergente, $f(\ell) = \ell$.

Résolution. Soit $x \geq 0$. Comme $x^2 + 2 > 0$, $f(x) = x$ équivaut à $3x^2 = x^3 + 2x$, soit :

$$x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0,$$

$$x(x-1)(x-2) = 0.$$

Les solutions sont 0, 1 et 2 ; seule 2 appartient à I.

Conclusion. $\ell = 2$.