BURHAN

Structures algébriques : groupes, anneaux, corps : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/structures-algebriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Structures algébriques : groupes, anneaux, corps	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Deux lois sur $\mathbb{C}$ organisées autour du nombre i

Sur $\mathbb{C}$, on définit deux lois de composition interne par

$$z * w = z + w - i$$

et

$$z \top w = \frac{zw - iz - iw - 1}{2} + i.$$

On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

On rappelle que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif. On rappelle aussi la caractérisation suivante, pour un ensemble K muni de deux lois $*$ et $\top$. Supposons que :

- $(K, *)$ est un groupe commutatif de neutre e ;
- $K \setminus \{e\}$ est stable pour $\top$ et forme un groupe commutatif pour $\top$;
- $\top$ est distributive par rapport à $*$.

Alors $(K, *, \top)$ est un corps commutatif.

1. 0,5 pts

Vérifie que, pour tous complexes z et w, $z \top w - i = \frac{1}{2}(z - i)(w - i)$. Déduis-en que E est stable pour $\top$.

INDICE

Développe $(z - i)(w - i)$ en utilisant $i^2 = -1$. Pour la stabilité, souviens-toi qu'un produit de deux complexes non nuls n'est jamais nul.

CORRIGÉ

L'identité. Soient z et w deux complexes. Comme $i^2 = -1$, on a $(z - i)(w - i) = zw - iz - iw - 1$. Donc

$$\begin{aligned} z \top w - i &= \frac{zw - iz - iw - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(z - i)(w - i). \end{aligned}$$

Stabilité. Soient maintenant z et w dans E. Alors $z - i \neq 0$ et $w - i \neq 0$. Un produit de deux complexes non nuls est non nul, donc $z \top w - i \neq 0$.

Conclusion. Pour tous complexes z et w, $z \top w - i = \frac{1}{2}(z - i)(w - i)$, et E est stable pour $\top$.

2. 0,75 pts

On considère l'application f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = 2z + i$. Montre que f prend ses valeurs dans E et que f est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \top)$. Montre enfin que f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur E.

INDICE

Calcule $f(z) - i$, puis applique l'égalité de la question 1 à $f(z) \top f(w)$. Pour la bijection, fixe u dans E et résous $f(z) = u$.

CORRIGÉ

Valeurs. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $f(z) - i = 2z \neq 0$, donc $f(z) \in E$.

Homomorphisme. Soient z et w dans $\mathbb{C}^*$. D'après la question 1, appliquée à $f(z)$ et $f(w)$:

$$\begin{aligned} & f(z) \top f(w) \\ &= \frac{1}{2}(2z)(2w) + i \\ &= 2zw + i = f(zw). \end{aligned}$$

Bijection. Soit $u \in E$. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'égalité $f(z) = u$ équivaut à $z = \dfrac{u - i}{2}$. Ce complexe est non nul, car $u \neq i$. L'équation a donc une seule solution dans $\mathbb{C}^*$.

Conclusion. L'application f prend ses valeurs dans E, c'est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \top)$, et une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur E.

3. 0,5 pts

Déduis-en que $(E, \top)$ est un groupe commutatif, et précise son élément neutre.

INDICE

Pense au transfert de structure par un homomorphisme surjectif. Le neutre cherché est l'image d'un nombre bien choisi.

CORRIGÉ

Transfert. D'après la question 2, f est un homomorphisme surjectif du groupe commutatif $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \top)$. Par transfert de structure, $(E, \top)$ est un groupe commutatif. Son neutre est $f(1) = 2 + i$.

Contrôle. Pour tout $w \in E$, d'après la question 1 :

$$\begin{aligned} & (2 + i) \top w \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times (w - i) + i \\ &= w. \end{aligned}$$

Conclusion. $(E, \top)$ est un groupe commutatif, de neutre $2 + i$.

4. 0,5 pts

Détermine le symétrique de $1+2i$ dans le groupe $(E, \top)$.

INDICE

Cherche d'abord le complexe z tel que $f(z) = 1+2i$. Le transfert te dit alors quel est le symétrique de $f(z)$.

CORRIGÉ

Antécédent. On a $f(z) = 1+2i$ pour $z = \dfrac{1+2i-i}{2} = \dfrac{1+i}{2}$.

Transfert. Le symétrique de $f(z)$ dans $(E, \top)$ est $f(z^{-1})$. Or

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{2}{1+i} \\ &= \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= 1-i. \end{aligned}$$

Le symétrique de $1+2i$ est donc $f(1-i) = 2-2i+i = 2-i$.

Contrôle. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} &(1+2i) \top (2-i) \\ &= \frac{1}{2}(1+i)(2-2i) + i \\ &= \frac{1}{2} \times 4 + i = 2+i, \end{aligned}$$

qui est bien le neutre.

Conclusion. Le symétrique de $1+2i$ dans le groupe $(E, \top)$ est $2-i$.

5. 0,5 pts

Montre que $(\mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif. Quel est son neutre ? Quel est le symétrique d'un complexe z ?

INDICE

Vérifie les axiomes un par un, en nommant chacun. Pour le neutre, résous $z * e = z$ pour tout complexe z.

CORRIGÉ

On vérifie les axiomes un par un.

- **Loi interne.** Pour tous complexes z et w, $z + w - i$ est un complexe.
- **Associativité.** Pour tous complexes z, w, u, on trouve $(z * w) * u = z + w + u - 2i$, et aussi $z * (w * u) = z + w + u - 2i$.
- **Commutativité.** Pour tous complexes z et w, $z * w = z + w - i = w * z$.
- **Neutre.** Pour tout complexe z, $z * i = z + i - i = z$, et $i * z = z$ par commutativité. Le neutre est i.
- **Symétrique.** Pour tout complexe z, $z * (2i - z) = z + 2i - z - i = i$, et de même dans l'autre ordre. Le symétrique de z est $2i - z$.

Conclusion. $(\mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif, de neutre i, et le symétrique d'un complexe z est $2i - z$.

6. `0,5 pts`

Montre que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$.

INDICE

La loi $\top$ est commutative : une seule égalité suffit, à condition de le dire. Exprime chaque membre à l'aide de la question 1.

CORRIGÉ

Réduction à un côté. La loi $\top$ est commutative, car l'expression $zw - iz - iw - 1$ ne change pas quand on échange z et w. Il suffit donc de prouver l'égalité à gauche.

Soient z, w, u trois complexes. On veut établir

$$z \top (w * u) = (z \top w) * (z \top u).$$

Premier membre. Comme $w * u - i = (w - i) + (u - i)$, la question 1 donne

$$\begin{aligned} & z \top (w * u) \\ &= \frac{1}{2}(z - i)(w * u - i) + i \\ &= \frac{1}{2}(z - i)(w - i) \\ &\quad + \frac{1}{2}(z - i)(u - i) + i. \end{aligned}$$

Second membre. Par définition de $*$, puis par la question 1 :

$$\begin{aligned} & (z \top w) * (z \top u) \\ &= (z \top w) + (z \top u) - i \\ &= \frac{1}{2}(z - i)(w - i) + i \\ &\quad + \frac{1}{2}(z - i)(u - i) + i - i. \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux. Par commutativité de $\top$, on a aussi $(w * u) \top z = (w \top z) * (u \top z)$.

Conclusion. La loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$.

7. 0,5 pts

Déduis-en que $(\mathbb{C}, *, \top)$ est un corps commutatif, dont tu donneras le zéro et l'unité.

INDICE

Applique le rappel de l'énoncé avec $K = \mathbb{C}$. Quel ensemble obtiens-tu en retirant de $\mathbb{C}$ le neutre de $*$?

CORRIGÉ

On applique la caractérisation rappelée, avec $K = \mathbb{C}$ muni des lois $*$ et $\top$.

- $(\mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif, de neutre i (question 5).
- En retirant ce neutre, on obtient $\mathbb{C} \setminus \{i\} = E$. Cet ensemble est stable pour $\top$ (question 1), et $(E, \top)$ est un groupe commutatif (question 3).
- La loi $\top$ est distributive par rapport à $*$ (question 6).

Conclusion. $(\mathbb{C}, *, \top)$ est un corps commutatif. Son zéro est i, neutre de $*$, et son unité est $2 + i$, neutre de $\top$.

8. 0,25 pts

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + 2i) \top z = 3$.

INDICE

Vérifie d'abord que $z = i$ ne convient pas. Dans le groupe $(E, \top)$, compose ensuite par le symétrique trouvé à la question 4.

CORRIGÉ

Le cas $z = i$. La question 1 donne $(1 + 2i) \top i = i$, et $i \neq 3$. Toute solution est donc dans E, comme $1 + 2i$ et 3.

Résolution dans $(E, \top)$. Dans ce groupe commutatif, l'équation a une seule solution : $z = (2 - i) \top 3$, d'après la question 4. On calcule, avec la question 1 :

$$\begin{aligned} &(2 - i) \top 3 \\ &= \frac{1}{2}(2 - 2i)(3 - i) + i \\ &= \frac{1}{2}(4 - 8i) + i \\ &= 2 - 3i. \end{aligned}$$

Conclusion. L'unique solution est $z = 2 - 3i$.

Exercice 2 4 pts

Un corps et un anneau sur]0, +∞[grâce à l'exponentielle

On note $D =]0, +\infty[$. Pour tous réels x et y de D, on pose

$$x \top y = e^{(\ln x)(\ln y)}.$$

On rappelle que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(D, \times)$ est un groupe commutatif, de neutre 1. On rappelle aussi que $\ln(e^t) = t$ pour tout réel t, et que $e^{\ln x} = x$ pour tout $x \in D$.

1. 0,5 pts

Montre que $\top$ est une loi de composition interne sur D, et qu'elle est commutative. Calcule $e^2 \top e^3$ et $2 \top e$.

INDICE

Une exponentielle est toujours strictement positive. Pour les calculs, utilise $\ln(e^2) = 2$ et $\ln e = 1$.

CORRIGÉ

Loi interne. Soient x et y dans D. Les réels $\ln x$ et $\ln y$ existent, et $e^{(\ln x)(\ln y)} > 0$: $x \top y \in D$.

Commutativité. Comme $(\ln x)(\ln y) = (\ln y)(\ln x)$, on a $x \top y = y \top x$.

Calculs. On a $e^2 \top e^3 = e^{2\times 3} = e^6$, et $2 \top e = e^{(\ln 2)\times 1} = 2$.

Conclusion. La loi $\top$ est une loi de composition interne commutative sur D, avec $e^2 \top e^3 = e^6$ et $2 \top e = 2$.

2. 0,5 pts

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans D définie par $f(t) = e^t$. Montre que f est bijective et que, pour tous réels s et t, $f(s+t) = f(s) \times f(t)$ et $f(st) = f(s) \top f(t)$.

INDICE

Pour la bijection, résous $e^t = x$ pour x fixé dans D. Pour la seconde égalité, commence par calculer $\ln(f(s))$.

CORRIGÉ

Bijection. Pour $x \in D$, l'équation $e^t = x$ a une seule solution réelle, $t = \ln x$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur D.

Addition. Pour tous réels s et t :

$$\begin{aligned} f(s+t) &= e^{s+t} = e^s \times e^t \\ &= f(s) \times f(t). \end{aligned}$$

Produit. Comme $\ln(f(s)) = s$ et $\ln(f(t)) = t$, on obtient

$$f(s) \top f(t) = e^{st} = f(st).$$

Conclusion. L'application f est bijective et, pour tous réels s et t, $f(s+t) = f(s) \times f(t)$ et $f(st) = f(s) \top f(t)$.

3. 0,75 pts

Déduis-en que $(D, \times, \top)$ est un corps commutatif. Quels sont son zéro et son unité ?

INDICE

Utilise le transfert d'une structure de corps par une bijection. Ici, la loi $\times$ de D joue le rôle de l'addition.

CORRIGÉ

Transfert. Le triplet $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif. D'après la question 2, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur D qui transforme l'addition en $\times$ et la multiplication en $\top$. Par transfert de structure, $(D, \times, \top)$ est un corps commutatif.

Zéro et unité. Son zéro est $f(0) = e^0 = 1$, neutre de $\times$ dans D. Son unité est $f(1) = e$, neutre de $\top$.

Conclusion. $(D, \times, \top)$ est un corps commutatif. Attention : son zéro est le réel 1, et son unité est le réel e.

4. 0,5 pts

Détermine l'inverse de 2 pour la loi $\top$, puis vérifie ton résultat.

INDICE

Le réel 2 n'est pas le zéro du corps. Écris 2 sous la forme $f(t)$, puis utilise le transfert.

CORRIGÉ

Transfert. On a $2 = f(\ln 2)$, avec $\ln 2 \neq 0$ car $2 \neq 1$. L'inverse de $\ln 2$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ est $\dfrac{1}{\ln 2}$. Par transfert, l'inverse de 2 pour $\top$ est

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = e^{\frac{1}{\ln 2}}.$$

Vérification. Par définition de $\top$:

$$\begin{aligned} 2 \top e^{\frac{1}{\ln 2}} &= e^{(\ln 2) \times \frac{1}{\ln 2}} \\ &= e^1 = e, \end{aligned}$$

l'unité du corps.

Conclusion. L'inverse de 2 pour la loi $\top$ est $e^{\frac{1}{\ln 2}}$.

5. 0,25 pts

Résous dans D l'équation $x \top x = e^4$.

INDICE

Exprime $x \top x$ à l'aide de $(\ln x)^2$, puis utilise l'injectivité de l'exponentielle.

CORRIGÉ

Soit $x \in D$. Alors $x \top x = e^{(\ln x)^2}$. La fonction exponentielle est injective, donc l'équation équivaut à

$$(\ln x)^2 = 4,$$

soit $\ln x = 2$ ou $\ln x = -2$.

Conclusion. Les solutions sont e^2 et e^{-2}.

6. 0,5 pts

On pose $H = \{e^n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$. Montre que H est un sous-groupe de $(D, \times)$.

INDICE

Applique la caractérisation d'un sous-groupe. Dans $(D, \times)$, le symétrique de y est son inverse y^{-1}.

CORRIGÉ

- **Partie non vide.** H est une partie de D, et $H \neq \emptyset$, car $1 = e^0 \in H$.
- **Test du sous-groupe.** Soient x et y dans H : $x = e^m$ et $y = e^n$, avec m et n entiers relatifs. Le symétrique de y dans $(D, \times)$ est $y^{-1} = e^{-n}$. Alors $x \times y^{-1} = e^{m-n}$, avec $m - n \in \mathbb{Z}$: $x \times y^{-1} \in H$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-groupe, H est un sous-groupe de $(D, \times)$.

7. 0,5 pts

Montre que H est stable pour $\top$. Déduis-en que $(H, \times, \top)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Calcule $e^m \top e^n$. Pour l'anneau, pense à l'anneau induit sur une partie de l'anneau $(D, \times, \top)$.

CORRIGÉ

Stabilité. Soient m et n deux entiers relatifs. Alors $e^m \top e^n = e^{mn}$, et $mn \in \mathbb{Z}$: H est stable pour $\top$.

Anneau induit. Le corps $(D, \times, \top)$ est en particulier un anneau commutatif unitaire, d'unité e. La partie H en est un sous-groupe pour la première loi $\times$ (question 6), et elle est stable pour $\top$. Donc $(H, \times, \top)$ est un anneau commutatif.

Unité. On a $e = e^1 \in H$.

Conclusion. $(H, \times, \top)$ est un anneau commutatif unitaire, d'unité e.

8. 0,5 pts

Montre que l'anneau $(H, \times, \top)$ n'est pas un corps.

INDICE

Cherche un élément de H, différent du zéro 1, sans inverse dans H. Essaie e^2, et raisonne par l'absurde.

CORRIGÉ

Le réel e^2 appartient à H, et $e^2 \neq 1$: ce n'est pas le zéro de l'anneau.

Supposons par l'absurde qu'il ait un inverse e^n dans H, avec $n \in \mathbb{Z}$. Alors $e^2 \top e^n = e$, c'est-à-dire $e^{2n} = e^1$. L'exponentielle étant injective, $2n = 1$: c'est impossible pour un entier n.

Conclusion. L'élément non nul e^2 n'est pas inversible dans H : l'anneau $(H, \times, \top)$ n'est pas un corps.

Exercice 3 3,75 pts

Un corps de matrices dont l'unité n'est pas I

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I, non commutatif, et que, pour tout réel a et toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $(aA) \times B = A \times (aB) = a(A \times B)$.

On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout réel a, on pose $M(a) = aP$, et on note $E = \{M(a) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$.

1. 0,5 pts

Calcule $P^2 = P \times P$ et vérifie que $P^2 = P$. Déduis-en que, pour tous réels a et b, $M(a) \times M(b) = M(ab)$.

INDICE

Calcule chaque coefficient ligne par colonne : il y a neuf calculs. Pour la seconde partie, sors les réels a et b du produit grâce au rappel.

CORRIGÉ

Calcul de P^2. On multiplie chaque ligne de P par chaque colonne :

- ligne 1 : $4 - 2 + 0 = 2$, $-4 + 2 + 0 = -2$ et $2 - 2 + 1 = 1$;
- ligne 2 : $2 - 1 + 0 = 1$, $-2 + 1 + 0 = -1$ et $1 - 1 + 1 = 1$;
- ligne 3 : 0, 0 et 1.

Donc

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

Produit $M(a) \times M(b)$. Soient a et b deux réels. D'après le rappel de l'énoncé :

$$\begin{aligned} &M(a) \times M(b) \\ &= (aP) \times (bP) \\ &= ab(P \times P) \\ &= abP = M(ab). \end{aligned}$$

Conclusion. On a $P^2 = P$ et, pour tous réels a et b, $M(a) \times M(b) = M(ab)$.

2. 0,5 pts

Montre que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

INDICE

Utilise la caractérisation d'un sous-groupe. En notation additive, le symétrique de $M(b)$ est son opposé $-M(b)$.

CORRIGÉ

- **Partie non vide.** $E \neq \emptyset$, car $O = 0P = M(0) \in E$.
- **Test du sous-groupe.** Soient $M(a)$ et $M(b)$ dans E. D'après les règles de calcul avec un réel, $M(a) + (-M(b)) = aP - bP = (a-b)P = M(a-b)$, avec $a - b \in \mathbb{R}$. Donc $M(a) - M(b) \in E$.

Conclusion. D'après la caractérisation, E est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

3. 0,75 pts

Montre que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif. Montre ensuite que P est l'élément neutre de $\times$ dans E, et que $I \notin E$.

INDICE

Pense à l'anneau induit sur une partie. Pour montrer que $I \notin E$, compare les coefficients de la ligne 1 et de la colonne 2.

CORRIGÉ

Anneau commutatif. D'après la question 1, $M(a) \times M(b) = M(ab) \in E$: E est stable pour $\times$. C'est aussi un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$ (question 2). Par la propriété de l'anneau induit, $(E, +, \times)$ est un anneau. Il est commutatif, car

$$\begin{aligned} &M(a) \times M(b) \\ &= M(ab) = M(ba) \\ &= M(b) \times M(a). \end{aligned}$$

Neutre. $P = M(1) \in E$ et, pour tout réel a, $M(a) \times P = M(a \times 1) = M(a)$; de même, $P \times M(a) = M(a)$. Donc P est neutre pour $\times$ dans E : l'anneau est unitaire, d'unité P.

$I \notin E$. Si $aP = I$, le coefficient de la ligne 1 et de la colonne 2 donne $-2a = 0$. Donc $a = 0$, puis $aP = O \neq I$: c'est absurde.

Conclusion. $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif d'unité P, et $I \notin E$: l'unité de cet anneau n'est pas I.

4. 0,5 pts

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans E définie par $f(a) = M(a)$. Montre que f est bijective et que, pour tous réels a et b, $f(a+b) = f(a) + f(b)$ et $f(ab) = f(a) \times f(b)$.

INDICE

La surjectivité vient de la définition de E. Pour l'injectivité, compare les coefficients de la ligne 1 et de la colonne 1.

CORRIGÉ

Surjectivité. Tout élément de E s'écrit $M(a) = f(a)$, avec a réel.

Injectivité. Si $f(a) = f(b)$, alors $aP = bP$. Le coefficient de la ligne 1 et de la colonne 1 donne $2a = 2b$, donc $a = b$.

Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur E.

Lois. Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned} & f(a+b) \\ & = (a+b)P = aP + bP \\ & = f(a) + f(b). \end{aligned}$$

D'après la question 1, $f(ab) = M(ab) = M(a) \times M(b) = f(a) \times f(b)$.

Conclusion. L'application f est bijective, et elle transforme l'addition en $+$ et la multiplication en $\times$.

5. 0,5 pts

Déduis-en que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif. Montre ensuite que $(E \setminus \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif, dont tu préciseras le neutre.

INDICE

Transfère la structure de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ par la bijection f. Pour le groupe, pense au groupe des éléments inversibles d'un anneau unitaire.

CORRIGÉ

Corps. Le triplet $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, et f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur E qui respecte les deux lois (question 4). Par transfert de structure, $(E, +, \times)$ est un corps commutatif, de zéro $f(0) = O$ et d'unité $f(1) = P$.

Groupe des inversibles. Dans ce corps, tout élément non nul est inversible. L'élément O ne l'est pas, car $O \times M = O \neq P$ pour toute matrice M de E. L'ensemble des inversibles est donc $E \setminus \{O\}$. D'après la propriété du groupe des inversibles, $(E \setminus \{O\}, \times)$ est un groupe, commutatif car $\times$ l'est sur E.

Conclusion. $(E, +, \times)$ est un corps commutatif, et $(E \setminus \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif. Son neutre est P, et non I.

6. 0,25 pts

Détermine l'inverse de $M(4)$ dans le corps $(E, +, \times)$, et vérifie-le par un produit.

INDICE

Cherche un réel b tel que $M(4) \times M(b) = P$. Attention : l'unité de ce corps est P.

CORRIGÉ

Recherche. D'après la question 1, $M(4) \times M(b) = M(4b)$. Par injectivité de f, ce produit vaut $P = M(1)$ si et seulement si $4b = 1$. Donc l'inverse de $M(4)$ est $M\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}P$.

Vérification. On a

$$\begin{aligned} & M(4) \times M\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= M\left(4 \times \frac{1}{4}\right) \\ &= M(1) = P, \end{aligned}$$

et le produit dans l'autre ordre aussi, par commutativité.

Conclusion. L'inverse de $M(4)$ dans le corps $(E, +, \times)$ est $M\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}P$.

7. 0,75 pts

Montre qu'aucune matrice de E n'est inversible dans l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$. Explique pourquoi ce résultat ne contredit pas la question 5.

INDICE

Raisonne par l'absurde. Si $(aP) \times B = I$, multiplie à gauche par P et utilise $P^2 = P$. N'oublie pas le cas $a = 0$.

CORRIGÉ

Soit a un réel. Supposons par l'absurde qu'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $(aP) \times B = B \times (aP) = I$.

Cas $a = 0$. Alors $aP = O$, et $O \times B = O \neq I$: contradiction.

Cas $a \neq 0$. On multiplie à gauche par P : $P \times \big((aP) \times B\big) = P \times I = P$. Par associativité et grâce au rappel,

$$\begin{aligned} & P \times \big((aP) \times B\big) \\ &= \big(a(P \times P)\big) \times B \\ &= (aP) \times B = I. \end{aligned}$$

Donc $P = I$. C'est faux, car le coefficient de la ligne 1 et de la colonne 1 de P vaut 2.

Conclusion. Aucune matrice de E n'est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il n'y a pas de contradiction avec la question 5 : dans le corps E, un inverse se calcule par rapport à l'unité P, et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, par rapport à I.

Exercice 4 4,25 pts

Un anneau de matrices d'ordre 2 qui n'est pas un corps

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I et de zéro O. On rappelle aussi que, pour tout réel a et toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(aA) \times B = A \times (aB) = a(A \times B)$.

On considère la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour tous réels a et b, on pose $T(a, b) = aI + bK$, et on note $E = \{T(a, b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. 0,5 pts

Calcule $K^2 = K \times K$ et vérifie que $K^2 = I$. Écris $T(a, b)$ sous forme de tableau, puis montre que si $T(a, b) = T(c, d)$, alors $a = c$ et $b = d$.

INDICE

Il y a quatre coefficients à calculer, ligne par colonne. Pour la seconde partie, compare d'abord les coefficients de la ligne 2 et de la colonne 1.

CORRIGÉ

Calcul de K^2. Ligne 1 de K fois chaque colonne : $9 - 8 = 1$ et $-12 + 12 = 0$. Ligne 2 : $6 - 6 = 0$ et $-8 + 9 = 1$. Donc $K^2 = I$.

Tableau de $T(a, b)$. Pour tous réels a et b,

$$T(a, b) = \begin{pmatrix} a + 3b & -4b \\ 2b & a - 3b \end{pmatrix}.$$

Unicité de l'écriture. Supposons $T(a, b) = T(c, d)$. Le coefficient de la ligne 2 et de la colonne 1 donne $2b = 2d$, donc $b = d$. Celui de la ligne 1 et de la colonne 1 donne alors $a + 3b = c + 3b$, donc $a = c$.

Conclusion. On a $K^2 = I$, et l'égalité $T(a, b) = T(c, d)$ entraîne $a = c$ et $b = d$.

2. 0,25 pts

Montre que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

INDICE

Applique la caractérisation d'un sous-groupe. En notation additive, le symétrique de $T(c, d)$ est son opposé.

CORRIGÉ

- **Partie non vide.** $E \neq \emptyset$, car $O = T(0, 0) \in E$.
- **Test du sous-groupe.** Soient $T(a, b)$ et $T(c, d)$ dans E. Alors $T(a, b) - T(c, d) = (a - c)I + (b - d)K = T(a - c, b - d)$, avec $a - c$ et $b - d$ réels. Donc $T(a, b) - T(c, d) \in E$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-groupe, E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

3. 0,75 pts

Montre que, pour tous réels a, b, c et d, $T(a,b)\times T(c,d)=T(ac+bd,\ ad+bc)$. Déduis-en que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Développe $(aI+bK)(cI+dK)$ par distributivité, avec $IK=KI=K$ et $K^2=I$. Pense ensuite à l'anneau induit sur une partie.

CORRIGÉ

Produit. Le produit des matrices est distributif par rapport à l'addition. Avec le rappel, $IK=KI=K$ et $K^2=I$, on obtient

$$\begin{aligned}&T(a,b)\times T(c,d)\\&=acI+adK\\&\quad+bcK+bdK^2\\&=(ac+bd)I\\&\quad+(ad+bc)K.\end{aligned}$$

Donc $T(a,b)\times T(c,d)=T(ac+bd,\ ad+bc)$, et E est stable pour $\times$.

Anneau. D'après la question 2, E est aussi un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$. Par la propriété de l'anneau induit, $(E,+,\times)$ est un anneau.

Commutativité et unité. La formule ne change pas si l'on échange (a,b) et (c,d) : cet anneau est commutatif. Enfin, $I=T(1,0)\in E$.

Conclusion. $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire, d'unité I.

4. 0,5 pts

Calcule $T(1,1) \times T(1,-1)$. Déduis-en que l'anneau $(E,+,\times)$ n'est pas intègre, puis qu'il n'est pas un corps.

INDICE

Utilise la formule de la question 3. Un corps peut-il contenir deux éléments non nuls dont le produit est nul ?

CORRIGÉ

Calcul. D'après la question 3, $T(1,1) \times T(1,-1) = T(1-1,\ -1+1) = T(0,0) = O$. Or $T(1,1) \neq O$ et $T(1,-1) \neq O$, d'après la question 1. Concrètement :

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+8 & 16-16 \\ -4+4 & 8-8 \end{pmatrix} = O.$$

Pas intègre. Ainsi $T(1,1)$ est un diviseur de zéro : l'anneau commutatif unitaire $(E,+,\times)$ n'est pas intègre.

Pas un corps. Un corps n'a pas de diviseur de zéro, donc $(E,+,\times)$ n'en est pas un.

Conclusion. $T(1,1) \times T(1,-1) = O$, l'anneau $(E,+,\times)$ n'est pas intègre, et il n'est pas un corps.

5. 0,5 pts

On définit deux applications g et h de E dans $\mathbb{R}$ par $g(T(a,b)) = a+b$ et $h(T(a,b)) = a-b$. Montre que, pour tous X et Y de E, $g(X+Y) = g(X) + g(Y)$ et $g(X \times Y) = g(X)g(Y)$, et de même pour h.

INDICE

Écris $X = T(a,b)$ et $Y = T(c,d)$, puis utilise la formule de la question 3. Factorise ensuite $ac+bd+ad+bc$.

CORRIGÉ

Définition. D'après la question 1, les réels a et b sont déterminés par la matrice $T(a,b)$: g et h sont bien définies. Soient $X = T(a,b)$ et $Y = T(c,d)$ dans E.

- **Somme.** $X+Y = T(a+c, b+d)$, donc $g(X+Y) = a+c+b+d = g(X)+g(Y)$. De même, $h(X+Y) = (a-b)+(c-d) = h(X)+h(Y)$.
- **Produit.** D'après la question 3, $g(X \times Y) = ac+bd+ad+bc = (a+b)(c+d) = g(X)g(Y)$. De même, $h(X \times Y) = ac+bd-ad-bc = (a-b)(c-d) = h(X)h(Y)$.

Conclusion. g est un homomorphisme de $(E,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ et de $(E,\times)$ dans $(\mathbb{R},\times)$; il en est de même pour h.

6. 0,75 pts

Montre qu'une matrice $T(a,b)$ de E est inversible dans l'anneau $(E,+,\times)$ si et seulement si $a^2 \neq b^2$. Donne alors son inverse sous la forme $T(c,d)$.

INDICE

Sens direct : applique g et h à l'égalité $X \times Y = I$. Réciproque : cherche l'inverse sous la forme $T(ka, -kb)$, avec k réel.

CORRIGÉ

On remarque d'abord que $g(I) = h(I) = 1$, car $I = T(1,0)$.

Sens direct. Soit $X = T(a,b)$ inversible dans E, d'inverse Y. D'après la question 5, $g(X)g(Y) = g(X \times Y) = g(I) = 1$, donc $g(X) = a + b \neq 0$. De même, $h(X)h(Y) = 1$, donc $a - b \neq 0$. Ainsi $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \neq 0$.

Réciproque. On suppose $a^2 \neq b^2$, et on pose $Y = T\left(\frac{a}{a^2-b^2},\ \frac{-b}{a^2-b^2}\right)$, qui est dans E. D'après la question 3, $X \times Y = T(c,d)$, avec

$$c = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 1$$

et

$$d = \frac{-ab + ab}{a^2 - b^2} = 0.$$

Donc $X \times Y = T(1,0) = I$, et $Y \times X = I$ par commutativité.

Conclusion. $T(a,b)$ est inversible dans E si et seulement si $a^2 \neq b^2$. Son inverse est alors $T\left(\frac{a}{a^2-b^2},\ \frac{-b}{a^2-b^2}\right)$.

7. 0,5 pts

On note $E^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(E, +, \times)$. Justifie que $(E^\times, \times)$ est un groupe commutatif. Détermine l'inverse de $T(2,1)$, puis vérifie-le.

INDICE

Pense au groupe des éléments inversibles d'un anneau unitaire. Pour $T(2,1)$, applique la question 6 avec $2^2 - 1^2 = 3$.

CORRIGÉ

Groupe. L'anneau $(E, +, \times)$ est unitaire (question 3). D'après la propriété du groupe des éléments inversibles, $(E^\times, \times)$ est un groupe, de neutre I. Il est commutatif, car $\times$ est commutative sur E. D'après la question 6, $E^\times = \{T(a,b) \ / \ a^2 \neq b^2\}$.

Inverse de $T(2,1)$. On a $2^2 - 1^2 = 3 \neq 0$. D'après la question 6, son inverse est $T\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Vérification. D'après la question 3, $T(2,1) \times T\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = T(c,d)$, avec

$$c = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1,$$
$$d = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

Le produit vaut donc $T(1,0) = I$.

Conclusion. $(E^\times, \times)$ est un groupe commutatif, et l'inverse de $T(2,1)$ est $T\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

8. 0,5 pts

Résous dans E l'équation $X \times X = X$. Explique pourquoi, dans un corps, l'équation $x \times x = x$ n'a que deux solutions.

INDICE

Pose $X = T(a, b)$ et identifie grâce à la question 1. Dans un corps, écris $x \times x - x = x \times (x - 1)$.

CORRIGÉ

Dans E. Soit $X = T(a, b)$. D'après la question 3, $X \times X = T(a^2 + b^2,\ 2ab)$. D'après la question 1, $X \times X = X$ équivaut à $a^2 + b^2 = a$ et $2ab = b$.

- La seconde égalité s'écrit $b(2a - 1) = 0$, donc $b = 0$ ou $a = \dfrac{1}{2}$.
- Si $b = 0$, alors $a^2 = a$, donc $a = 0$ ou $a = 1$.
- Si $a = \dfrac{1}{2}$, alors $b^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$, donc $b = \dfrac{1}{2}$ ou $b = -\dfrac{1}{2}$.

Les solutions sont O, I, $T\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $T\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$: il y en a quatre.

Dans un corps. L'égalité $x \times x = x$ équivaut à $x \times (x - 1) = 0$. Un corps n'a pas de diviseur de zéro, donc $x = 0$ ou $x = 1$.

Conclusion. L'équation a quatre solutions dans E, alors qu'elle n'en a que deux dans un corps. On retrouve que E n'est pas un corps.

Exercice 5 4 pts

Un groupe non commutatif sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

On note $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ l'ensemble des couples (a, b) de réels tels que $a \neq 0$. Pour tous (a, b) et (c, d) de G, on pose

$$(a, b) * (c, d) = (ac,\ ad + b).$$

On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes commutatifs, de neutres respectifs 1 et 0.

1. 0,5 pts

Montre que $*$ est une loi de composition interne sur G. Calcule $(2, 1) * (1, 3)$ et $(1, 3) * (2, 1)$. La loi $*$ est-elle commutative ?

INDICE

Un produit de deux réels non nuls n'est pas nul. Pour les calculs, applique la définition avec soin : l'ordre compte.

CORRIGÉ

Loi interne. Soient (a, b) et (c, d) dans G. Comme $a \neq 0$ et $c \neq 0$, on a $ac \neq 0$, et $ad + b$ est un réel. Donc $(ac,\ ad + b) \in G$.

Calculs. On a $(2, 1) * (1, 3) = (2 \times 1,\ 2 \times 3 + 1) = (2, 7)$ et $(1, 3) * (2, 1) = (1 \times 2,\ 1 \times 1 + 3) = (2, 4)$.

Conclusion. $*$ est une loi de composition interne sur G. Les deux composés $(2, 7)$ et $(2, 4)$ sont différents : la loi $*$ n'est pas commutative.

2. 0,75 pts

Montre que $(G, *)$ est un groupe. Précise son élément neutre et le symétrique x' d'un élément $x = (a, b)$ de G.

INDICE

La loi n'est pas commutative : vérifie le neutre et le symétrique des deux côtés. Pour le symétrique, résous d'abord $(a, b) * (c, d) = (1, 0)$.

CORRIGÉ

- **Associativité.** Soient (a, b), (c, d) et (u, v) dans G. D'une part, $\big((a, b) * (c, d)\big) * (u, v) = (ac,\ ad + b) * (u, v) = (acu,\ acv + ad + b)$. D'autre part, $(a, b) * \big((c, d) * (u, v)\big) = (a, b) * (cu,\ cv + d) = (acu,\ acv + ad + b)$.
- **Neutre.** $(a, b) * (1, 0) = (a,\ 0 + b) = (a, b)$ et $(1, 0) * (a, b) = (a,\ b + 0) = (a, b)$. Le neutre est $(1, 0)$.
- **Symétrique.** Soient $x = (a, b) \in G$ et $x' = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$, qui est dans G. Alors $x * x' = (1,\ -b + b) = (1, 0)$ et $x' * x = \left(1,\ \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\right) = (1, 0)$.

Conclusion. Avec la question 1, $(G, *)$ est un groupe non commutatif, de neutre $(1, 0)$, et le symétrique de $x = (a, b)$ est $x' = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$.

3. 0,5 pts

On considère l'application f de G dans $\mathbb{R}^*$ définie par $f(a,b)=a$. Montre que f est un homomorphisme surjectif de $(G,*)$ dans $(\mathbb{R}^*,\times)$. Est-il injectif ?

INDICE

Compare $f\big((a,b)*(c,d)\big)$ et $f(a,b)\times f(c,d)$. Pour l'injectivité, cherche deux éléments distincts de même image.

CORRIGÉ

Homomorphisme. Soient (a,b) et (c,d) dans G. Alors $f\big((a,b)*(c,d)\big)=f(ac,\ ad+b)=ac=f(a,b)\times f(c,d)$.

Surjectivité. Tout réel $a\neq 0$ s'écrit $a=f(a,0)$, avec $(a,0)\in G$.

Non-injectivité. On a $(1,0)\neq(1,5)$, alors que $f(1,0)=f(1,5)=1$.

Conclusion. L'application f est un homomorphisme surjectif de $(G,*)$ dans $(\mathbb{R}^*,\times)$. Il n'est pas injectif.

4. 0,5 pts

On pose $H=\{(1,b)\ /\ b\in\mathbb{R}\}$. Montre que H est un sous-groupe de $(G,*)$.

INDICE

Applique la caractérisation d'un sous-groupe, avec le symétrique trouvé à la question 2.

CORRIGÉ

- **Partie non vide.** H est une partie de G, car $1\neq 0$. De plus, $H\neq\emptyset$, car le neutre $(1,0)$ est dans H.
- **Test du sous-groupe.** Soient $x=(1,b)$ et $y=(1,d)$ dans H. D'après la question 2, $y'=(1,-d)$. Alors $x*y'=(1\times 1,\ 1\times(-d)+b)=(1,\ b-d)$, qui est dans H.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-groupe, H est un sous-groupe de $(G,*)$.

5. 0,5 pts

On considère l'application g de $\mathbb{R}$ dans H définie par $g(t) = (1, t)$. Montre que g est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(H, *)$. Déduis-en que $(H, *)$ est un groupe commutatif, alors que $(G, *)$ ne l'est pas.

INDICE

Calcule $g(s) * g(t)$. Pour la bijection, résous $g(t) = (1, b)$ pour b fixé. Termine par le transfert de structure.

CORRIGÉ

Homomorphisme. Pour tous réels s et t, $g(s) * g(t) = (1, s) * (1, t) = (1,\ t + s) = g(s + t)$.

Bijection. Soit $(1, b) \in H$. L'équation $g(t) = (1, b)$ équivaut à $t = b$: elle a une seule solution réelle. Donc g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur H.

Transfert. Ainsi g est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(H, *)$. Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, le transfert de structure montre que $(H, *)$ est un groupe commutatif.

Conclusion. $(H, *)$ est un groupe commutatif, isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$, alors que $(G, *)$ n'est pas commutatif (question 1).

6. 0,5 pts

Soient $x = (c, d)$ un élément de G et t un réel. Calcule $x * (1, t) * x'$. Déduis-en que, pour tout x de G et tout h de H, $x * h * x' \in H$.

INDICE

L'associativité permet d'écrire $x * (1, t) * x'$ sans parenthèses ; calcule d'abord $x * (1, t)$. Utilise le symétrique x' obtenu à la question 2.

CORRIGÉ

Calcul. La loi $*$ est associative : on calcule de gauche à droite. D'abord, $(c, d) * (1, t) = (c,\ ct + d)$. D'après la question 2, $x' = \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} & x * (1, t) * x' \\ &= (c,\ ct + d) * \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \\ &= (1,\ -d + ct + d) = (1, ct). \end{aligned}$$

Conséquence. Tout élément h de H s'écrit $h = (1, t)$, avec t réel. Alors $x * h * x' = (1, ct)$, et ct est un réel.

Conclusion. On a $x * (1, t) * x' = (1, ct)$ et, pour tout x de G et tout h de H, $x * h * x' \in H$.

7. 0,5 pts

Détermine les éléments x de G tels que $x * y = y * x$ pour tout y de G.

INDICE

Si $x = (a, b)$ convient, écris la condition pour deux choix simples de y, par exemple $(1, 1)$ et $(2, 0)$. N'oublie pas la réciproque.

CORRIGÉ

Analyse. Soit $x = (a, b)$ un tel élément.

- Avec $y = (1, 1)$: $x * y = (a,\ a + b)$ et $y * x = (a,\ b + 1)$. Donc $a + b = b + 1$, soit $a = 1$.
- Avec $y = (2, 0)$: $x * y = (2a,\ b)$ et $y * x = (2a,\ 2b)$. Donc $b = 2b$, soit $b = 0$.

Ainsi $x = (1, 0)$.

Synthèse. Le neutre vérifie $(1, 0) * y = y * (1, 0) = y$ pour tout y de G.

Conclusion. Le seul élément qui commute avec tous les éléments de G est le neutre $(1, 0)$.

8. 0,25 pts

Résous dans G l'équation $x * x = (4, 3)$.

INDICE

Pose $x = (a, b)$ et identifie les deux composantes. Commence par la première.

CORRIGÉ

Soit $x = (a, b) \in G$. Alors $x * x = (a^2,\ ab + b) = \big(a^2,\ (a + 1)b\big)$. L'équation équivaut à $a^2 = 4$ et $(a + 1)b = 3$.

- Si $a = 2$, alors $3b = 3$, donc $b = 1$.
- Si $a = -2$, alors $-b = 3$, donc $b = -3$.

Conclusion. Les solutions sont $(2, 1)$ et $(-2, -3)$. Contrôle : $(-2, -3) * (-2, -3) = (4,\ 6 - 3) = (4, 3)$.