BURHAN

Structures algébriques : groupes, anneaux, corps : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/structures-algebriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Structures algébriques : groupes, anneaux, corps	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Deux lois sur $\mathbb{C}$ organisées autour du nombre i

Sur $\mathbb{C}$, on définit deux lois de composition interne par

$$z * w = z + w - i$$

et

$$z \top w = \frac{zw - iz - iw - 1}{2} + i.$$

On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

On rappelle que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif. On rappelle aussi la caractérisation suivante, pour un ensemble K muni de deux lois $*$ et $\top$. Supposons que :

- $(K, *)$ est un groupe commutatif de neutre e ;
- $K \setminus \{e\}$ est stable pour $\top$ et forme un groupe commutatif pour $\top$;
- $\top$ est distributive par rapport à $*$.

Alors $(K, *, \top)$ est un corps commutatif.

1. 0,5 pts

Vérifie que, pour tous complexes z et w, $z \top w - i = \frac{1}{2}(z - i)(w - i)$. Déduis-en que E est stable pour $\top$.

INDICE

Développe $(z - i)(w - i)$ en utilisant $i^2 = -1$. Pour la stabilité, souviens-toi qu'un produit de deux complexes non nuls n'est jamais nul.

2. 0,75 pts

On considère l'application f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = 2z + i$. Montre que f prend ses valeurs dans E et que f est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \top)$. Montre enfin que f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur E.

INDICE

Calcule $f(z) - i$, puis applique l'égalité de la question 1 à $f(z) \top f(w)$. Pour la bijection, fixe u dans E et résous $f(z) = u$.

3. 0,5 pts

Déduis-en que $(E, \top)$ est un groupe commutatif, et précise son élément neutre.

INDICE

Pense au transfert de structure par un homomorphisme surjectif. Le neutre cherché est l'image d'un nombre bien choisi.

4. 0,5 pts

Détermine le symétrique de $1+2i$ dans le groupe $(E, \top)$.

INDICE

Cherche d'abord le complexe z tel que $f(z) = 1+2i$. Le transfert te dit alors quel est le symétrique de $f(z)$.

5. 0,5 pts

Montre que $(\mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif. Quel est son neutre ? Quel est le symétrique d'un complexe z ?

INDICE

Vérifie les axiomes un par un, en nommant chacun. Pour le neutre, résous $z * e = z$ pour tout complexe z.

6. 0,5 pts

Montre que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$.

INDICE

La loi $\top$ est commutative : une seule égalité suffit, à condition de le dire. Exprime chaque membre à l'aide de la question 1.

7. 0,5 pts

Déduis-en que $(\mathbb{C}, *, \top)$ est un corps commutatif, dont tu donneras le zéro et l'unité.

INDICE

Applique le rappel de l'énoncé avec $K = \mathbb{C}$. Quel ensemble obtiens-tu en retirant de $\mathbb{C}$ le neutre de $*$?

8. 0,25 pts

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+2i) \top z = 3$.

INDICE

Vérifie d'abord que $z = i$ ne convient pas. Dans le groupe $(E, \top)$, compose ensuite par le symétrique trouvé à la question 4.

Exercice 2 4 pts

Un corps et un anneau sur]0, +∞[grâce à l'exponentielle

On note $D =]0, +\infty[$. Pour tous réels x et y de D, on pose

$$x \top y = e^{(\ln x)(\ln y)}.$$

On rappelle que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(D, \times)$ est un groupe commutatif, de neutre 1. On rappelle aussi que $\ln(e^t) = t$ pour tout réel t, et que $e^{\ln x} = x$ pour tout $x \in D$.

1. 0,5 pts

Montre que $\top$ est une loi de composition interne sur D, et qu'elle est commutative. Calcule $e^2 \top e^3$ et $2 \top e$.

INDICE

Une exponentielle est toujours strictement positive. Pour les calculs, utilise $\ln(e^2) = 2$ et $\ln e = 1$.

2. 0,5 pts

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans D définie par $f(t) = e^t$. Montre que f est bijective et que, pour tous réels s et t, $f(s + t) = f(s) \times f(t)$ et $f(st) = f(s) \top f(t)$.

INDICE

Pour la bijection, résous $e^t = x$ pour x fixé dans D. Pour la seconde égalité, commence par calculer $\ln(f(s))$.

3. 0,75 pts

Déduis-en que $(D, \times, \top)$ est un corps commutatif. Quels sont son zéro et son unité ?

INDICE

Utilise le transfert d'une structure de corps par une bijection. Ici, la loi $\times$ de D joue le rôle de l'addition.

4. 0,5 pts

Détermine l'inverse de 2 pour la loi $\top$, puis vérifie ton résultat.

INDICE

Le réel 2 n'est pas le zéro du corps. Écris 2 sous la forme $f(t)$, puis utilise le transfert.

5. 0,25 pts

Résous dans D l'équation $x \top x = e^4$.

INDICE

Exprime $x \top x$ à l'aide de $(\ln x)^2$, puis utilise l'injectivité de l'exponentielle.

6. 0,5 pts

On pose $H = \{e^n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$. Montre que H est un sous-groupe de $(D, \times)$.

INDICE

Applique la caractérisation d'un sous-groupe. Dans $(D, \times)$, le symétrique de y est son inverse y^{-1}.

7. 0,5 pts

Montre que H est stable pour $\top$. Déduis-en que $(H, \times, \top)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Calcule $e^m \top e^n$. Pour l'anneau, pense à l'anneau induit sur une partie de l'anneau $(D, \times, \top)$.

8. 0,5 pts

Montre que l'anneau $(H, \times, \top)$ n'est pas un corps.

INDICE

Cherche un élément de H, différent du zéro 1, sans inverse dans H. Essaie e^2, et raisonne par l'absurde.

Exercice 3 3,75 pts

Un corps de matrices dont l'unité n'est pas I

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I, non commutatif, et que, pour tout réel a et toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $(aA) \times B = A \times (aB) = a(A \times B)$.

On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout réel a, on pose $M(a) = aP$, et on note $E = \{M(a) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$.

1. 0,5 pts

Calcule $P^2 = P \times P$ et vérifie que $P^2 = P$. Déduis-en que, pour tous réels a et b, $M(a) \times M(b) = M(ab)$.

INDICE

Calcule chaque coefficient ligne par colonne : il y a neuf calculs. Pour la seconde partie, sors les réels a et b du produit grâce au rappel.

2. 0,5 pts

Montre que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

INDICE

Utilise la caractérisation d'un sous-groupe. En notation additive, le symétrique de $M(b)$ est son opposé $-M(b)$.

3. 0,75 pts

Montre que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif. Montre ensuite que P est l'élément neutre de $\times$ dans E, et que $I \notin E$.

INDICE

Pense à l'anneau induit sur une partie. Pour montrer que $I \notin E$, compare les coefficients de la ligne 1 et de la colonne 2.

4. 0,5 pts

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans E définie par $f(a) = M(a)$. Montre que f est bijective et que, pour tous réels a et b, $f(a+b) = f(a) + f(b)$ et $f(ab) = f(a) \times f(b)$.

INDICE

La surjectivité vient de la définition de E. Pour l'injectivité, compare les coefficients de la ligne 1 et de la colonne 1.

5. 0,5 pts

Déduis-en que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif. Montre ensuite que $(E \setminus \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif, dont tu préciseras le neutre.

INDICE

Transfère la structure de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ par la bijection f. Pour le groupe, pense au groupe des éléments inversibles d'un anneau unitaire.

6. 0,25 pts

Détermine l'inverse de $M(4)$ dans le corps $(E, +, \times)$, et vérifie-le par un produit.

INDICE

Cherche un réel b tel que $M(4) \times M(b) = P$. Attention : l'unité de ce corps est P.

7. 0,75 pts

Montre qu'aucune matrice de E n'est inversible dans l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$. Explique pourquoi ce résultat ne contredit pas la question 5.

INDICE

Raisonne par l'absurde. Si $(aP) \times B = I$, multiplie à gauche par P et utilise $P^2 = P$. N'oublie pas le cas $a = 0$.

Exercice 4 4,25 pts

Un anneau de matrices d'ordre 2 qui n'est pas un corps

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I et de zéro O. On rappelle aussi que, pour tout réel a et toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(aA) \times B = A \times (aB) = a(A \times B)$.

On considère la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour tous réels a et b, on pose $T(a, b) = aI + bK$, et on note $E = \{T(a, b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. 0,5 pts

Calcule $K^2 = K \times K$ et vérifie que $K^2 = I$. Écris $T(a, b)$ sous forme de tableau, puis montre que si $T(a, b) = T(c, d)$, alors $a = c$ et $b = d$.

INDICE

Il y a quatre coefficients à calculer, ligne par colonne. Pour la seconde partie, compare d'abord les coefficients de la ligne 2 et de la colonne 1.

2. 0,25 pts

Montre que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

INDICE

Applique la caractérisation d'un sous-groupe. En notation additive, le symétrique de $T(c, d)$ est son opposé.

3. 0,75 pts

Montre que, pour tous réels a, b, c et d, $T(a, b) \times T(c, d) = T(ac + bd,\ ad + bc)$. Déduis-en que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Développe $(aI + bK)(cI + dK)$ par distributivité, avec $IK = KI = K$ et $K^2 = I$. Pense ensuite à l'anneau induit sur une partie.

4. 0,5 pts

Calcule $T(1, 1) \times T(1, -1)$. Déduis-en que l'anneau $(E, +, \times)$ n'est pas intègre, puis qu'il n'est pas un corps.

INDICE

Utilise la formule de la question 3. Un corps peut-il contenir deux éléments non nuls dont le produit est nul ?

5. 0,5 pts

On définit deux applications g et h de E dans $\mathbb{R}$ par $g(T(a,b)) = a+b$ et $h(T(a,b)) = a-b$. Montre que, pour tous X et Y de E, $g(X+Y) = g(X)+g(Y)$ et $g(X\times Y) = g(X)g(Y)$, et de même pour h.

INDICE

Écris $X = T(a,b)$ et $Y = T(c,d)$, puis utilise la formule de la question 3. Factorise ensuite $ac+bd+ad+bc$.

6. 0,75 pts

Montre qu'une matrice $T(a,b)$ de E est inversible dans l'anneau $(E,+,\times)$ si et seulement si $a^2 \neq b^2$. Donne alors son inverse sous la forme $T(c,d)$.

INDICE

Sens direct : applique g et h à l'égalité $X\times Y = I$. Réciproque : cherche l'inverse sous la forme $T(ka,-kb)$, avec k réel.

7. 0,5 pts

On note $E^{\times}$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(E,+,\times)$. Justifie que $(E^{\times},\times)$ est un groupe commutatif. Détermine l'inverse de $T(2,1)$, puis vérifie-le.

INDICE

Pense au groupe des éléments inversibles d'un anneau unitaire. Pour $T(2,1)$, applique la question 6 avec $2^2-1^2=3$.

8. 0,5 pts

Résous dans E l'équation $X\times X = X$. Explique pourquoi, dans un corps, l'équation $x\times x = x$ n'a que deux solutions.

INDICE

Pose $X = T(a,b)$ et identifie grâce à la question 1. Dans un corps, écris $x\times x - x = x\times(x-1)$.

Exercice 5 4 pts

Un groupe non commutatif sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

On note $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ l'ensemble des couples (a, b) de réels tels que $a \neq 0$. Pour tous (a, b) et (c, d) de G, on pose

$$(a, b) * (c, d) = (ac,\ ad + b).$$

On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes commutatifs, de neutres respectifs 1 et 0.

1. 0,5 pts

Montre que $*$ est une loi de composition interne sur G. Calcule $(2, 1) * (1, 3)$ et $(1, 3) * (2, 1)$. La loi $*$ est-elle commutative ?

INDICE

Un produit de deux réels non nuls n'est pas nul. Pour les calculs, applique la définition avec soin : l'ordre compte.

2. 0,75 pts

Montre que $(G, *)$ est un groupe. Précise son élément neutre et le symétrique x' d'un élément $x = (a, b)$ de G.

INDICE

La loi n'est pas commutative : vérifie le neutre et le symétrique des deux côtés. Pour le symétrique, résous d'abord $(a, b) * (c, d) = (1, 0)$.

3. 0,5 pts

On considère l'application f de G dans $\mathbb{R}^*$ définie par $f(a, b) = a$. Montre que f est un homomorphisme surjectif de $(G, *)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$. Est-il injectif ?

INDICE

Compare $f\big((a, b) * (c, d)\big)$ et $f(a, b) \times f(c, d)$. Pour l'injectivité, cherche deux éléments distincts de même image.

4. 0,5 pts

On pose $H = \{(1, b) \ / \ b \in \mathbb{R}\}$. Montre que H est un sous-groupe de $(G, *)$.

INDICE

Applique la caractérisation d'un sous-groupe, avec le symétrique trouvé à la question 2.

5. 0,5 pts

On considère l'application g de $\mathbb{R}$ dans H définie par $g(t) = (1, t)$. Montre que g est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(H, *)$. Déduis-en que $(H, *)$ est un groupe commutatif, alors que $(G, *)$ ne l'est pas.

INDICE

Calcule $g(s) * g(t)$. Pour la bijection, résous $g(t) = (1, b)$ pour b fixé. Termine par le transfert de structure.

6. 0,5 pts

Soient $x = (c, d)$ un élément de G et t un réel. Calcule $x * (1, t) * x'$. Déduis-en que, pour tout x de G et tout h de H, $x * h * x' \in H$.

INDICE

L'associativité permet d'écrire $x * (1, t) * x'$ sans parenthèses ; calcule d'abord $x * (1, t)$. Utilise le symétrique x' obtenu à la question 2.

7. 0,5 pts

Détermine les éléments x de G tels que $x * y = y * x$ pour tout y de G.

INDICE

Si $x = (a, b)$ convient, écris la condition pour deux choix simples de y, par exemple $(1, 1)$ et $(2, 0)$. N'oublie pas la réciproque.

8. 0,25 pts

Résous dans G l'équation $x * x = (4, 3)$.

INDICE

Pose $x = (a, b)$ et identifie les deux composantes. Commence par la première.