BURHAN

Suites numériques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/cours

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Rappels : suites, majorations, monotonie, récurrence

Deviner un motif

Devine : Des carrés cachés

J'ouvre le chapitre par un petit calcul. Une suite (b_n) est définie par $b_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = b_n + 2n + 3.$$

Calcule b_1, b_2 et b_3. Quelle expression de b_n te semble juste ?

A. $b_n = (n+1)^2$

Juste.

On trouve $b_1 = 4$, $b_2 = 9$, $b_3 = 16$: ce sont les carrés 2^2, 3^2, 4^2. Reste à le prouver pour tout n.

B. $b_n = 2n + 3$

Faux.

C'est l'écart $b_{n+1} - b_n$, pas le terme. Par exemple $b_1 = 4$, alors que $2 \times 1 + 3 = 5$.

C. $b_n = n^2 + 3$

Faux.

Pour $n = 0$, on obtiendrait 3. Or $b_0 = 1$.

D. $b_n = 3n + 1$, qui donne bien b_0 et b_1

Faux.

Elle donne bien $b_0 = 1$ et $b_1 = 4$. Mais $3 \times 2 + 1 = 7$, alors que $b_2 = 9$.

Indice 1

Applique la relation avec $n = 0$, puis $n = 1$, puis $n = 2$.

Indice 2

Tu dois trouver $b_1 = 4$ et $b_2 = 9$.

Indice 3

Teste chaque expression pour $n = 0, 1, 2$ et 3.

Correction

On calcule de proche en proche :

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 + 3 = 4, \\ b_2 &= 4 + 5 = 9, \\ b_3 &= 9 + 7 = 16. \end{aligned}$$

> Ce sont les carrés de 2, 3 et 4 : on conjecture que $b_n = (n+1)^2$ pour tout entier naturel n.
>
> Une conjecture n'est pas une preuve. On la démontre plus bas, par récurrence.

Définition : Suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite numérique** définie à partir du rang n_0 est une application qui, à tout entier $n \geq n_0$, associe un réel noté u_n, appelé **terme de rang** n. On la note $(u_n)_{n \geq n_0}$, ou (u_n).

- La suite est **définie explicitement** lorsque u_n est donné en fonction de n.
- Elle est **définie par récurrence** lorsque son premier terme u_{n_0} est donné, ainsi qu'une relation qui exprime u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \geq n_0$.

Exemple : Deux façons de donner une suite

La suite (b_n) est **définie par récurrence** : pour calculer b_{10}, il faut b_9, donc b_8, et ainsi de suite.

La suite (a_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3n+1}{n+2}$$

est **définie explicitement** : on calcule directement $a_{10} = \dfrac{31}{12}$.

Une formule explicite fait gagner du temps. Démontrer une conjecture comme $b_n = (n+1)^2$, c'est obtenir une telle formule.

Bornes et sens de variation

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier $n \geq n_0$; on dit que M est un majorant de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout entier $n \geq n_0$; on dit que m est un minorant de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition : Suite croissante, décroissante, monotone

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, et **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, et **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante, et **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Vérifie : Une suite sous un plafond

Pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = \frac{3n+1}{n+2} = 3 - \frac{5}{n+2}.$$

Quelle affirmation est juste ?

A. (a_n) est majorée par 3, mais elle n'est pas minorée.

Faux.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{5}{n+2} \leq \frac{5}{2}$, on a $a_n \geq \frac{1}{2}$: la suite est minorée.

B. (a_n) est bornée : $\frac{1}{2} \leq a_n < 3$ pour tout n.

Juste.

$\frac{5}{n+2}$ est strictement positif et au plus égal à $\frac{5}{2}$, d'où l'encadrement.

C. (a_n) n'est pas majorée, car a_n augmente avec n, sans jamais s'arrêter.

Faux.

Une suite qui augmente peut rester sous un plafond : ici, $a_n < 3$ pour tout n.

D. (a_n) est majorée par 2.

Faux.

$a_{10} = \frac{31}{12}$ dépasse 2.

Indice 1

Le nombre $\frac{5}{n+2}$ est strictement positif.

Indice 2

Pour $n \geq 0$, $n+2 \geq 2$, donc $\frac{5}{n+2} \leq \frac{5}{2}$.

Indice 3

Retranche ces nombres de 3.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n+2 \geq 2$:

$$0 < \frac{5}{n+2} \leq \frac{5}{2}.$$

Donc $3 - \frac{5}{2} \leq a_n < 3$, soit :

$$\frac{1}{2} \leq a_n < 3.$$

Conclusion. La suite (a_n) est majorée par 3 et minorée par $\frac{1}{2}$: elle est bornée.

Méthode : Étudier le sens de variation

1. **Différence.** Cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. **Quotient.** Si tous les termes sont strictement positifs, compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. **Fonction.** Si $u_n = f(n)$, regarde les variations de f.
4. **Récurrence.** Pour une suite récurrente, prouve $u_n \leq u_{n+1}$ par récurrence.

Sur l'exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3} \\ &= \frac{5}{(n+2)(n+3)} > 0. \end{aligned}$$

Donc (a_n) est strictement croissante.

Démontrer par récurrence

Méthode : Rédiger une récurrence en trois temps

Pour prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

1. **Initialisation.** Vérifie $P(n_0)$.
2. **Hérédité.** Fixe un entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit vraie. Déduis-en $P(n+1)$, en citant l'hypothèse de récurrence là où elle sert.
3. **Conclusion.** Écris : « d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ ».

Sur l'exemple. Soit $P(n)$: « $b_n = (n+1)^2$ ».

Initialisation. $b_0 = 1 = (0+1)^2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= (n+1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $b_n = (n+1)^2$ pour tout entier naturel n.

À toi : À toi de rédiger

Une suite (β_n) vérifie $\beta_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{1+\beta_n}.$$

Démontre par récurrence que $\beta_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n. Rédige, puis compare.

Indice 1

Écris la propriété $P(n)$ et vérifie-la pour $n = 0$.

Indice 2

Dans l'hérédité, remplace β_n par $\dfrac{1}{n+1}$ dans la relation.

Indice 3

Multiplie le numérateur et le dénominateur par $n+1$.

Réponse

Soit $P(n)$: « $\beta_n = \dfrac{1}{n+1}$ ».

Initialisation. $\beta_0 = 1 = \dfrac{1}{0+1}$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $\beta_n > 0$, donc $1 + \beta_n \neq 0$. Par hypothèse de récurrence, puis en multipliant en haut et en bas par $n+1$:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{1}{(n+1)+1} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\beta_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n.

Suites arithmétiques et géométriques

Deux familles de suites

Devine : Les gradins d'un théâtre

Dans un théâtre, la première rangée compte 14 fauteuils. Chaque rangée en compte 3 de plus que la précédente.

On note h_n le nombre de fauteuils de la rangée n, avec $h_1 = 14$. Combien de fauteuils compte la rangée 20 ?

A. 74

Faux.

Tu as ajouté 3 vingt fois. De la rangée 1 à la rangée 20, il n'y a que 19 sauts.

B. 14×3^{19}

Faux.

On ajoute 3 à chaque rangée. On ne multiplie pas par 3.

C. 71

Juste.

De la rangée 1 à la rangée 20, on ajoute 3 dix-neuf fois : $14 + 19 \times 3 = 71$.

D. 60

Faux.

Tu as oublié les 14 fauteuils de départ : 3×20 ne compte que des ajouts, et un de trop.

Indice 1

Passer d'une rangée à la suivante, c'est ajouter 3.

Indice 2

De la rangée 1 à la rangée 20, combien de fois ajoute-t-on 3 ?

Indice 3

Le nombre de fauteuils de la rangée 20 vaut celui de la rangée 1 plus le total des ajouts.

Correction

On passe de h_1 à h_{20} en ajoutant 3 dix-neuf fois :

$$h_{20} = 14 + 19 \times 3 = 71.$$

Définition : Suite arithmétique

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier $n \geq n_0$. Le réel r est la **raison** de la suite.

Définition : Suite géométrique

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$. Le réel q est la **raison** de la suite.

Exemple : Ajouter ou multiplier

La suite $(h_n)_{n \geq 1}$ des fauteuils est arithmétique, de raison 3 :

$$\forall n \geq 1, \quad h_{n+1} = h_n + 3.$$

Autre situation : une colonie de levures double chaque heure. Elle compte 3 milliers de cellules au départ. On note c_n son effectif, en milliers, après n heures.

Alors $c_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 2c_n$: la suite (c_n) est géométrique, de raison 2.

En clair : arithmétique, on ajoute toujours le même nombre ; géométrique, on multiplie toujours par le même nombre.

Terme général et somme

Propriété : Terme général et somme d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.

- Pour tous entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0, $u_n = u_p + (n-p)r$.
- Pour tous entiers p et n tels que $n_0 \leq p \leq n$, la somme des $n-p+1$ termes consécutifs de u_p à u_n vaut

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}.$$

Remarque

Ce résultat est admis. C'est un rappel de première année : tu l'as établi alors, et on s'en sert ici sans le redémontrer.

Exemple : Tous les fauteuils

Combien de fauteuils dans les 20 premières rangées ? Procède en quatre temps.

1. **Nature.** (h_n) est arithmétique.
2. **Nombre de termes.** De h_1 à h_{20}, il y a $20-1+1=20$ termes.
3. **Formule.** $h_1 + \cdots + h_{20} = \dfrac{20\times(14+71)}{2} = 850$.
4. **Contrôle.** Pour deux rangées : $14+17=31$, et la formule donne $\dfrac{2\times(14+17)}{2} = 31$.

Sommes géométriques

Propriété : Terme général et somme d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.

- Pour tous entiers p et n tels que $n_0 \leq p \leq n$, $u_n = u_p\, q^{n-p}$.
- Si $q \neq 1$, pour tous entiers p et n tels que $n_0 \leq p \leq n$,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

- Si $q = 1$, cette somme vaut $(n - p + 1)\, u_p$.

Remarque

Ce résultat est admis. C'est aussi un rappel de première année. Retiens surtout l'exposant : il compte les termes de la somme.

Vérifie : Combien de termes ?

Avec $c_0 = 3$ et $c_{n+1} = 2c_n$, on a $c_n = 3 \times 2^n$ pour tout entier naturel n. Que vaut $c_0 + c_1 + \cdots + c_9$?

A. $3 \times (2^9 - 1) = 1533$

Faux.

Cet exposant compte 9 termes. De c_0 à c_9, il y en a 10.

B. $3 \times 2^{10} = 3072$

Faux.

Il manque le -1 du numérateur : la formule donne $3 \times \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2}$.

C. $10 \times c_9 = 10 \times 1536 = 15360$

Faux.

Les termes ne sont pas égaux : on ne multiplie pas le dernier par le nombre de termes.

D. $3 \times (2^{10} - 1) = 3069$

Juste.

Dix termes, premier terme 3, raison 2 : $3 \times \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \times 1023$.

Indice 1

Compte les termes de c_0 à c_9.

Indice 2

Premier terme : $c_0 = 3$; raison : 2.

Indice 3

Applique la somme géométrique, avec ce nombre de termes en exposant.

Correction

De c_0 à c_9, il y a $9 - 0 + 1 = 10$ termes. Le premier vaut 3 et la raison vaut 2, avec $2 \neq 1$.

D'après la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} & c_0 + \cdots + c_9 \\ &= 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \\ &= 3 \times 1023 = 3069. \end{aligned}$$

Attention : Compter les termes

Une somme de u_p à u_n contient $n-p+1$ termes. Le « $+1$ » s'oublie vite : de u_4 à u_{11}, par exemple, il y a 8 termes, pas 7.

Dans une somme géométrique, cet oubli fausse l'exposant de la raison. Contrôle toujours ta formule sur une petite valeur de n.

La limite d'une suite, définie par intervalles

À partir de quel rang ?

Devine : Entrer dans un intervalle

Une limite, c'est une promesse : « à partir d'un certain rang ». Je te propose de chercher ce rang.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$t_n = \frac{2n+3}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}.$$

Quel est le **plus petit** rang N tel que tous les termes de rang $n \geq N$ soient dans l'intervalle $\left]2-\frac{1}{10}, 2+\frac{1}{10}\right[$?

A. À partir du rang 10.

Juste.
$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$ équivaut à $n+1 > 10$, soit $n \geq 10$.

B. À partir du rang 9.

Faux.
$t_9 = 2 + \frac{1}{10}$: c'est la borne, qui n'appartient pas à l'intervalle ouvert.

C. À partir du rang 11.

Faux.
Le rang 11 convient, mais ce n'est pas le plus petit : $t_{10} = 2 + \frac{1}{11}$ est déjà dans l'intervalle.

D. Jamais, puisque les termes restent au-dessus de 2.

Faux.
Rester au-dessus de 2 n'empêche pas d'y entrer : l'intervalle contient des réels plus grands que 2.

Indice 1
L'intervalle est centré en 2, de rayon $\frac{1}{10}$.

Indice 2
$t_n - 2 = \frac{1}{n+1}$ est positif : seule la borne de droite compte.

Indice 3
Résous $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$ dans les entiers.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $t_n - 2 = \dfrac{1}{n+1} > 0$, donc t_n est au-dessus de la borne gauche.

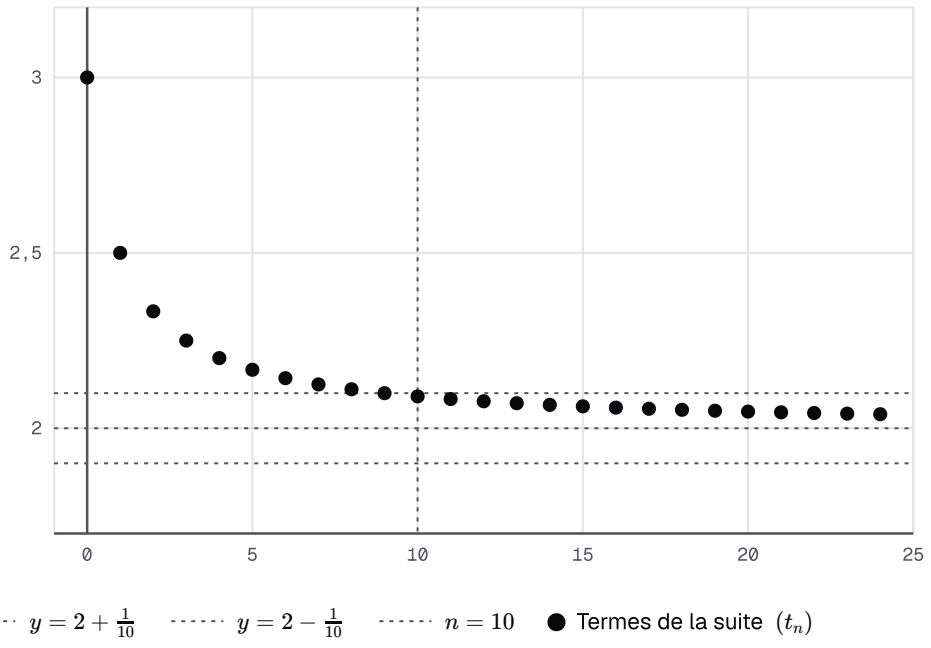
Ainsi t_n est dans l'intervalle si et seulement si $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{10}$, c'est-à-dire $n + 1 > 10$, soit $n \geq 10$.

Conclusion. Tous les termes de rang $n \geq 10$ sont dans l'intervalle, et t_9 n'y est pas : le plus petit rang est $N = 10$.

Resserre l'intervalle. Le même calcul marche pour tout rayon :

rayon de l'intervalle centré en 2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
tous les termes y sont dès le rang	10	100	1000

Plus l'intervalle est étroit, plus le rang est grand. Mais un tel rang existe **toujours**. C'est exactement ce que dit la définition suivante.



Les points (n, t_n) pour n de 0 à 24 : dès le rang 10, tous restent dans la bande entre les hauteurs 1,9 et 2,1.

Définition : Limite finie d'une suite : formulation par intervalles

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite et ℓ un réel. On dit que (u_n) **a pour limite** ℓ, ou **tend vers** ℓ, et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : pour tout intervalle ouvert J de centre ℓ, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $u_n \in J$ pour tout entier $n \geq N$. Un intervalle ouvert de centre ℓ s'écrit $]\ell - r, \ell + r[$, avec r un réel strictement positif.

Exemple : Pour aller plus loin : un rayon quelconque

Soit $r > 0$ un rayon, et $J =]2 - r, 2 + r[$.

Pour tout entier naturel n, $t_n > 2 > 2 - r$. De plus, $t_n < 2 + r$ équivaut à $n + 1 > \dfrac{1}{r}$.

Choisis un entier N tel que $N > \dfrac{1}{r}$. Soit n un entier tel que $n \geq N$: alors $n + 1 > N > \dfrac{1}{r}$, donc $t_n \in J$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 2$.

En clair : quel que soit le rayon choisi, les termes finissent tous dans l'intervalle, et n'en sortent plus.

Une limite infinie

Vérifie : Dépasser mille

Pour tout entier naturel n, soit $s_n = n^2 - 4n = n(n - 4)$. La suite (s_n) est croissante à partir du rang 2. Quel est le **premier** rang à partir duquel tous ses termes dépassent 1000 ?

A. 32

Faux.

$s_{32} = 32 \times 28 = 896$, qui est inférieur à 1000.

B. 34

Juste.

$s_{33} = 957$ et $s_{34} = 1020$. La croissance garde ensuite tous les termes au-dessus de 1000.

C. 1000

Faux.

À partir du rang 1000, les termes dépassent bien 1000, mais ce n'est pas le premier rang : s_{34} dépasse déjà 1000.

D. 1004, car on ajoute 4 à 1000

Faux.

On ne résout pas $n^2 - 4n > 1000$ en ajoutant 4 : compare plutôt s_{33} et s_{34}.

Indice 1

Calcule s_{33} et s_{34} sous la forme $n(n - 4)$.

Indice 2

$33 \times 29 = 957$.

Indice 3

Utilise la croissance pour les rangs suivants.

Correction

On calcule :

$$s_{33} = 33 \times 29 = 957,$$
$$s_{34} = 34 \times 30 = 1020.$$

Donc $s_{33} < 1000 < s_{34}$. Comme (s_n) est croissante à partir du rang 2, pour tout entier $n \geq 34$, $s_n \geq s_{34} > 1000$.

Conclusion. Le premier rang à partir duquel tous les termes dépassent 1000 est 34.

Définition : Limite infinie d'une suite : formulation par intervalles

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite.

- On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : pour tout réel A, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $u_n > A$ pour tout entier $n \geq N$.
- On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : pour tout réel A, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $u_n < A$ pour tout entier $n \geq N$.

Exemple : Pour aller plus loin : un seuil quelconque

Soit A un réel strictement positif.

Pour tout entier $n \geq 4$, on a $n \geq n - 4 \geq 0$, donc $s_n = n(n-4) \geq (n-4)^2$.

Choisis un entier $N > 4 + \sqrt{A}$. Soit n un entier tel que $n \geq N$: alors $n - 4 > \sqrt{A} > 0$, donc $s_n \geq (n-4)^2 > A$.

Si $A \leq 0$, tout rang $n \geq 5$ convient, puisque $s_n > 0$.

D'après la définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$.

Converger ou diverger

Définition : Suite convergente, suite divergente

- Une suite est **convergente** s'il existe un réel ℓ tel qu'elle ait pour limite ℓ.
- Une suite qui n'est pas convergente est **divergente** : elle tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, ou n'a pas de limite.

Vérifie : Trois comportements

On reprend $t_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$ et $s_n = n^2 - 4n$, et l'on pose $\gamma_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Quelle affirmation est juste ?

A. (s_n) est convergente, puisqu'elle a une limite.

Faux.

Sa limite est $+\infty$, qui n'est pas un réel : (s_n) est divergente.

B. Une suite divergente tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Faux.

(γ_n) prend les valeurs $1, 0, -1, 0$ en boucle : elle diverge sans tendre vers l'infini.

C. (t_n) converge, (s_n) et (γ_n) divergent.

Juste.

(t_n) tend vers le réel 2. (s_n) tend vers $+\infty$, et (γ_n) n'a pas de limite.

D. (γ_n) converge vers 0, car un terme sur deux est nul.

Faux.

Les termes de rang impair sont nuls, mais ceux de rang pair valent 1 ou -1.

Indice 1

Converger, c'est avoir pour limite un **réel**.

Indice 2

Calcule γ_0, γ_1, γ_2 et γ_3.

Indice 3

Une suite peut diverger sans limite infinie.

Correction

(t_n) converge vers 2. (s_n) tend vers $+\infty$: elle diverge.

Les termes γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 valent $1, 0, -1, 0$, puis le cycle recommence.

Un intervalle de rayon $\dfrac{1}{2}$ contient au plus une des valeurs 1 et -1, qui reviennent sans fin : (γ_n) n'a pas de limite finie. Elle est bornée, donc elle ne tend pas non plus vers l'infini.

Conclusion. (t_n) converge, (s_n) et (γ_n) divergent.

À retenir : En clair

En clair : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que, pour **chaque** intervalle ouvert centré en ℓ, aussi petit soit-il, on trouve un rang à partir duquel **tous** les termes sont dedans. Le rang dépend de l'intervalle.

Cette définition sert surtout à démontrer les théorèmes du chapitre. En calcul, tu utiliseras ces théorèmes, pas la définition.

Unicité de la limite et suites de référence

Deux limites à la fois ?

Devine : Une seule cible

Une suite peut-elle avoir pour limite à la fois 1 et 3 ? Pense à l'intervalle $]0, 2[$, centré en 1, et à l'intervalle $]2, 4[$, centré en 3.

A. Oui, si ses termes alternent entre des valeurs très proches de 1 et d'autres très proches de 3.

Faux.

Alors il n'existe aucun rang à partir duquel **tous** les termes sont dans $]0, 2[$: la suite n'a pas 1 pour limite.

B. Oui, si la suite est constante.

Faux.

Une suite constante égale à c a pour seule limite c.

C. On ne peut pas savoir sans la formule de u_n.

Faux.

L'argument des intervalles disjoints ne dépend d'aucune formule.

D. Non : au-delà d'un rang, chaque terme serait dans deux intervalles disjoints.

Juste.

Les deux limites donnent deux rangs. Au-delà du plus grand, un même terme serait dans $]0, 2[$ et dans $]2, 4[$: impossible.

Indice 1

Écris ce que signifie « tend vers 1 » avec l'intervalle $]0, 2[$.

Indice 2

Même chose pour « tend vers 3 » avec $]2, 4[$.

Indice 3

Prends un rang plus grand que les deux rangs obtenus.

Correction

Non. Si la suite tendait vers 1, tous ses termes seraient dans $]0, 2[$ à partir d'un rang N. Si elle tendait vers 3, ils seraient dans $]2, 4[$ à partir d'un rang N'.

Le terme de rang $\max(N, N')$ serait alors dans les deux intervalles, qui n'ont aucun point commun : c'est impossible.

Pourquoi est-ce vrai en général ? Le même argument marche pour deux limites distinctes quelconques.

Propriété : Unicité de la limite

Si une suite (u_n) a pour limite le réel ℓ et le réel ℓ', alors $\ell = \ell'$. On parle donc de **la** limite d'une suite convergente.

Démonstration

Étape 1. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$. Les hypothèses sont symétriques en ℓ et ℓ' : quitte à les échanger, on peut supposer $\ell < \ell'$. Posons $r = \dfrac{\ell' - \ell}{2}$; alors $r > 0$. **Étape 2.** D'après la définition F08, appliquée aux intervalles $]\ell - r, \ell + r[$ et $]\ell' - r, \ell' + r[$, il existe des entiers N et N' tels que $u_n < \ell + r$ pour tout $n \geq N$ et $u_n > \ell' - r$ pour tout $n \geq N'$. **Étape 3.** Pour $n = \max(N, N')$, on aurait $\ell' - r < u_n < \ell + r$. Or $\ell + r = \ell' - r = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$: contradiction. Donc $\ell = \ell'$.

Vérifie : Le choix du rayon

Dans la preuve, on suppose $\ell < \ell'$ et on pose $r = \dfrac{\ell' - \ell}{2}$. Pourquoi ce choix du rayon ?

A. Pour séparer ℓ et ℓ' par deux intervalles disjoints.

Juste.

Ils se touchent seulement en $\dfrac{\ell + \ell'}{2}$, qui n'appartient à aucun des deux intervalles ouverts.

B. Pour que r soit un entier.

Faux.

Rien n'impose un rayon entier : r est seulement un réel strictement positif.

C. Parce que la définition de la limite impose un rayon égal à la moitié d'un écart.

Faux.

La définition accepte **tout** rayon strictement positif. C'est la preuve qui choisit celui-ci.

D. Pour que u_n soit égal à $\dfrac{\ell + \ell'}{2}$ à partir d'un rang.

Faux.

Au contraire : un terme devrait être à la fois au-dessous et au-dessus de ce milieu.

Indice 1

Calcule $\ell + r$ et $\ell' - r$.

Indice 2

Ces deux nombres sont égaux : à quoi ?

Indice 3

Que deviennent les deux intervalles ouverts ?

Correction

Avec $r = \dfrac{\ell' - \ell}{2}$, on a :

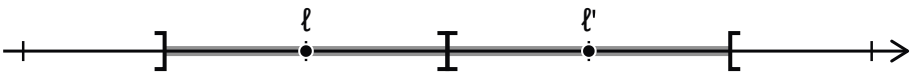
$$\ell + r = \ell' - r = \frac{\ell + \ell'}{2}.$$

L'intervalle centré en ℓ s'arrête là où commence celui centré en ℓ' : ils n'ont aucun point commun. C'est ce qui produit la contradiction de l'étape 3.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve raisonne par l'absurde. Elle sépare les deux limites supposées par deux intervalles **disjoints** ; à partir d'un rang, un même terme devrait être dans les deux.

Si la preuve te paraît longue, c'est normal : relis-la étape par étape, chacune tient en une ligne. Cette idée d'intervalles qui se séparent revient plus loin.



Les deux intervalles ouverts de rayon r, centrés en ℓ et en ℓ', se touchent au milieu sans avoir de point commun.

Exemple : Une suite qui hésite

Pour tout entier naturel n, soit $\delta_n = 2 + (-1)^n$: les termes valent $3, 1, 3, 1$, et ainsi de suite.

Supposons que (δ_n) ait une limite réelle ℓ. L'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$ contiendrait tous les termes à partir d'un rang, donc à la fois 1 et 3. Or il est ouvert, de longueur 2 : il ne peut contenir deux réels distants de 2.

Donc (δ_n) n'a pas de limite finie. Elle est bornée : elle diverge sans limite infinie.

Les suites de référence

Un cas numérique. Quand n grandit, $\sqrt{n}$ grandit sans limite : il dépasse 100 dès que $n > 10\,000$. À l'inverse, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ se rapproche de 0 : il passe sous $\dfrac{1}{100}$ dès que $n > 10\,000$.

Pourquoi est-ce vrai pour toute puissance n^s ? Il suffit de résoudre $n^s > A$, grâce à la croissance de $x \mapsto x^s$.

Propriété : Limites des suites de référence

Soit s un nombre rationnel strictement positif. Pour les suites définies pour $n \geq 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} n^s = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^s} = 0.$$

En particulier, les suites (n), (n^2), (n^3) et $(\sqrt{n})$ tendent vers $+\infty$, et les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, définies pour $n \geq 1$, tendent vers 0.

Démonstration

Étape 1. D'après le chapitre précédent, la fonction $x \mapsto x^s$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et, pour tout réel $a > 0$, $\left(a^{\frac{1}{s}}\right)^s = a$. **Étape 2.** Soit A un réel. Si $A \leq 0$, tout entier $n \geq 1$ vérifie $n^s > A$. Si $A > 0$, soit N un entier tel que $N > A^{\frac{1}{s}}$; pour tout entier $n \geq N$, la stricte croissance donne $n^s > \left(A^{\frac{1}{s}}\right)^s = A$. D'après F09, n^s tend vers $+\infty$. **Étape 3.** Soit $a > 0$. D'après l'étape 2 avec $A = \dfrac{1}{a}$, il existe N tel que $n^s > \dfrac{1}{a}$ pour $n \geq N$, donc $0 < \dfrac{1}{n^s} < a$. Ainsi $]-a, a[$ contient tous ces termes : d'après F08, $\dfrac{1}{n^s}$ tend vers 0.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$, on se donne un seuil A et on **fabrique** un rang N : ici $N > A^{\frac{1}{s}}$, en inversant la puissance.

Pour la limite 0, on applique ce résultat au seuil $\dfrac{1}{a}$: passer à l'inverse change une limite $+\infty$ en limite 0.

Vérifie : Trouver le rang

En suivant la preuve, quel est le **plus petit** entier N tel que $n^{\frac{3}{2}} > 1000$ pour tout $n \geq N$?

A. $N = 11$, car $1000^{\frac{1}{3}} = 10$.

Faux.
La puissance qui inverse $\dfrac{3}{2}$ est $\dfrac{2}{3}$, pas $\dfrac{1}{3}$: $11^{\frac{3}{2}}$ reste bien en dessous de 1000.

B. $N = 101$, car $1000^{\frac{2}{3}} = 100$.

Juste.
On inverse la puissance $\dfrac{3}{2}$ en élevant à la puissance $\dfrac{2}{3}$: $n > 100$, soit $n \geq 101$.

C. $N = 667$, car $1000 \times \dfrac{2}{3} \approx 667$.

Faux.
Multiplier par $\dfrac{2}{3}$ n'inverse pas une puissance. Le rang 667 convient, mais ce n'est pas le plus petit.

D. $N = 1001$, car il faut $n > 1000$.

Faux.
Le rang 1001 convient aussi, mais il est loin d'être le plus petit : $101^{\frac{3}{2}}$ dépasse déjà 1000.

Indice 1
La fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Indice 2
$n^{\frac{3}{2}} > 1000$ équivaut à $n > 1000^{\frac{2}{3}}$.
Indice 3
Écris 1000 comme une puissance de 10.

Correction

La fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc, pour tout entier $n \geq 1$:

$$n^{\frac{3}{2}} > 1000$$
$$\Leftrightarrow n > 1000^{\frac{2}{3}} = 100.$$

Les rangs qui conviennent sont donc les $n \geq 101$; en particulier, $100^{\frac{3}{2}} = 1000$ ne convient pas.

Conclusion. Le plus petit rang est $N = 101$.

Exemple : Des puissances rationnelles

Les suites $\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ et $\left(n^{\frac{5}{4}}\right)$ tendent vers $+\infty$.

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0, car $\sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}}$. Par exemple, $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{1}{10}$ dès que $n > 1000$.

En clair : une puissance d'exposant rationnel strictement positif part vers $+\infty$, et son inverse tend vers 0.

Opérations, formes indéterminées, suites $u_n = f(n)$

Les règles de calcul

Devine : Un quotient de polynômes

Soit $R_n = \dfrac{6n^2 - n}{3n^2 + 5n + 2}$ pour tout entier naturel n. Quelle est sa limite ?

A. 1, car le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$

Faux.
$\dfrac{+\infty}{+\infty}$ est une forme indéterminée : elle ne vaut pas 1.

B. Aucune : la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ est indéterminée

Faux.
Indéterminée veut dire « à transformer », pas « sans limite ».

C. 2

Juste.
Pour $n \geq 1$, en divisant par n^2 : $R_n = \dfrac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}$, qui tend vers $\dfrac{6}{3} = 2$.

D. $-\dfrac{1}{5}$, quotient des coefficients de n

Faux.
Ce sont les termes de plus haut degré qui l'emportent, ici ceux en n^2.

Indice 1

Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée.

Indice 2

Pour $n \geq 1$, divise le numérateur et le dénominateur par n^2.

Indice 3

$\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ tendent vers 0.

Correction

Pour tout entier $n \geq 1$, en divisant le numérateur et le dénominateur par n^2 :

$$R_n = \frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}.$$

Le numérateur tend vers 6, le dénominateur vers 3.

Conclusion. Par la règle du quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 2$.

Propriété : Opérations sur les limites de suites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui ont chacune une limite, finie ou infinie.

- Les limites de $(u_n + v_n)$, de $(u_n v_n)$ et, lorsque $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ s'obtiennent par les mêmes règles que les limites de fonctions en $+\infty$ (somme, produit, quotient).
- En particulier, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell'$, avec ℓ et ℓ' réels, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $\ell + \ell'$, $(u_n v_n)$ tend vers $\ell\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
- Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers 0 ; si (u_n) tend vers 0 avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.
- Les formes indéterminées sont les mêmes que pour les fonctions : $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$ et leurs variantes de signe.

Remarque

Ce résultat est admis. Ses règles sont celles que tu connais pour les limites de fonctions en $+\infty$. Leur preuve par intervalles serait longue, sans idée nouvelle.

Exemple : Quand les règles concluent seules

La suite de terme $3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}$, définie pour $n \geq 1$, tend vers $3 - 0 + 0 = 3$.

La suite de terme $n^2 + \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, comme somme de deux suites qui tendent vers $+\infty$.

En revanche, pour R_n, les règles donnaient $\frac{+\infty}{+\infty}$: il fallait d'abord transformer l'écriture.

Lever une indétermination

Méthode : Lever une forme indéterminée

1. **Repère** la forme donnée par les règles : est-elle indéterminée ?
2. **Terme dominant.** Pour un quotient de puissances de n, factorise en haut et en bas par la plus haute puissance.
3. **Expression conjuguée.** Pour une différence de racines, multiplie et divise par leur somme.
4. **Conclus** avec les suites de référence et les règles.

Sur un exemple. $\sqrt{n^2+6n}-n$ donne $(+\infty)-(+\infty)$. Pour tout entier $n \geq 1$, on multiplie et on divise par $\sqrt{n^2+6n}+n$, puis on factorise par n :

$$\begin{aligned}&\sqrt{n^2+6n}-n\\&=\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}\\&=\frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}.\end{aligned}$$

Ce terme tend vers $\frac{6}{2}=3$.

Vérifie : Une différence de racines

Pour $n \geq 1$, quelle est la limite de $\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}$?

A. 4

Faux.

4 est le numérateur obtenu. Il reste à diviser par la somme des racines, qui tend vers $+\infty$.

B. Aucune : $(+\infty)-(+\infty)$ est indéterminée

Faux.

Une forme indéterminée se lève : elle n'interdit pas une limite.

C. $+\infty$, car $4n+1>4n-3$

Faux.

Le terme est bien positif. Mais positif ne veut pas dire grand : il tend vers 0.

D. 0

Juste.

Avec l'expression conjuguée, le terme vaut $\frac{4}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}$, et ce dénominateur tend vers $+\infty$.

Indice 1

Multiplie et divise par $\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}$.

Indice 2

Le numérateur devient $(4n+1)-(4n-3)=4$.

Indice 3

Le dénominateur tend vers $+\infty$.

Correction

Soit n un entier, $n \geq 1$. On multiplie et on divise par la somme des racines, strictement positive :

$$\begin{aligned}&\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}\\&=\frac{(4n+1)-(4n-3)}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}\\&=\frac{4}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$.

Conclusion. La limite vaut 0.

Des suites venues d'une fonction

Un cas numérique. Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=\frac{5x-2}{x+4}=5-\frac{22}{x+4}.$$

Quand x devient grand, $\varphi(x)$ s'approche de 5. C'est vrai en particulier pour les entiers. De plus, φ est croissante : la suite $(\varphi(n))$ l'est aussi.

Pourquoi est-ce vrai ? Les entiers sont des réels comme les autres. Ce qui vaut pour tous les grands réels vaut donc pour les grands entiers.

Propriété : Limite d'une suite de la forme $u_n = f(n)$

Soit n_0 un entier naturel, f une fonction définie sur $[n_0,+\infty[$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par $u_n=f(n)$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, où L est un réel, $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$.

Démonstration

Étape 1. Cas où L est un réel. On lit la limite de f en $+\infty$ par intervalles, comme au chapitre précédent : pour tout intervalle ouvert J de centre L, il existe un réel A tel que $f(x)\in J$ pour tout réel $x>A$ de $[n_0,+\infty[$. Soit J un tel intervalle et A le réel associé. **Étape 2.** Soit N un entier tel que $N\geq n_0$ et $N>A$. Pour tout entier $n\geq N$, on a $n>A$, donc $u_n=f(n)\in J$. D'après F08, (u_n) tend vers L. **Étape 3.** Cas $L=+\infty$ ou $L=-\infty$: même raisonnement, avec les intervalles $]B,+\infty[$ ou $]-\infty,B[$ et la définition F09.

Propriété : Sens de variation d'une suite de la forme $u_n = f(n)$

Soit n_0 un entier naturel, f une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$ et $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$.

- Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, alors (u_n) est décroissante. Il en va de même pour la stricte monotonie.

Démonstration

Étape 1. Soit $n \geq n_0$ un entier. Les réels n et $n+1$ appartiennent à $[n_0, +\infty[$ et $n < n+1$. **Étape 2.** Si f est croissante sur cet intervalle, alors $f(n) \leq f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. Comme cela vaut pour tout $n \geq n_0$, la suite (u_n) est croissante (F03). **Étape 3.** Les cas d'une fonction décroissante, strictement croissante ou strictement décroissante se traitent de la même façon, avec l'inégalité correspondante.

Vérifie : Le sens de la propriété

Pour tout entier naturel n, $\sin(n\pi) = 0$. Que peut-on en déduire, avec la propriété sur la limite d'une suite $u_n = f(n)$?

A. La suite converge vers 0, mais $x \mapsto \sin(\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Juste.

La suite est constante, nulle. La fonction prend la valeur 1 en chaque réel $2j + \dfrac{1}{2}$, avec j entier.

B. La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Faux.

La propriété va de la fonction vers la suite, jamais l'inverse. Ici, $\sin(\pi x)$ oscille entre -1 et 1.

C. La suite diverge, puisque la fonction sinus oscille.

Faux.

La suite ne voit que les entiers. En ces points, le sinus vaut toujours 0.

D. On ne peut rien dire, car la propriété sur la limite exige que f soit croissante sur $[0, +\infty[$.

Faux.

La propriété sur la limite n'exige aucune monotonie. Et cette suite constante converge de toute façon.

Indice 1

Calcule $\sin(0)$, $\sin(\pi)$ et $\sin(2\pi)$.

Indice 2

Dans quel sens la propriété transmet-elle une limite ?

Indice 3

Calcule $\sin\left(\pi\left(2j + \dfrac{1}{2}\right)\right)$ pour j entier.

Correction

Pour tout entier n, $\sin(n\pi) = 0$: la suite est constante et converge vers 0.

Pourtant, $\sin(\pi x)$ vaut 0 en chaque entier et 1 en chaque réel $2j + \dfrac{1}{2}$, avec j entier. La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ n'a donc pas de limite en $+\infty$.

Une suite $(f(n))$ peut converger sans que f ait une limite : la propriété ne se lit que dans un sens.

Ce que disent les preuves

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux preuves ne calculent rien. Elles **restreignent** aux entiers une information connue sur tous les réels : une limite en $+\infty$, ou une inégalité entre $f(n)$ et $f(n+1)$.

Le seul soin : choisir un rang entier N au-delà du réel A fourni par la fonction.

Exemple : Retour sur l'exemple

La fonction φ a pour limite 5 en $+\infty$, donc $(\varphi(n))$ converge vers 5.

Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x < y$. Alors $\dfrac{22}{x+4} > \dfrac{22}{y+4}$, donc $\varphi(x) < \varphi(y)$: φ est strictement croissante, et $(\varphi(n))$ aussi. Elle part de $\varphi(0) = -\dfrac{1}{2}$.

La propriété de variation ne se renverse pas non plus : la suite de terme $n + \sin(n\pi) = n$ est croissante, alors que $x \mapsto x + \sin(\pi x)$ ne l'est pas, puisqu'elle vaut $\dfrac{3}{2}$ en $\dfrac{1}{2}$ et 1 en 1.

Comparaison, encadrement, majoration de l'écart

Comparer pour conclure

Devine : Un sinus qui gêne

Petit rappel de première : pour obtenir une limite, tu comparais parfois une suite à une suite plus simple. Cette fois, on prouve enfin que cet outil est juste.

Pour tout entier naturel n, soit $\omega_n = n + \sin n$. Le terme $\sin n$ oscille entre -1 et 1 : les règles de calcul ne s'appliquent pas. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n$?

A. On ne peut pas conclure, car $(\sin n)$ n'a pas de limite.

Faux.

La limite de $\sin n$ est inutile : il suffit de minorer $\sin n$ par -1.

B. $+\infty$, car $\omega_n \geq n - 1$.

Juste.

$\sin n \geq -1$, donc $\omega_n \geq n - 1$, et $(n-1)$ tend vers $+\infty$.

C. $-\infty$, car $\sin n$ peut être proche de -1.

Faux.

Même quand $\sin n$ est proche de -1, on a $\omega_n \geq n - 1$, qui grandit sans fin.

D. Aucune, puisque ω_n oscille.

Faux.

Les oscillations de $\sin n$ restent entre -1 et 1. Elles n'empêchent pas ω_n de grandir.

Indice 1

Encadre $\sin n$ entre -1 et 1.

Indice 2

Laquelle des deux inégalités sur ω_n peut conclure ?

Indice 3

Compare ω_n à $n - 1$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sin n \geq -1$, on a $\omega_n \geq n - 1$.

Or $(n-1)$ tend vers $+\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n = +\infty$.

Pourquoi est-ce vrai ? Si $n - 1$ dépasse tout seuil à partir d'un rang, ω_n, qui est au-dessus, le dépasse aussi. Les deux énoncés suivants le démontrent.

Théorème : Limite infinie par comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites et p un entier naturel.

- Si $u_n \geq v_n$ pour tout entier $n \geq p$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq p$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

Étape 1. Premier point. Soit A un réel. Comme (v_n) tend vers $+\infty$, il existe un entier N_1 tel que $v_n > A$ pour tout $n \geq N_1$ (F09). **Étape 2.** Posons $N = \max(N_1, p)$. Pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \geq v_n$ et $v_n > A$, donc $u_n > A$. **Étape 3.** Ainsi, tout intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir du rang N : (u_n) tend vers $+\infty$ (F09). Le second point se démontre de la même façon, avec les intervalles $]-\infty, A[$.

Théorème : Convergence par encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, p un entier naturel et ℓ un réel. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout entier $n \geq p$, et si (v_n) et (w_n) ont toutes deux pour limite ℓ, alors (u_n) a pour limite ℓ.

Démonstration

Étape 1. Soit J un intervalle ouvert de centre ℓ. D'après F08, il existe des entiers N_1 et N_2 tels que $v_n \in J$ pour tout $n \geq N_1$ et $w_n \in J$ pour tout $n \geq N_2$. **Étape 2.** Posons $N = \max(N_1, N_2, p)$ et soit $n \geq N$. Alors v_n et w_n appartiennent à J, et $v_n \leq u_n \leq w_n$. **Étape 3.** Or un intervalle contient tout réel compris entre deux de ses éléments. Donc $u_n \in J$ pour tout $n \geq N$, et (u_n) a pour limite ℓ (F08).

Ce que disent les preuves

Vérifie : Le choix de N

Dans la preuve de l'encadrement, on pose $N = \max(N_1, N_2, p)$. Pourquoi prendre le plus grand des trois ?

A. Parce qu'un rang plus grand donne une limite plus précise.

Faux.

La limite ne dépend pas du rang choisi. Le rang sert seulement à garantir des conditions.

B. Parce que la définition impose de prendre un maximum.

Faux.

La définition demande seulement un rang. Le maximum sert à réunir plusieurs rangs.

C. Pour que les trois conditions soient vraies en même temps.

Juste.

Au-delà de N_1, $v_n \in J$; au-delà de N_2, $w_n \in J$; au-delà de p, l'encadrement tient. Au-delà du maximum, tout est vrai à la fois.

D. Pour que u_n soit égal à ℓ à partir de N.

Faux.

La preuve place u_n dans J, pas en ℓ. Une suite convergente n'atteint pas forcément sa limite.

Indice 1

Que garantit chacun des rangs N_1, N_2 et p ?

Indice 2

Chaque garantie vaut « à partir de » son rang.

Indice 3

À partir de quel rang les trois sont-elles vraies ensemble ?

Correction

N_1 garantit $v_n \in J$, N_2 garantit $w_n \in J$, et p garantit $v_n \leq u_n \leq w_n$, chacun à partir de son rang.

À partir de $N = \max(N_1, N_2, p)$, les trois sont vraies en même temps. Alors u_n, coincé entre deux éléments de l'intervalle J, est dans J.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux preuves suivent le même schéma, en trois temps ; si elles te paraissent longues, relis-les temps par temps.

1. On part de la définition de la limite pour les suites connues.
2. On réunit les rangs par un maximum.
3. L'inégalité **transporte** l'information jusqu'à u_n : au-dessus d'un seuil pour une limite $+\infty$, dans un intervalle pour l'encadrement.

Exemple : Un encadrement

Pour tout entier naturel n, soit $\sigma_n = \dfrac{n + 2\sin n}{n+1}$. Comme $-1 \leq \sin n \leq 1$:

$$\frac{n-2}{n+1} \leq \sigma_n \leq \frac{n+2}{n+1}.$$

Pour $n \geq 1$, les bornes s'écrivent $\dfrac{1 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$ et $\dfrac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$: elles tendent vers 1.

D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n = 1$. On n'a jamais eu besoin d'une limite de $(\sin n)$.

Majorer l'écart

Un cas numérique. Pour tout entier naturel n, soit $\eta_n = 5 + \dfrac{\cos(3n)}{n^2+1}$. L'écart à 5 vérifie :

$$|\eta_n - 5| \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

Pour $n = 10$, il vaut au plus $\dfrac{1}{101}$; pour $n = 100$, au plus $\dfrac{1}{10\,001}$. L'écart est écrasé par une suite qui tend vers 0.

Pourquoi est-ce vrai que η_n tend alors vers 5 ? L'énoncé suivant ramène cette question à l'encadrement.

Propriété : Convergence par majoration de l'écart

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, p un entier naturel et ℓ un réel.

- Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ pour tout entier $n \geq p$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
- En particulier, (u_n) tend vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ tend vers 0.

Démonstration

Étape 1. Pour tout $n \geq p$, l'inégalité $|u_n - \ell| \leq v_n$ s'écrit $\ell - v_n \leq u_n \leq \ell + v_n$. **Étape 2.** D'après F13, les suites $(\ell - v_n)$ et $(\ell + v_n)$ ont pour limite $\ell - 0 = \ell$ et $\ell + 0 = \ell$. D'après F17, (u_n) a pour limite ℓ. **Étape 3.** Second point. Si $(|u_n|)$ tend vers 0, le premier point, avec $\ell = 0$ et $v_n = |u_n|$, donne la limite 0. Réciproquement, pour tout réel $a > 0$, $|u_n| \in]-a, a[$ équivaut à $u_n \in]-a, a[$; d'après F08, si (u_n) tend vers 0, alors $(|u_n|)$ aussi.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une valeur absolue majorée se lit comme un encadrement : $|u_n - \ell| \leq v_n$ équivaut à $\ell - v_n \leq u_n \leq \ell + v_n$.

La preuve se ramène donc au théorème d'encadrement. Pour conclure, une majoration de l'écart par une suite de limite 0 suffit.

Exemple : L'écart à la limite

Pour η_n : soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $|\cos(3n)| \leq 1$, on a $|\eta_n - 5| \leq \dfrac{1}{n^2+1}$. Or $\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)$ tend vers 0, par les règles de calcul. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \eta_n = 5$.

Le second point de l'énoncé ne vaut que pour la limite 0 : $((-1)^n)$ ne converge pas, alors que $|(-1)^n| = 1$ pour tout n.

À toi : Un écart qui se divise par trois

Une suite (μ_n) vérifie $\mu_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n :

$$|\mu_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{3}|\mu_n - 4|.$$

Montre par récurrence que $|\mu_n - 4| \leq \dfrac{3}{3^n}$ pour tout n.

Une récurrence courte donne $3^n \geq n + 1$: c'est vrai pour $n = 0$, et $3^{n+1} \geq 3(n+1) \geq n + 2$. Conclus sur la limite de (μ_n).

Indice 1

Pour $n = 0$: $|\mu_0 - 4| = 3$ et $\dfrac{3}{3^0} = 3$.

Indice 2

Dans l'hérédité, multiplie l'hypothèse de récurrence par $\dfrac{1}{3}$.

Indice 3

Avec $3^n \geq n + 1$, majore l'écart par $\dfrac{3}{n+1}$.

Réponse

Soit $P(n)$: « $|\mu_n - 4| \leq \dfrac{3}{3^n}$ ».

Initialisation. $|\mu_0 - 4| = |7 - 4| = 3 = \dfrac{3}{3^0}$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. D'après l'inégalité de l'énoncé, puis l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |\mu_{n+1} - 4| &\leq \frac{1}{3}|\mu_n - 4| \\ &\leq \frac{1}{3} \times \frac{3}{3^n} \\ &= \frac{3}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Limite. Comme $3^n \geq n + 1$, on a $|\mu_n - 4| \leq \dfrac{3}{n+1}$, qui tend vers 0. Par majoration de l'écart, (μ_n) converge vers 4.

Passer à la limite dans une inégalité

Une inégalité à la limite

Devine : Strict ou large ?

Pour tout entier naturel n, $\tau_n = 3 - \dfrac{1}{n+2}$, donc $\tau_n < 3$. Que peut-on dire de la limite ℓ de (τ_n) ?

A. $\ell < 3$, car tous les termes sont strictement inférieurs à 3.

Faux.

Les termes s'approchent de 3 autant qu'on veut : la limite vaut exactement 3.

B. $\ell = \dfrac{5}{2}$, la valeur du premier terme.

Faux.

$\tau_0 = \dfrac{5}{2}$ est le premier terme, pas la limite : la suite croît vers 3.

C. On ne peut rien dire sans calculer la limite.

Faux.

Même sans calcul, une majoration de tous les termes passe à la limite, sous forme large.

D. $\ell \leq 3$.

Juste.

La majoration passe à la limite sous forme large. Ici, d'ailleurs, $\ell = 3$: l'inégalité stricte n'a pas survécu.

Indice 1

Que devient $\dfrac{1}{n+2}$ quand n grandit ?

Indice 2

Calcule la limite de (τ_n).

Indice 3

Compare cette limite à 3.

Correction
La suite $\left(\frac{1}{n+2}\right)$ tend vers 0, donc $\ell = 3$.

L'inégalité stricte $\tau_n < 3$ ne donne pas $\ell < 3$: à la limite, elle devient $\ell \leq 3$.

Pourquoi est-ce vrai ? Si la limite dépassait le plafond, les termes finiraient par la rejoindre, au-dessus de ce plafond. C'est impossible : ils restent tous dessous.

Propriété : Passage à la limite dans une inégalité

Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ, p un entier naturel et a un réel.

- Si $u_n \leq a$ pour tout entier $n \geq p$, alors $\ell \leq a$. Si $u_n \geq a$ pour tout entier $n \geq p$, alors $\ell \geq a$.
- Si (v_n) est une suite convergente de limite ℓ' et si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq p$, alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration
Étape 1. Supposons $u_n \leq a$ pour tout $n \geq p$ et, par l'absurde, $\ell > a$. Posons $r = \ell - a$; alors $r > 0$. D'après F08, appliquée à $]\ell - r, \ell + r[$, il existe un entier N tel que $u_n > \ell - r = a$ pour tout $n \geq N$. **Étape 2.** Pour $n = \max(N, p)$, on aurait à la fois $u_n \leq a$ et $u_n > a$: contradiction. Donc $\ell \leq a$. Le cas $u_n \geq a$ se traite de la même façon. **Étape 3.** Second point. D'après F13, la suite $(v_n - u_n)$ a pour limite $\ell' - \ell$, et $v_n - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq p$. D'après le premier point, $\ell' - \ell \geq 0$, donc $\ell \leq \ell'$.

Ce que dit la preuve

Vérifie : Le rôle de la différence

Pour le second point, la preuve étudie la suite $(v_n - u_n)$. Quelle propriété de cette suite sert ?

A. Elle converge vers $\ell' - \ell$, avec des termes positifs dès le rang p.
Juste.
Le premier point, avec le plancher 0, donne alors $\ell' - \ell \geq 0$.

B. Elle est croissante.
Faux.
Aucune monotonie n'est supposée : seuls la limite et le signe servent.

C. Ses termes sont strictement positifs, donc sa limite l'est aussi, par passage à la limite.
Faux.
Même avec des termes strictement positifs, la limite peut être nulle. Seule l'inégalité large passe à la limite.

D. Elle tend vers 0.
Faux.
Rien ne l'impose : elle tend vers $\ell' - \ell$, qui peut être non nul.

Indice 1
Que donnent les règles de calcul pour $(v_n - u_n)$?
Indice 2
Quel est le signe de $v_n - u_n$ à partir du rang p ?
Indice 3
Applique le premier point avec $a = 0$.

Correction
Par les règles de calcul, $(v_n - u_n)$ converge vers $\ell' - \ell$. Ses termes sont positifs ou nuls à partir du rang p.

Le premier point, appliqué avec $a = 0$, donne $\ell' - \ell \geq 0$, soit $\ell \leq \ell'$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Encore un raisonnement par l'absurde. Le rayon $r = \ell - a$ est choisi pour que l'intervalle centré en ℓ reste au-dessus de a.

Pour comparer deux suites, on passe par leur différence : on se ramène à une seule suite et au plancher 0.

Attention : Une inégalité stricte devient large

À la limite, « $<$ » devient « $\leq$ ». Pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{2}{n} > 0$, et pourtant la limite vaut 0.

De $u_n < a$ pour tout n, on déduit seulement $\ell \leq a$. Pour obtenir $\ell < a$, il faut un argument de plus : par exemple, $u_n \leq b$ pour tout n, avec $b < a$.

La limite de (qⁿ)

Des puissances qui s'envolent

Devine : Un intérêt composé

Petit rappel de première : tu as utilisé la limite de (q^n), sans preuve. Ici, on la démontre.

Commence par prédire, avec une épargne qui gagne un vingtième par an. La suite de terme $1{,}05^n$ croît lentement : $1{,}05^2 = 1{,}1025$. Reste-t-elle sous un plafond ?

A. Oui : elle reste sous 2, car elle augmente très lentement à chaque rang.
Faux.
Lentement ne veut pas dire peu : $1 + 0{,}05n$ dépasse 2 dès $n = 21$, et la suite est au-dessus.

B. Non : elle dépasse tout réel, car $1{,}05^n \geq 1 + 0{,}05n$.
Juste.

Cette minoration, démontrée ci-dessous, tend vers $+\infty$: elle entraîne la suite avec elle.

C. Oui : chaque terme vaut au plus $1{,}05$ fois le précédent.

Faux.

Multiplier par $1{,}05$ à chaque rang, c'est justement ce qui fait grandir la suite sans fin.

D. On ne peut pas le savoir sans calculatrice.

Faux.

Une minoration simple suffit, sans aucune valeur approchée.

Indice 1

Écris $1{,}05 = 1 + 0{,}05$.

Indice 2

Développe $(1+a)^2$ et compare à $1+2a$.

Indice 3

Une suite minorée par une suite qui tend vers $+\infty$…

Correction

Avec $a = 0{,}05$, l'inégalité de Bernoulli ci-dessous donne, pour tout entier naturel n :

$$1{,}05^n \geq 1 + 0{,}05n.$$

Ce minorant tend vers $+\infty$, donc la suite aussi, par comparaison.

Par exemple, $1{,}05^n > 10$ pour tout $n \geq 181$, puisque $1 + 0{,}05 \times 181 = 10{,}05$. Ce rang suffit, même s'il n'est pas le premier.

Pourquoi est-ce vrai ? Développe $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Si $a \geq 0$, le terme a^2 est positif, donc $(1+a)^2 \geq 1 + 2a$.

Chaque multiplication par $1+a$ ajoute au moins a. Après n multiplications, on a ajouté au moins na. La récurrence rend cette idée rigoureuse.

Propriété : Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel $a \geq 0$ et tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration

Étape 1. Initialisation. Pour $n = 0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$: l'inégalité est vraie. **Étape 2. Hérédité.** Soit n un entier naturel tel que $(1+a)^n \geq 1 + na$. Comme $1 + a > 0$, on peut multiplier les deux membres par $1 + a$: $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2$. Or $na^2 \geq 0$, donc $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$. **Étape 3. Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour tout entier naturel n.

Propriété : Limite de la suite (q^n)

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante, égale à 1.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Démonstration

Étape 1. Cas $q > 1$. Posons $a = q - 1$; alors $a > 0$ et, d'après F20, $q^n \geq 1 + na$ pour tout n. Or $(1 + na)$ tend vers $+\infty$ (F12 et F13, car $a > 0$). D'après F16, (q^n) tend vers $+\infty$. Si $q = 1$, $q^n = 1$ pour tout n. **Étape 2.** Cas $-1 < q < 1$. Si $q = 0$, la suite est nulle à partir du rang 1 : elle tend vers 0 (F08). Sinon, $\dfrac{1}{|q|} > 1$, donc $\left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n$ tend vers $+\infty$ (étape 1) et $|q^n| = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}$ tend vers 0 (F13). D'après F18, (q^n) tend vers 0. **Étape 3.** Cas $q \leq -1$. On a $q^2 \geq 1$, donc $q^{2n} = (q^2)^n \geq 1$ (F20 avec $a = q^2 - 1$), et $q^{2n+1} = q \times q^{2n} \leq -q^{2n} \leq -1$. Une limite finie ℓ est impossible : l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$ contiendrait, à partir d'un certain rang, deux termes consécutifs, alors que leur écart est au moins 2. Une limite infinie est impossible aussi : les termes changent de signe à chaque rang.

Ce que disent les preuves

Vérifie : Le cas d'une petite raison

Pour $0 < |q| < 1$, la preuve passe par la suite $\left(\left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n\right)$. Pourquoi ce détour ?

A. Pour rendre la suite croissante.

Faux.

La monotonie ne sert pas ici : seule la limite du premier cas est utilisée.

B. Parce que q^n est toujours positif.

Faux.

Pas si $q < 0$: q^n change alors de signe. C'est pourquoi la preuve passe par $|q^n|$.

C. Sa raison dépasse 1 : on obtient la limite $+\infty$, puis on passe à l'inverse.

Juste.

Le cas difficile se ramène au cas déjà traité, par passage à l'inverse.

D. Pour appliquer directement l'inégalité de Bernoulli à la raison q elle-même.

Faux.

Bernoulli porte sur $1 + a$ avec $a \geq 0$, donc sur une raison au moins égale à 1 : q ne convient pas.

Indice 1

Compare $\dfrac{1}{|q|}$ à 1.

Indice 2

Quel cas de l'énoncé s'applique à la raison $\dfrac{1}{|q|}$?

Indice 3

Que devient l'inverse d'une suite qui tend vers $+\infty$?

Correction

Comme $0 < |q| < 1$, la raison $\dfrac{1}{|q|}$ est strictement supérieure à 1. Par le premier cas, $\left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n$ tend vers $+\infty$.

Son inverse $|q^n|$ tend donc vers 0. La majoration de l'écart conclut : (q^n) tend vers 0.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Bernoulli minore q^n par une suite affine. Une comparaison donne alors la limite $+\infty$ pour $q > 1$.

Les autres cas s'y ramènent : par l'inverse pour $|q| < 1$. Pour $q \leq -1$, les termes alternent de signe **en restant hors de** $]-1, 1[$: deux termes consécutifs sont écartés d'au moins 2.

Une alternance seule ne suffit pas : $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ alterne et tend vers 0.

Exemple : Diviser par la plus grande puissance

Pour tout entier naturel n, soit $\rho_n = \dfrac{2 \times 5^n - 3^n}{5^n + 4}$. Divise en haut et en bas par 5^n :

$$\rho_n = \frac{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 + 4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}.$$

Comme $-1 < \dfrac{3}{5} < 1$ et $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, les deux puissances tendent vers 0.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n = \dfrac{2 - 0}{1 + 0} = 2$.

Bornée ne suffit pas

Attention : Une suite bornée peut n'avoir aucune limite

La suite de terme $5 \times (-1)^n$ ne prend que les valeurs 5 et -5 : elle est bornée. Pourtant, elle n'a pas de limite : c'est le cas $q = -1$, multiplié par 5.

« Bornée » ne suffit donc pas pour converger. Il faudra aussi la monotonie, à la section suivante.

Vérifie : Quatre raisons

Laquelle de ces suites converge vers 0 ?

A. $\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Faux.

$\sqrt{5} > 2$, donc $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$: la suite tend vers $+\infty$.

B. $((-1{,}1)^n)$

Faux.

La raison est inférieure à -1 : les termes alternent de signe et grandissent en valeur absolue, sans limite.

C. (1^n)

Faux.

Cette suite est constante, égale à 1 : elle converge vers 1, pas vers 0.

D. $\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)$

Juste.

$\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $-1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$: la suite tend vers 0, en changeant de signe à chaque rang.

Indice 1

Situe chaque raison par rapport à -1 et à 1.

Indice 2

$\sqrt{2} < 2$ et $\sqrt{5} > 2$.

Indice 3

Seule une raison strictement comprise entre -1 et 1 donne la limite 0.

Correction

Seule la raison $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ vérifie $-1 < q < 1$, puisque $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

- La raison $\frac{\sqrt{5}}{2}$ dépasse 1 : la limite est $+\infty$.
- La raison $-1{,}1$ est inférieure à -1 : il n'y a pas de limite.
- Pour $q = 1$, la suite est constante, égale à 1.

Suites monotones : convergence ou limite infinie

Monter sous un plafond

Devine : Une somme qui monte

Une somme peut grandir toute sa vie sans jamais dépasser 2 : une vraie leçon de patience.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. On ajoute un terme positif à chaque rang, et l'on montrera plus bas que $S_n < 2$. Que devient (S_n) ?

A. Elle converge, vers une limite inférieure ou égale à 2.

Juste.

Croissante et majorée, elle se stabilise sous son plafond. Sa limite vérifie $\ell \leq 2$, par passage à la limite.

B. Elle tend vers $+\infty$, car on ajoute toujours un terme.

Faux.

Les termes ajoutés rétrécissent très vite : la somme reste sous 2.

C. Elle converge vers 2, son plafond.

Faux.

Un majorant n'est pas forcément la limite : 3 est aussi un majorant de (S_n).

D. Elle n'a pas de limite, faute de formule pour S_n.

Faux.

Le théorème de cette section conclut sans formule explicite.

Indice 1

Calcule $S_{n+1} - S_n$.

Indice 2

La suite est-elle majorée ?

Indice 3

Une suite qui monte sous un plafond peut-elle partir à l'infini ?

Correction

Pour tout entier $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$: (S_n) est croissante. Elle est majorée par 2.

Elle converge donc vers un réel ℓ, et $\ell \leq 2$ par passage à la limite.

Pourquoi est-ce vrai ? Une suite qui monte sans dépasser un plafond doit se tasser : c'est le théorème ci-dessous.

Théorème : Convergence d'une suite monotone et bornée

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démonstration

Idée de la preuve. Elle repose sur une propriété de $\mathbb{R}$ admise ici, hors du programme : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant, appelé sa borne supérieure. C'est la seule étape omise. **Étape 1.** Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ croissante et majorée, et ℓ le plus petit majorant de l'ensemble de ses termes. **Étape 2.** Soit $r > 0$. Le réel $\ell - r$ n'est pas un majorant : il existe un rang N tel que $u_N > \ell - r$. Pour $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N$, par récurrence sur n : c'est vrai pour $n = N$, et $u_{n+1} \geq u_n$

(F03). Donc $\ell - r < u_N \leq u_n \leq \ell$, donc $u_n \in]\ell - r, \ell + r[$. D'après F08, (u_n) tend vers ℓ. **Étape 3.** Si (u_n) est décroissante et minorée, $(-u_n)$ est croissante et majorée ; elle converge (étape 2), donc (u_n) aussi (F13).

Montrer qu'elle est majorée

Vérifie : Une étape à part

Dans l'esquisse, quelle étape n'est pas démontrée dans ce chapitre ?

A. Le fait que $\ell - r$ ne soit plus un majorant de l'ensemble des termes.

Faux.
Cela découle de la définition du plus petit majorant : un réel plus petit ne majore plus.

B. L'existence d'un plus petit majorant des termes.

Juste.
C'est une propriété de $\mathbb{R}$, admise et hors programme. Tout le reste est démontré.

C. L'inégalité $u_N \leq u_n$ pour $n \geq N$.

Faux.
Elle découle de la croissance, de proche en proche. Aucune propriété admise n'intervient.

D. Le cas d'une suite décroissante et minorée.

Faux.
Il se ramène au cas croissant, en changeant u_n en $-u_n$.

Indice 1
Relis la première phrase de l'esquisse.
Indice 2
Quelle propriété de $\mathbb{R}$ est citée sans preuve ?
Indice 3
Les étapes 1 à 3 s'appuient-elles sur autre chose ?

Correction
L'esquisse admet une seule chose : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ a un plus petit majorant.

Avec ce réel ℓ, la preuve est complète : $\ell - r$ n'est pas un majorant, un terme u_N le dépasse, et la croissance donne $\ell - r < u_n \leq \ell$ pour tout $n \geq N$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve repose sur une propriété de $\mathbb{R}$, admise : une partie non vide et majorée possède un plus petit majorant. C'est lui, la limite.

> Tout réel un peu plus petit n'est plus un majorant. Un terme le dépasse, et la croissance y entraîne tous les termes suivants.

Exemple : Un majorant par télescopage

Soit j un entier tel que $j \geq 2$. On a :

$$\frac{1}{j^2} < \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}.$$

Soit $n \geq 2$. Somme ces inégalités de $j = 2$ à $j = n$: les termes de droite se simplifient deux à deux, et

$$S_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

De plus, $S_1 = 1 < 2$. Ainsi (S_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge.

Où sont les termes ?

Une observation. $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{5}{4}$, $S_3 = \frac{49}{36}$: chaque terme est sous tous les suivants, donc sous la limite.

La somme $T_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, définie pour $n \geq 1$ et croissante elle aussi, n'a peut-être aucun plafond.

Pourquoi est-ce vrai qu'une suite croissante reste sous sa limite ? Et qu'elle part à l'infini si aucun plafond n'existe ?

Propriété : Position des termes d'une suite monotone par rapport à sa limite

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite convergente de limite ℓ.

- Si (u_n) est croissante, alors $u_n \leq \ell$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- Si (u_n) est décroissante, alors $u_n \geq \ell$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Démonstration

Étape 1. Supposons (u_n) croissante et fixons un entier $k \geq n_0$. Par récurrence sur $n \geq k$, $u_n \geq u_k$: c'est vrai pour $n = k$, et si $u_n \geq u_k$, alors $u_{n+1} \geq u_n \geq u_k$ (F03). **Étape 2.** D'après F19, appliquée avec $a = u_k$ et $p = k$, on obtient $\ell \geq u_k$. **Étape 3.** Cela vaut pour tout entier $k \geq n_0$. Le cas d'une suite décroissante se traite de la même façon, avec l'inégalité inverse.

Propriété : Suite monotone non bornée

- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration

Étape 1. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante et non majorée, et soit A un réel. **Étape 2.** Comme A n'est pas un majorant de la suite, il existe un rang $N \geq n_0$ tel que $u_N > A$. **Étape 3.** Pour tout $n \geq N$, la croissance donne $u_n \geq u_N > A$ (récurrence immédiate sur n, comme dans F23). Ainsi, tout intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes à partir du rang N : (u_n) tend vers $+\infty$ (F09). Si (u_n) est décroissante et non minorée, $(-u_n)$ est croissante et non majorée ; elle tend vers $+\infty$, donc (u_n) tend vers $-\infty$ (F09, avec $-A$ à la place de A).

Ce que disent les preuves

Vérifie : Un plafond ?

Pour $n \geq 1$, $T_{2n} - T_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$. Cette somme compte n termes, chacun au moins égal à $\dfrac{1}{2n}$. Qu'en conclure ?

A. (T_n) converge, puisque les termes ajoutés tendent vers 0.

Faux.

Des termes ajoutés qui tendent vers 0 ne suffisent pas : sur chaque bloc, leur somme reste au moins $\dfrac{1}{2}$.

B. (T_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

Faux.

$T_1 = 1$ dépasse déjà $\dfrac{1}{2}$. C'est l'écart $T_{2n} - T_n$ qui est minoré par $\dfrac{1}{2}$.

C. $T_{2n} - T_n \geq \dfrac{1}{2}$: (T_n) n'est pas majorée et tend vers $+\infty$.

Juste.

En doublant le rang, on gagne au moins $\dfrac{1}{2}$: aucun plafond ne résiste.

D. Toute suite croissante tend vers $+\infty$: c'est le cas de (T_n).

Faux.

Croissante ne suffit pas : (S_n) est croissante et converge. Il faut prouver qu'aucun plafond n'existe.

Indice 1

Minore chacun des n termes par $\dfrac{1}{2n}$.

Indice 2

Que gagne-t-on en passant du rang n au rang $2n$?

Indice 3

Par récurrence, minore T_{2^m}.

Correction

Soit $n \geq 1$. La somme $T_{2n} - T_n$ compte n termes, chacun au moins égal à $\dfrac{1}{2n}$:

$$T_{2n} - T_n \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par récurrence, $T_{2^m} \geq 1 + \dfrac{m}{2}$ pour tout entier naturel m. Aucun réel ne majore donc (T_n).

Conclusion. Croissante et non majorée, (T_n) tend vers $+\infty$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux preuves reposent sur la croissance.

Pour la position, on fixe un rang p : tous les termes suivants dépassent u_p, et le passage à la limite dans une inégalité donne $\ell \geq u_p$.

Sans plafond, un terme dépasse le seuil A, et la croissance y maintient tous les suivants.

Attention : Croissante ne veut pas dire infinie

Une suite croissante peut converger : (S_n) monte à chaque rang, et pourtant elle reste sous 2.

Pour conclure à une limite $+\infty$, prouve qu'elle n'est pas majorée, comme (T_n). Ou minore-la par une suite qui tend vers $+\infty$. « Elle augmente toujours » ne prouve rien.

Suites adjacentes

Deux suites face à face

Devine : Deux suites, un écart

On garde $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, et l'on pose $V_n = S_n + \dfrac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$. On a $V_1 = 2$, $V_2 = \dfrac{7}{4}$ et $V_3 = \dfrac{61}{36}$. Que penses-tu des deux suites ?

A. Elles montent toutes les deux.

Faux.
$V_1 = 2 > V_2 = \dfrac{7}{4} > V_3$: (V_n) descend.

B. Leur écart grandit.

Faux.
L'écart vaut $V_n - S_n = \dfrac{1}{n}$, qui diminue.

C. (V_n) tend vers 0, puisque $V_n - S_n = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0.

Faux.
C'est l'**écart** qui tend vers 0. V_n reste au-dessus de S_n, qui vaut au moins 1.

D. (S_n) monte, (V_n) descend, leur écart tend vers 0.

Juste.

Elles se rapprochent l'une de l'autre en sens contraires : elles vont se rejoindre.

Indice 1

Compare V_1, V_2 et V_3.

Indice 2

Calcule $V_n - S_n$.

Indice 3

Que devient cet écart quand n grandit ?

Correction

(S_n) est croissante. Soit $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} & V_{n+1} - V_n \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \\ &\quad - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Donc (V_n) est décroissante. Leur écart $V_n - S_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

Définition : Suites adjacentes

Deux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante, et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Exemple : Un premier couple

D'après le calcul précédent, (S_n) est croissante, (V_n) est décroissante, et $V_n - S_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

Les suites (S_n) et (V_n) sont donc **adjacentes**.

En clair : deux suites adjacentes avancent l'une vers l'autre, et l'écart qui les sépare tend vers 0.

Le théorème

Pourquoi est-ce vrai qu'elles ont une limite commune ? La suite croissante monte, mais elle ne peut pas doubler la décroissante. Elle est donc majorée, et elle converge.

Même chose pour l'autre, qui est minorée. Enfin, leur écart tend vers 0 : les deux limites coïncident.

Théorème : Théorème des suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante et $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite décroissante telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$. Alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ, et

$$u_n \leq \ell \leq v_n \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0.$$

Démonstration

Étape 1. Posons $w_n = v_n - u_n$. Comme $v_{n+1} \leq v_n$ et $u_{n+1} \geq u_n$, on a $w_{n+1} \leq w_n$: la suite (w_n) est décroissante, de limite 0. D'après F23, $w_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_n \leq v_n$, pour tout $n \geq n_0$. **Étape 2.** Pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$ (récurrence immédiate, comme dans F23) : (u_n) est croissante et majorée par v_{n_0}. De même, $v_n \geq u_n \geq u_{n_0}$: (v_n) est décroissante et minorée par u_{n_0}. D'après F22, elles convergent vers des réels ℓ et ℓ'. **Étape 3.** D'après F13, $\ell' - \ell = \lim(v_n - u_n) = 0$, donc $\ell = \ell'$. Enfin, F23 donne $u_n \leq \ell$ et $v_n \geq \ell$ pour tout $n \geq n_0$.

Vérifie : Le signe de l'écart

À l'étape 1, on montre que $w_n = v_n - u_n \geq 0$ pour tout n. Quel argument est utilisé ?

A. (w_n) est décroissante de limite 0 : elle reste au-dessus de sa limite.

Juste.

Une suite décroissante qui converge est au-dessus de sa limite, ici 0.

B. (w_n) tend vers 0, donc tous ses termes sont positifs ou nuls à partir du rang n_0.

Faux.

Une suite de limite 0 peut avoir des termes négatifs. C'est la décroissance qui garantit le signe.

C. $v_n \geq u_n$ par hypothèse.

Faux.

Ce n'est pas une hypothèse du théorème : c'est ce que l'étape 1 démontre.

D. (u_n) est croissante, donc $u_n \leq v_n$.

Faux.

La croissance de (u_n) seule ne compare pas u_n à v_n.

Indice 1

Calcule $w_{n+1} - w_n$.

Indice 2

Quelle est la limite de (w_n) ?

Indice 3

Où se trouvent les termes d'une suite décroissante par rapport à sa limite ?

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme (v_n) décroît et (u_n) croît :

$$\begin{aligned} & w_{n+1} - w_n \\ & = (v_{n+1} - v_n) \\ & \quad - (u_{n+1} - u_n) \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Donc (w_n) est décroissante, et elle converge vers 0. Une suite décroissante convergente reste au-dessus de sa limite : $w_n \geq 0$, soit $u_n \leq v_n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve enchaîne trois résultats du chapitre : la position d'une suite monotone par rapport à sa limite, la convergence d'une suite monotone et bornée, et les règles de calcul sur les limites, admises.

D'abord, $u_n \leq v_n$ pour tout n : l'écart décroît vers 0, il reste donc positif. Ensuite, chaque suite est bornée par le premier terme de l'autre, et converge. Enfin, les règles de calcul égalent les deux limites.

Exemple : Encadrer la limite

Appliqué à (S_n) et (V_n), le théorème donne une limite commune ℓ, avec $S_n \leq \ell \leq V_n$ pour tout $n \geq 1$. Au rang 3 :

$$\frac{49}{36} \leq \ell \leq \frac{61}{36}.$$

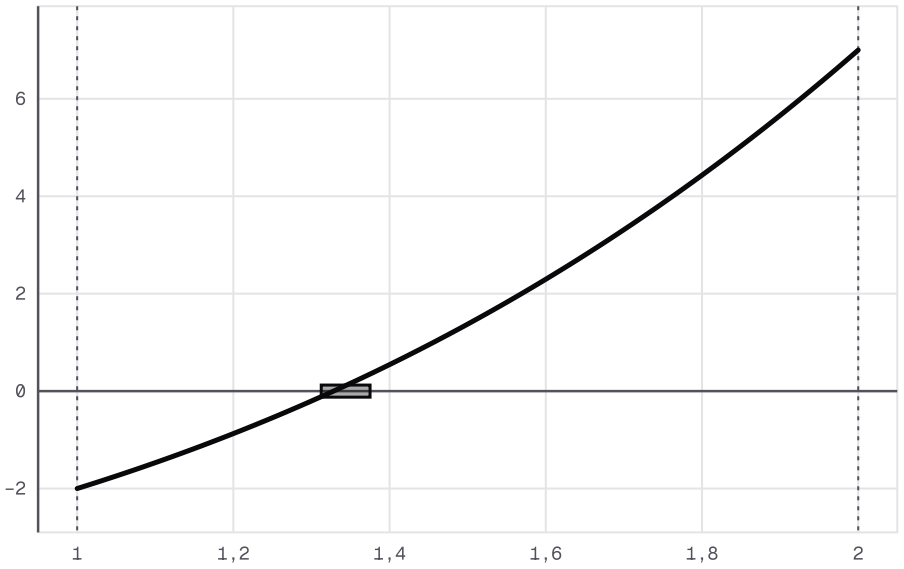
L'amplitude vaut $\frac{1}{3}$. Pour une amplitude au plus égale à $\frac{1}{100}$, il suffit d'aller au rang 100.

Retour sur la dichotomie

Méthode : Montrer que deux suites sont adjacentes

1. **Sens de variation.** Montre que l'une croît et que l'autre décroît.
2. **Écart.** Calcule ou majore leur différence, puis montre qu'elle tend vers 0.
3. **Conclusion.** Cite le théorème des suites adjacentes : limite commune ℓ, avec $u_n \leq \ell \leq v_n$.
4. **Encadrement.** Au rang n, l'amplitude de l'encadrement est l'écart $v_n - u_n$.

La dichotomie du chapitre précédent en est un exemple. La borne gauche G_n ne descend jamais, la borne droite D_n ne monte jamais. Partant de $[1, 2]$, leur écart vaut $D_n - G_n = \frac{1}{2^n}$, qui tend vers 0.



Courbe de f ------ Verticales x = a et x = b Intervalle final, sur l'axe des abscisses

Intervalles successifs, bornes arrondies vers l'extérieur

Étape	Intervalle	Milieu m	Signe de f(m)
1	[1,0000 ; 2,0000]	m ≈ 1,5000	positif (+)
2	[1,0000 ; 1,5000]	m ≈ 1,2500	négatif (–)
3	[1,2500 ; 1,5000]	m ≈ 1,3750	positif (+)
4	[1,2500 ; 1,3750]	m ≈ 1,3125	négatif (–)

Dichotomie pour l'équation x^3 + 2x - 5 = 0 sur [1, 2] : quatre étapes.

a = 1, b = 2.

Une racine de f appartient à l'intervalle [1,3125 ; 1,3750].

Attention : L'écart doit tendre vers zéro

Une suite croissante et une suite décroissante ne sont pas toujours adjacentes.

Prends $A_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, croissante, et $B_n = 3 + \dfrac{1}{n+1}$, décroissante. Leur écart vaut $B_n - A_n = 2 + \dfrac{2}{n+1}$: il tend vers 2, pas vers 0. Elles convergent, mais vers 1 et vers 3.

Vérifie toujours la limite de l'écart.

Limite de (f(u$_n$)) quand f est continue

Une fonction appliquée aux termes

Devine : L'arc tangente d'une suite

Pour tout entier naturel n, soit $\theta_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$. La suite (θ_n) tend vers 1. Vers quoi tend $(\arctan \theta_n)$?

A. 1

Faux.

C'est la limite de (θ_n). Il faut encore lui appliquer la fonction.

B. $\dfrac{\pi}{4}$

Juste.

$\arctan$ est continue en 1, et $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$: les images suivent les termes.

C. $\dfrac{\pi}{2}$

Faux.

$\dfrac{\pi}{2}$ est la limite de $\arctan x$ en $+\infty$. Or θ_n tend vers 1, pas vers $+\infty$.

D. Aucune limite, car (θ_n) n'atteint jamais 1

Faux.

Une suite n'a pas besoin d'atteindre sa limite. La continuité suffit.

Indice 1

Quelle est la limite de (θ_n) ?

Indice 2

La fonction $\arctan$ est-elle continue en ce point ?

Indice 3

Calcule $\arctan 1$.

Correction

(θ_n) tend vers 1, et $\arctan$ est continue en 1. Donc $(\arctan \theta_n)$ tend vers $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Pourquoi est-ce vrai ? La continuité en ℓ dit : si x est assez proche de ℓ, alors $f(x)$ est proche de $f(\ell)$. Or, à partir d'un rang, u_n est aussi proche de ℓ qu'on veut.

Donc $f(u_n)$ finit par être aussi proche de $f(\ell)$ qu'on veut. L'esquisse ci-dessous assemble ces deux phrases.

Théorème : Limite de (f(u$_n$)) lorsque f est continue

Soit I un intervalle, f une fonction définie sur I et (u_n) une suite dont tous les termes appartiennent à I. Si (u_n) converge vers un réel ℓ de I et si f est continue en ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Démonstration

Idée de la preuve. On relie la continuité en ℓ, lue par intervalles comme au chapitre précédent, à la définition F08. Cette lecture de la continuité est admise sans être redémontrée, y compris lorsque ℓ est une extrémité de I (continuité à droite ou à gauche). **Étape 1.** Soit J un intervalle ouvert de centre $f(\ell)$. Comme f est continue en ℓ, il existe un intervalle ouvert K de centre ℓ tel que $f(x) \in J$

pour tout $x \in K \cap I$. **Étape 2.** Comme (u_n) tend vers ℓ, il existe un rang N tel que $u_n \in K$ pour tout $n \geq N$ (F08) ; de plus, $u_n \in I$. Donc $f(u_n) \in J$ pour tout $n \geq N$: d'après F08, $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$.

Ce que dit la preuve

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On enchaîne deux « à partir de ». La continuité transforme l'intervalle visé autour de $f(\ell)$ en un intervalle K autour de ℓ. La convergence de (u_n) fournit un rang à partir duquel $u_n \in K$.

Les deux hypothèses servent : sans continuité en ℓ, la chaîne casse.

Vérifie : Le rôle de chaque hypothèse

Dans l'esquisse, pourquoi faut-il que $u_n \in I$ pour tout n ?

A. Pour que la suite (u_n) soit convergente.

Faux.

La convergence est une autre hypothèse. L'appartenance à I ne la donne pas.

B. Pour que ℓ soit dans I.

Faux.

C'est une hypothèse séparée : des termes dans I peuvent avoir une limite hors de I.

C. Pour que $f(u_n)$ soit défini et que la continuité en ℓ s'applique.

Juste.

La continuité en ℓ contrôle $f(x)$ pour $x \in K \cap I$. Un terme hors de I échapperait au contrôle.

D. Pour que f soit continue sur tout l'intervalle I, et pas seulement en ℓ.

Faux.

Seule la continuité en ℓ est supposée. Elle ne dépend pas des termes.

Indice 1

Où f est-elle définie ?

Indice 2

Pour quels x la continuité en ℓ donne-t-elle $f(x) \in J$?

Indice 3

Les termes doivent être à la fois dans K et dans I.

Correction

Les termes $f(u_n)$ n'ont de sens que si $u_n \in I$. Et la continuité en ℓ donne $f(x) \in J$ seulement pour $x \in K \cap I$.

Comme $u_n \in K$ à partir d'un rang et $u_n \in I$ toujours, on obtient $f(u_n) \in J$ à partir de ce rang.

Exemple : Sans continuité, rien ne va

Soit χ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La suite de terme $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0, avec des termes strictement positifs. Donc $\chi\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$ pour tout entier naturel n : la suite des images tend vers 1.

Or $\chi(0) = 0$. La fonction χ n'est pas continue en 0, et la conclusion tombe.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite qui se nourrit d'elle-même

Devine : Deux points fixes

Petit rappel de première : une suite $u_{n+1} = g(u_n)$ se calcule de proche en proche. On te donne la fonction ; ton travail est de lui faire dire où va la suite.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2+6}{5}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Alors $u_1 = \dfrac{6}{5}$ et $u_2 = \dfrac{186}{125} = 1{,}488$. Les solutions de $g(x) = x$ sont 2 et 3. La courbe qui suit place les points (u_0, u_1) et (u_1, u_2). Où vont les termes ?

A. Ils montent vers 3.

Faux.

Pour atteindre 3, il faudrait franchir 2. Or g envoie $[0, 2]$ dans lui-même : les termes n'en sortent pas.

B. Ils tendent vers $+\infty$.

Faux.

Les termes restent dans $[0, 2]$: la suite est bornée.

C. Ils alternent d'un côté et de l'autre de 2.

Faux.

$u_0 \leq u_1 \leq u_2$: la suite monte, sans changer de côté.

D. Ils montent vers 2 sans le dépasser.

Juste.

On le démontre ci-dessous : $[0, 2]$ est stable par g, et la suite est croissante.

Indice 1

Compare u_0, u_1 et u_2.

Indice 2

Calcule $g(0)$ et $g(2)$.

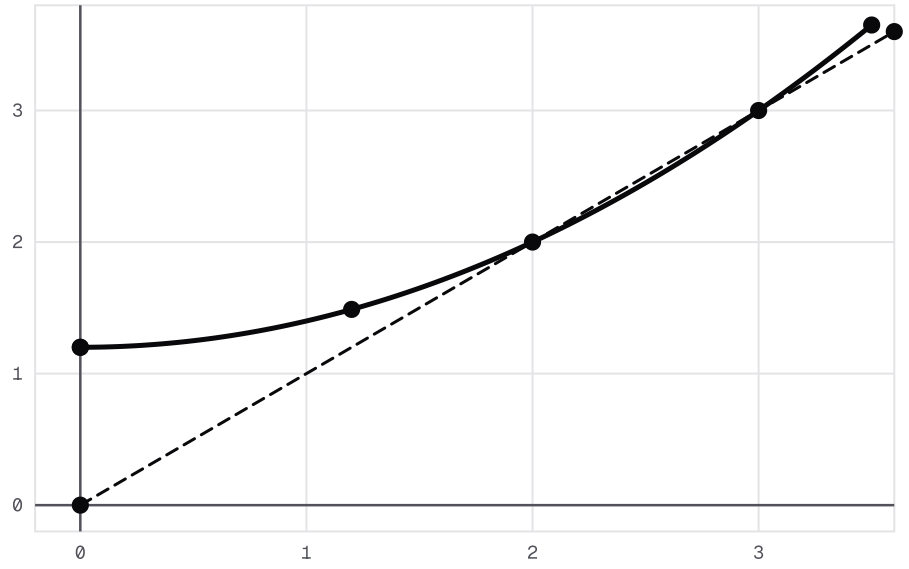
Indice 3

Les termes peuvent-ils dépasser 2 ?

Correction

Les termes montent : $0 < 1{,}2 < 1{,}488$. Ils restent sous 2, car g envoie $[0,2]$ dans $[0,2]$.

Pourquoi est-ce vrai pour tous les rangs ? Les deux énoncés qui suivent la courbe le démontrent par récurrence.



$\mathcal{C}_g$ $y = x$ Point plein (u_0, u_1) Point plein (u_1, u_2) Point plein $(2,2)$ Point plein $(3,3)$ Point du graphe

Courbe de g(x) = (x^2 + 6)/5 et droite y = x : les points fixes 2 et 3 sont leurs points d'intersection.

Intervalle stable et monotonie

Propriété : Intervalle stable et termes d'une suite récurrente

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite est bien définie et $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Étape 1. Initialisation. Par hypothèse, $u_0 \in I$. **Étape 2. Hérédité.** Soit n un entier naturel tel que u_n soit défini et appartienne à I. Comme f est définie sur I, le réel $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini, et il appartient à $f(I)$. Or $f(I) \subset I$, donc $u_{n+1} \in I$. **Étape 3. Conclusion.** D'après le principe de récurrence, u_n est défini et appartient à I pour tout entier naturel n.

Propriété : Suite récurrente associée à une fonction croissante

Soit I un intervalle, f une fonction croissante sur I telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (u_n) est monotone :

- si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante ;
- si $u_0 \geq u_1$, la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration

Étape 1. Initialisation. Supposons $u_0 \leq u_1$. La propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ » est vraie pour $n = 0$. **Étape 2. Hérédité.** Soit n un entier naturel tel que $u_n \leq u_{n+1}$. Ces deux réels appartiennent à I (F28) et f est croissante sur I, donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. **Étape 3. Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n : (u_n) est croissante. Le cas $u_0 \geq u_1$ se traite de la même façon, avec les inégalités renversées.

Vérifie : Le cœur de l'hérédité

Dans l'hérédité de la monotonie, on passe de $u_n \leq u_{n+1}$ à $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Quel argument permet ce passage ?

A. f est croissante sur I, qui contient u_n et u_{n+1}.

Juste.
Une fonction croissante conserve l'ordre de deux points de I. L'intervalle stable garantit qu'ils y sont.

B. $f(x) \geq x$ pour tout x de I, ce qui fait monter chaque terme.

Faux.
Ce n'est pas une hypothèse de l'énoncé. L'hérédité n'utilise que la croissance de f.

C. f est continue sur I.

Faux.
La continuité ne figure pas dans les hypothèses. Elle ne sert qu'au calcul de la limite.

D. La suite est majorée.

Faux.
La majoration n'intervient pas dans la monotonie.

Indice 1
Relis l'hypothèse de récurrence.
Indice 2
Applique f aux deux membres de $u_n \leq u_{n+1}$.
Indice 3
Pourquoi peut-on appliquer la croissance de f à ces deux réels ?

Correction

Par hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$. Ces deux réels sont dans I, par stabilité. Comme f est croissante sur I, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux preuves sont des récurrences. La stabilité $f(I) \subset I$ garde chaque terme dans I. La croissance de f recopie l'ordre de deux termes sur les deux termes suivants.

Ainsi, comparer u_0 et u_1 suffit pour connaître le sens de variation.

Exemple : Retour sur l'exemple

Pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{2x}{5}$, positif sur $[0,2]$: g est croissante sur $[0,2]$. Elle y est continue, donc :

$$\begin{aligned} g([0,2]) &= [g(0), g(2)] \\ &= \left[\frac{6}{5}, 2\right] \subset [0,2]. \end{aligned}$$

L'intervalle $I = [0,2]$ est stable, et $u_0 = 0 \in I$. De plus, $u_0 = 0 \leq u_1 = \dfrac{6}{5}$: la suite est croissante. Croissante et majorée par 2, elle converge.

Pourquoi est-ce vrai que sa limite vérifie $g(\ell) = \ell$? Parce que (u_{n+1}) et $(g(u_n))$ sont une seule et même suite.

La limite est un point fixe

Théorème : Limite d'une suite récurrente convergente : point fixe

Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) converge vers un réel ℓ **qui appartient à** I, alors $f(\ell) = \ell$. Lorsque I est un segment $[a,b]$, la condition $\ell \in I$ est toujours remplie.

Démonstration

Idée de la preuve. On calcule de deux façons la limite de la suite (u_{n+1}). On admet sans le détailler qu'un décalage des rangs ne change pas la limite. **Étape 1.** La suite (u_{n+1}) a la même limite ℓ que (u_n) : ses termes sont ceux de (u_n) à partir du rang 1. **Étape 2.** D'après F28, $u_n \in I$ pour tout n ; comme $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ, F27 donne $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. **Étape 3.** Or $u_{n+1} = f(u_n)$: par unicité de la limite (F11), $f(\ell) = \ell$. Si $I = [a,b]$, l'encadrement $a \leq u_n \leq b$ donne $a \leq \ell \leq b$ par F19.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On calcule la limite de (u_{n+1}) de deux façons, puis on invoque l'unicité de la limite.

Deux hypothèses sont indispensables : f continue en ℓ, et $\ell \in I$. La méthode plus bas dit comment les vérifier.

À toi : Ta rédaction

La suite (u_n) de l'exemple est croissante et majorée par 2. Rédige la fin de l'étude : montre qu'elle converge, puis calcule sa limite. Rédige, puis compare.

Indice 1
Cite le théorème des suites monotones pour la convergence.
Indice 2
Passe à la limite dans $0 \leq u_n \leq 2$, puis contrôle les deux conditions du résultat sur le point fixe : continuité et appartenance à l'intervalle.
Indice 3
Résous $g(\ell) = \ell$ et garde la solution compatible avec l'encadrement.

Réponse
Convergence. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge vers un réel ℓ.

Position de la limite. Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 2$; par passage à la limite, $\ell \in [0, 2]$.

Équation. La fonction g est continue sur l'intervalle stable $[0, 2]$, qui contient ℓ. Le résultat sur la limite d'une suite récurrente qui converge s'applique donc :

$$\begin{aligned} & g(\ell) = \ell \\ \Leftrightarrow\ & (\ell - 2)(\ell - 3) = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $\ell \leq 2$, la valeur 3 est exclue : $\ell = 2$.

Attention : Prouver la convergence d'abord

L'équation $g(\ell) = \ell$ donne des limites **possibles**, jamais une convergence.

Garde g, mais pars de $v_0 = 4$, avec $v_{n+1} = g(v_n)$ pour tout entier naturel n. On trouve $v_1 = \dfrac{22}{5}$, et la suite croît. Si elle convergeait, sa limite serait au moins 4, donc ni 2 ni 3. Elle ne converge donc pas : croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.

Établis toujours la convergence avant de passer à la limite.

Méthode : Étudier une suite récurrente

1. **Intervalle stable.** Montre que $f(I) \subset I$, par exemple avec les variations de f ; alors $u_n \in I$ pour tout n.

2. **Sens de variation.** Étudie le signe de $f(x) - x$ sur I, ou compare u_0 et u_1 si f est croissante sur I.
3. **Convergence.** Monotone et bornée, la suite converge.
4. **Limite.** Vérifie que f est continue sur I et que $\ell \in I$, puis résous $f(\ell) = \ell$.

Pourquoi vérifier que la limite est dans I ? Soit λ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Sur $I =]0, 1]$, λ est continue et $\lambda(I) \subset I$. Avec $u_0 = 1$, on obtient $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, qui tend vers 0.

Or $0 \notin I$, et $\lambda(0) = 1 \neq 0$: la limite n'est pas un point fixe.

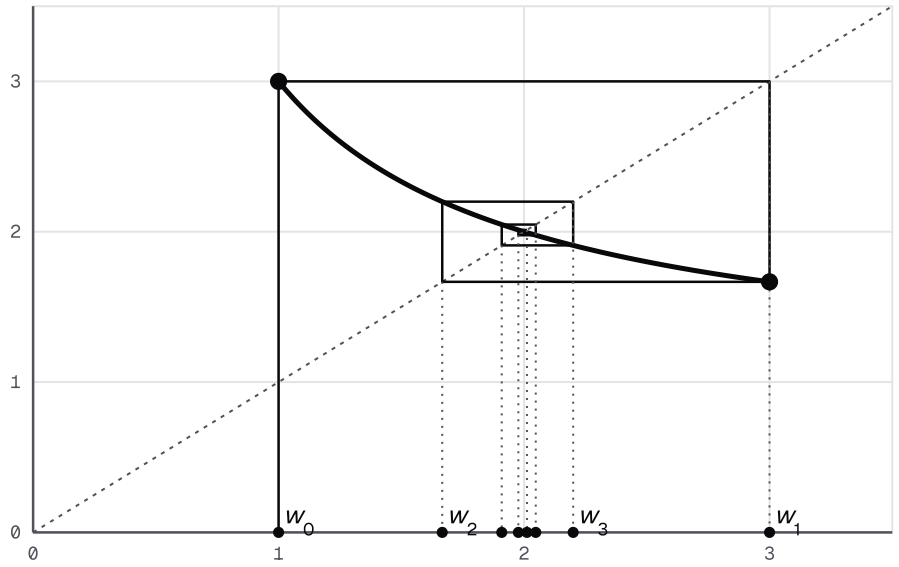
Quand la fonction décroît

Un cas numérique. Soit ψ la fonction définie sur $[1, 3]$ par $\psi(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. Elle est décroissante sur $[1, 3]$, avec $\psi([1, 3]) = \left[\dfrac{5}{3}, 3\right] \subset [1, 3]$. Avec $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \psi(w_n)$:

n	0	1	2	3	4
w_n	1	3	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{11}{5}$	$\dfrac{21}{11}$

Les termes sautent d'un côté à l'autre de 2. Les rangs pairs montent, les rangs impairs descendent.

Pourquoi est-ce vrai ? La composée $\psi \circ \psi$ est croissante.



$\mathcal{C}_\psi$ ● Point du graphe ● Termes (w_n) , rabattus sur l'axe des abscisses —— Construction des termes
------ Droite d'équation y = x

Toile des termes de w pour ψ(x) = 1 + 2/x : les termes sautent d'un côté à l'autre de 2 en s'en rapprochant.

Propriété : Suite récurrente associée à une fonction décroissante

Soit I un intervalle, f une fonction décroissante sur I telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante.

Démonstration

Étape 1. Posons $g = f \circ f$. Si x et y sont dans I avec $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$; comme $f(x)$ et $f(y)$ sont dans I et que f est décroissante, $g(x) \leq g(y)$. Ainsi g est croissante sur I ; de plus $g(I) = f(f(I)) \subset f(I) \subset I$. **Étape 2.** Posons $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$. Alors $a_0 = u_0$ et $b_0 = u_1$ sont dans I (F28), $a_{n+1} = f(f(u_{2n})) = g(a_n)$ et $b_{n+1} = g(b_n)$. D'après F30, appliquée à g, les suites (a_n) et (b_n) sont monotones. **Étape 3.** Si (a_n) est croissante, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$; f étant décroissante, $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$, soit $b_n \geq b_{n+1}$: (b_n) est décroissante. Le cas (a_n) décroissante se traite de la même façon.

Vérifie : D'une sous-suite à l'autre

Dans la preuve, on sait que (u_{2n}) est croissante. Comment obtient-on le sens de variation de (u_{2n+1}) ?

A. Les deux sous-suites ont forcément le même sens de variation, comme deux moitiés d'une même suite.

Faux.

Non : une fonction décroissante renverse l'ordre. Les sens sont opposés.

B. On applique f, décroissante, à $u_{2n} \leq u_{2n+2}$: l'inégalité se renverse.

Juste.

$f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$, soit $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$: les rangs impairs décroissent.

C. En comparant u_0 et u_1.

Faux.

Cette comparaison donne le sens de (u_n) quand f est croissante, pas ici.

D. On utilise que $f \circ f$ est décroissante.

Faux.

La composée de deux fonctions décroissantes est croissante : c'est l'étape 1 de la preuve.

Indice 1

Écris l'inégalité $u_{2n} \leq u_{2n+2}$.

Indice 2

Applique-lui f.

Indice 3

Que fait une fonction décroissante à une inégalité ?

Correction

De $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ et de la décroissance de f sur I, on tire $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$, c'est-à-dire $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$. La suite (u_{2n+1}) est décroissante.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On se ramène au cas croissant en regardant un terme sur deux : $f \circ f$ est croissante et laisse I stable. Puis une application de f, décroissante, renverse l'ordre. Les deux sous-suites varient en sens contraires.

Exemple : Deux sous-suites

Pour (w_n) : $w_0 = 1 \leq w_2 = \dfrac{5}{3}$, donc (w_{2n}) est croissante, et (w_{2n+1}) est décroissante. Les deux sont bornées par 1 et 3 : elles convergent.

Mais (w_n) elle-même n'est pas monotone, puisque $w_0 < w_1$ et $w_1 > w_2$. Le sens de variation se lit sur chaque sous-suite, pas sur la suite entière.

Suites auxiliaires : récurrences affines et homographiques

Une récurrence affine

Devine : Les premiers termes

Soit (y_n) la suite définie par $y_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = -\frac{1}{3} y_n + 4.$$

On calcule $y_1 = \dfrac{11}{3}$, $y_2 = \dfrac{25}{9}$ et $y_3 = \dfrac{83}{27}$. Que remarques-tu ?

A. La suite est croissante.

Faux.

$y_2 < y_1$: elle ne l'est pas. Elle n'est pas décroissante non plus, puisque $y_1 > y_0$.

B. Les termes s'approchent de 4.

Faux.

4 est la constante ajoutée. La valeur visée vérifie $3 = -\dfrac{1}{3} \times 3 + 4$.

C. Les termes sautent de part et d'autre de 3, en s'en rapprochant.

Juste.

$y_1 - 3 = \dfrac{2}{3}$, $y_2 - 3 = -\dfrac{2}{9}$, $y_3 - 3 = \dfrac{2}{27}$: l'écart change de signe et se divise par 3.

D. La suite est arithmétique, puisque l'on ajoute toujours 4 à chaque rang.

Faux.

Les écarts $y_1 - y_0 = \dfrac{8}{3}$ et $y_2 - y_1 = -\dfrac{8}{9}$ diffèrent.

Indice 1

Calcule $y_1 - 3$, $y_2 - 3$ et $y_3 - 3$.

Indice 2

Compare chaque écart au précédent.

Indice 3

Par quel nombre passe-t-on d'un écart au suivant ?

Correction

Les écarts à 3 valent -2, $\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{2}{9}$ et $\dfrac{2}{27}$: chacun est le précédent multiplié par $-\dfrac{1}{3}$.

La suite n'est pas monotone, et le théorème des suites monotones ne s'applique pas. Une suite auxiliaire va conclure.

Méthode : Passer par une suite auxiliaire

1. **Valeur fixe.** Pour $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $a \neq 1$, cherche le réel α tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. **Suite auxiliaire.** Pose $v_n = u_n - \alpha$. En retranchant les deux égalités, $v_{n+1} = a\, v_n$: la suite (v_n) est géométrique.
3. **Terme général.** $v_n = v_0\, a^n$, donc $u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)\, a^n$.
4. **Limite.** Conclus avec la limite de (a^n).

Si l'énoncé propose une autre suite auxiliaire, vérifie d'abord qu'elle est bien définie, puis qu'elle est géométrique.

Exemple : La méthode sur l'exemple

Ici $a = -\dfrac{1}{3}$ et $b = 4$. L'équation $\alpha = -\dfrac{\alpha}{3} + 4$ donne $\alpha = 3$.

Posons $z_n = y_n - 3$ pour tout entier naturel n. Alors :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= -\frac{1}{3} y_n + 4 - 3 \\ &= -\frac{1}{3}(y_n - 3) \\ &= -\frac{1}{3} z_n. \end{aligned}$$

La suite (z_n) est géométrique, de raison $-\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $z_0 = -2$. Donc, pour tout entier naturel n :

$$y_n = 3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 3$.

Une relation homographique

Exemple : Une suite auxiliaire proposée

Soit $H_0 = 2$ et $H_{n+1} = \dfrac{5H_n - 3}{H_n + 1}$ pour tout entier naturel n.

La fonction $x \mapsto 5 - \dfrac{8}{x+1}$, égale à $x \mapsto \dfrac{5x-3}{x+1}$, est croissante et envoie $]1, 3[$ dans $]1, 3[$. Par récurrence, $1 < H_n < 3$ pour tout n.

En particulier, $H_n \neq 1$: la suite (Z_n) définie par $Z_n = \dfrac{H_n - 3}{H_n - 1}$, proposée par l'énoncé, est bien définie.

Premier calcul, en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} &H_{n+1} - 3 \\ &= \frac{5H_n - 3 - 3(H_n + 1)}{H_n + 1} \\ &= \frac{2(H_n - 3)}{H_n + 1}. \end{aligned}$$

Vérifie : Le second calcul

Que vaut $H_{n+1} - 1$? Déduis-en Z_{n+1} en fonction de Z_n.

A. $H_{n+1} - 1 = \dfrac{4H_n - 3}{H_n + 1}$, donc (Z_n) n'est pas géométrique.
Faux.

Le -1 s'écrit $-\dfrac{H_n+1}{H_n+1}$: on retranche aussi 1 au numérateur, d'où $4H_n-4$.

B. $H_{n+1}-1=\dfrac{4(H_n-1)}{H_n+1}$, donc $Z_{n+1}=2Z_n$.

Faux.

Le quotient vaut $\dfrac{2(H_n-3)}{4(H_n-1)}$: la raison est $\dfrac{2}{4}$, pas $\dfrac{4}{2}$.

C. $H_{n+1}-1=\dfrac{5(H_n-1)}{H_n+1}$, donc $Z_{n+1}=\dfrac{2}{5}Z_n$.

Faux.

Développe : $5H_n-3-H_n-1=4H_n-4$, et non $5H_n-5$.

D. $H_{n+1}-1=\dfrac{4(H_n-1)}{H_n+1}$, donc $Z_{n+1}=\dfrac{1}{2}Z_n$.

Juste.

$5H_n-3-(H_n+1)=4H_n-4$. Le quotient des deux calculs donne la raison $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Indice 1

Réduis au même dénominateur H_n+1.

Indice 2

Le numérateur vaut $5H_n-3-(H_n+1)$.

Indice 3

Divise le premier calcul par le second.

Correction

Soit $n\in\mathbb{N}$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}H_{n+1}-1&=\frac{5H_n-3-(H_n+1)}{H_n+1}\\&=\frac{4(H_n-1)}{H_n+1}.\end{aligned}$$

En divisant les deux calculs :

$$\begin{aligned}Z_{n+1}&=\frac{2(H_n-3)}{4(H_n-1)}\\&=\frac{1}{2}Z_n.\end{aligned}$$

La suite (Z_n) est géométrique, de raison $\dfrac{1}{2}$, avec $Z_0=-1$: $Z_n=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, qui tend vers 0.

De $Z_n(H_n-1)=H_n-3$ et $Z_n\neq 1$, on tire $H_n=\dfrac{3-Z_n}{1-Z_n}$, qui tend vers 3.

Majorer l'écart pas à pas

Méthode : Conclure par une majoration de l'écart

1. **Inégalité de départ.** Établis, ou lis dans l'énoncé, une inégalité $|u_{n+1}-\ell|\leq k|u_n-\ell|$ valable pour tout n, avec $0\leq k<1$.

2. **Récurrence.** Déduis-en $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

3. **Limite.** (k^n) tend vers 0, car $0 \leq k < 1$; la majoration de l'écart conclut.

Dans ce chapitre, l'inégalité de départ vient d'un calcul algébrique. Au chapitre suivant, un autre outil la fournira.

Exemple : Un écart divisé par une constante

Soit $W_0 = 3$ et $W_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{W_n}$ pour tout entier naturel n. Une récurrence montre que $\dfrac{3}{2} \leq W_n \leq 3$ pour tout n.

La valeur visée est 2. On calcule :

$$W_{n+1} - 2 = 1 - \frac{2}{W_n} = \frac{W_n - 2}{W_n}.$$

Comme $W_n \geq \dfrac{3}{2}$, on a $\dfrac{1}{W_n} \leq \dfrac{2}{3}$, donc :

$$|W_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |W_n - 2|.$$

Ici, $k = \dfrac{2}{3}$.

À toi : Termine la rédaction

On sait que $W_0 = 3$ et que, pour tout entier naturel n, $|W_{n+1} - 2| \leq \dfrac{2}{3} |W_n - 2|$.

Montre que $|W_n - 2| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ pour tout n, puis conclus. Rédige, puis compare.

Indice 1

Initialisation : $|W_0 - 2| = 1$.

Indice 2

Hérédité : multiplie l'hypothèse de récurrence par $\dfrac{2}{3}$.

Indice 3

$0 < \dfrac{2}{3} < 1$: quelle est la limite de $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$?

Réponse

Soit $P(n)$: « $|W_n - 2| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ».

Initialisation. $|W_0 - 2| = 1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Par l'inégalité de départ, puis l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |W_{n+1}-2| &\leq \frac{2}{3}|W_n-2| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Limite. Comme $0<\dfrac{2}{3}<1$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0 : par majoration de l'écart, (W_n) converge vers 2.

Suites implicites

Une suite définie par une équation

Devine : Une racine qui bouge

Voici une suite que personne ne sait écrire, et que tu vas pourtant étudier.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^3 + nx - 1$. L'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution dans $[0, 1]$, notée x_n. Quand n augmente, comment se déplace x_n ?

A. Il diminue, vers 0.

Juste.
Plus n est grand, plus le terme nx pèse : x doit être petit pour que $x^3 + nx$ reste égal à 1.

B. Il augmente, vers 1.

Faux.
Si x_n approchait 1, $f_n(x_n)$ serait proche de n, loin de 0.

C. Il reste le même pour tout n.

Faux.
Une même valeur $c > 0$ donnerait $c^3 + nc = 1$ pour tout n : impossible, puisque nc grandit.

D. On ne peut rien dire sans la valeur exacte de x_n.

Faux.
On étudie la suite sans jamais calculer x_n : c'est tout l'intérêt de la méthode.

Indice 1
Isole nx_n dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$.
Indice 2
$nx_n = 1 - x_n^3$, et $x_n \geq 0$.
Indice 3
Majore x_n par une expression en n.

Correction
De $f_n(x_n) = 0$, on tire $nx_n = 1 - x_n^3 \leq 1$, donc $x_n \leq \dfrac{1}{n}$.

Quand n grandit, x_n est poussé vers 0. La suite de la section le démontre, étape par étape.

Une **suite implicite** est définie par une équation : pour chaque n, x_n est l'unique solution de $f_n(x) = 0$ dans un intervalle. On ne connaît pas x_n, mais on peut l'étudier.

Ce type de suite figure dans 5 des 16 sujets consultés : existence, sens de variation, convergence, puis limite.

Méthode : Étudier une suite implicite

1. **Existence et unicité.** Montre que f_n est continue et strictement monotone sur l'intervalle, et que 0 est entre les images des bornes. Le théorème de la bijection, vu au chapitre précédent, donne une unique solution x_n.
2. **Sens de variation.** Calcule $f_{n+1}(x_n)$, puis compare-le à $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. La monotonie de f_{n+1} permet de comparer x_n et x_{n+1}.
3. **Convergence.** La suite est monotone. Si elle est bornée, par les bornes de l'intervalle quand il est borné, ou sinon par un encadrement à établir, elle converge.
4. **Limite.** Encadre x_n, ou passe à la limite dans une relation.

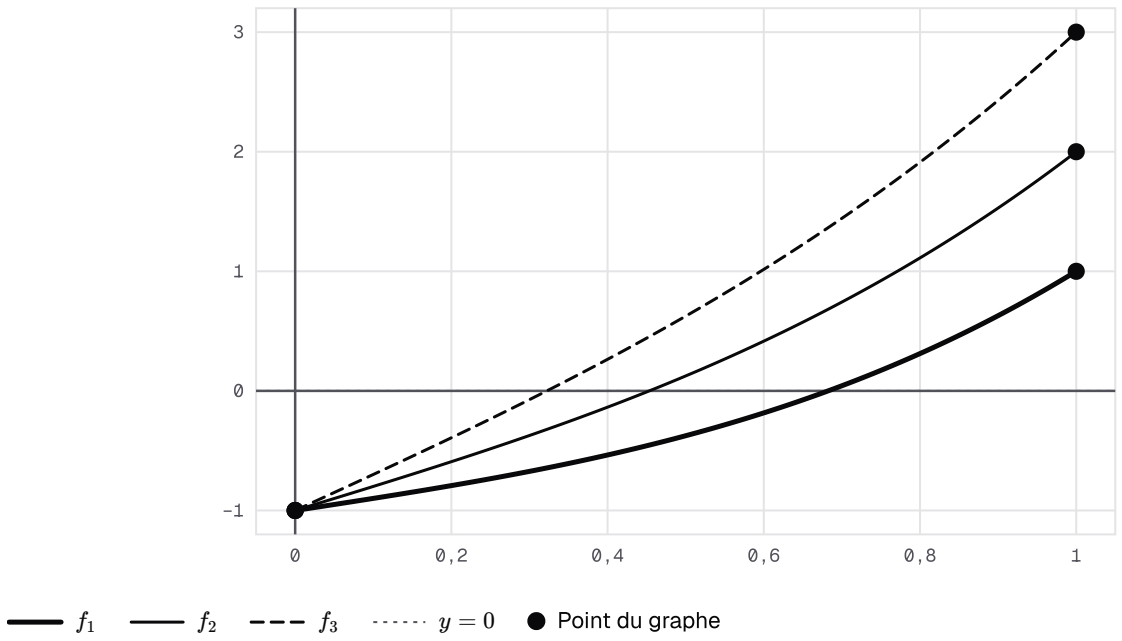
Existence et sens de variation

Exemple : Étape 1 : une seule solution

Soit n un entier tel que $n \geq 1$. La fonction f_n est un polynôme, donc elle est continue sur $[0, 1]$. Pour tout réel x, $f_n'(x) = 3x^2 + n > 0$: f_n est strictement croissante.

De plus, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n > 0$. Donc f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[-1, n]$, qui contient 0.

Conclusion. L'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n dans $[0, 1]$, et $0 < x_n < 1$.



Courbes de f_1, f_2 et f_3 sur [0, 1] : chacune coupe l'axe des abscisses en x_n, de plus en plus près de 0.

Exemple : Étape 2 : comparer deux rangs

Calcule $f_{n+1}(x_n)$, en faisant apparaître $f_n(x_n) = 0$:

$$\begin{aligned} & f_{n+1}(x_n) \\ & = x_n^3 + (n+1)x_n - 1 \\ & = f_n(x_n) + x_n = x_n. \end{aligned}$$

Comme $x_n > 0$, on obtient $f_{n+1}(x_n) > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Reste à en tirer l'ordre de x_n et de x_{n+1}.

Vérifie : Le bon argument

On sait que $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$. Pourquoi peut-on conclure que $x_n > x_{n+1}$?

A. Parce que f_{n+1} est continue.

Faux.

La continuité garantit l'existence de la solution, pas l'ordre entre deux antécédents.

B. Parce que f_{n+1} est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Juste.

Une fonction strictement croissante range les antécédents dans le même ordre que les images.

C. Parce que $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour $x > 0$.

Faux.

Cette inégalité a servi à calculer $f_{n+1}(x_n)$. Comparer x_n et x_{n+1} demande la monotonie.

D. Parce que la suite (x_n) est bornée, minorée par 0 et majorée par 1.

Faux.

Être bornée ne dit rien de l'ordre de deux termes consécutifs.

Indice 1
x_n et x_{n+1} sont dans $[0,1]$.
Indice 2
Que dirait-on des images si l'on avait $x_n \leq x_{n+1}$?
Indice 3
Raisonne par l'absurde avec la monotonie de f_{n+1}.

Correction
Les réels x_n et x_{n+1} sont dans $[0,1]$, où f_{n+1} est strictement croissante.

Si l'on avait $x_n \leq x_{n+1}$, on aurait $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$, ce qui est exclu.

Conclusion. $x_n > x_{n+1}$: la suite (x_n) est strictement décroissante.

Convergence et limite

À toi : Ta rédaction

Rédige les étapes 3 et 4 : montre que (x_n) converge, puis encadre x_n pour trouver sa limite. Rédige, puis compare.

Indice 1
(x_n) est décroissante : quel minorant connais-tu ?
Indice 2
Isole nx_n dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$.
Indice 3
Utilise $0 < x_n < 1$ pour encadrer nx_n, puis x_n.

Réponse
Convergence. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge.

Encadrement. Soit $n \geq 1$. De $f_n(x_n) = 0$, on tire $nx_n = 1 - x_n^3$. Or $0 < x_n < 1$, donc $0 < nx_n < 1$, soit :

$$0 < x_n < \frac{1}{n}.$$

Conclusion. Par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Exemple **: Bonus : une limite plus fine**

Pour aller plus loin, sans que ce soit indispensable. On a $nx_n = 1 - x_n^3$. Comme (x_n) tend vers 0, (x_n^3) aussi. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = 1$.

En fin de problème, ce type de question demande de réutiliser une relation déjà établie.

Coin examen : une suite récurrente de bout en bout

Exemple : Le problème

Au bac, une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ est étudiée dans 9 des 16 sujets consultés, dans le prolongement de l'étude d'une fonction. Dans 7 des 16 sujets consultés, l'énoncé écrit « Montrer par récurrence », pour $0{,}5$ point.

La calculatrice est interdite. Le barème entre parenthèses est indicatif.

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$, et (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Exemple : Question 1

1. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n < 3$ pour tout entier naturel n (0,5 point).

Pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 4 - \dfrac{5}{x+2}$: f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Initialisation. $u_0 = 1$, et $1 \leq 1 < 3$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $1 \leq u_n < 3$. La stricte croissance de f donne $f(1) \leq f(u_n) < f(3)$, avec $f(1) = \dfrac{7}{3} \geq 1$ et $f(3) = 3$. Donc $1 \leq u_{n+1} < 3$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $1 \leq u_n < 3$ pour tout entier naturel n.

Exemple : Question 2

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante (0,5 point).

Soit n un entier naturel. On réduit au même dénominateur, puis on factorise le numérateur :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n + 3 - u_n(u_n+2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{(3-u_n)(u_n+1)}{u_n+2}. \end{aligned}$$

D'après la question 1, $1 \leq u_n < 3$: le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. Donc $u_{n+1} > u_n$.

Conclusion. La suite (u_n) est strictement croissante.

Exemple : Question 3

3. En déduire que (u_n) converge, puis calculer sa limite (0,75 point).

Convergence. La suite est croissante et majorée par 3 : elle converge vers un réel ℓ.

Position de la limite. Par passage à la limite dans $1 \leq u_n \leq 3$, on a $\ell \in [1, 3]$.

Équation. L'intervalle $[1, 3]$ est stable par f, puisque $f([1, 3]) = \left[\frac{7}{3}, 3\right]$, et f y est continue. Donc $f(\ell) = \ell$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 3)(\ell + 1) = 0$.

Conclusion. Comme $\ell \geq 1$, $\ell = 3$: la suite (u_n) converge vers 3.

À toi : Ta rédaction

4. Montrer que $3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - u_n)$ pour tout n, puis que $0 < 3 - u_n \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Retrouver la limite de (u_n) (0,75 point).

Rédige, puis compare.

Indice 1
Réduis $3 - f(u_n)$ au même dénominateur.
Indice 2
Tu dois obtenir $\frac{3 - u_n}{u_n + 2}$, avec $u_n + 2 \geq 3$.
Indice 3
Rédige une récurrence en trois temps, puis utilise la limite de $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

Réponse
Inégalité. Soit n un entier naturel. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} 3 - u_{n+1} &= 3 - \frac{4u_n + 3}{u_n + 2} \\ &= \frac{3 - u_n}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Comme $u_n \geq 1$, on a $u_n + 2 \geq 3$, et $3 - u_n > 0$. Donc :

$$0 < 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - u_n).$$

Récurrence. Soit $P(n)$: « $0 < 3 - u_n \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ».

- *Initialisation.* $3 - u_0 = 2 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^0$, et $2 > 0$.
- *Hérédité.* Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie. L'inégalité précédente et l'hypothèse de récurrence donnent $0 < 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3} \times 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.
- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Limite. Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, $2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0. Par majoration de l'écart, (u_n) converge vers 3.

> Tu sais maintenant mener seul l'étude complète d'une suite récurrente : intervalle stable, monotonie, limite, et même la vitesse de convergence.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Suites numériques » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)