BURHAN

Structures algébriques : groupes, anneaux, corps : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/structures-algebriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Structures algébriques : groupes, anneaux, corps	Entraînement	8

Exercice 1

La loi des résistances en parallèle

Deux résistances électriques de valeurs x et y (en ohms), montées en parallèle, équivalent à une seule résistance de valeur $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$. On étudie cette opération sur l'ensemble $E = \mathbb{R}_+^*$.

1.

Montre que $*$ est une loi de composition interne sur E. Calcule $3 * 6$ et $4 * 12$.

INDICE

Pour x et y strictement positifs, regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur. Le quotient existe-t-il toujours ?

2.

Montre que, pour tous x et y de E, $\dfrac{1}{x * y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. Déduis-en que $*$ est commutative et associative.

INDICE

Inverse le quotient, puis sépare la fraction obtenue en deux. Pour la suite, deux réels strictement positifs qui ont le même inverse sont égaux.

3.

Montre que la loi $*$ n'a pas d'élément neutre dans E.

INDICE

Raisonne par l'absurde : suppose qu'un réel e de E est neutre, puis traduis $x * e = x$ avec l'égalité de la question 2.

4.

Montre que $J = \,]0, 1]$ est stable pour $*$. Montre ensuite que $L = [2, +\infty[$ n'est pas stable pour $*$, bien que $3 * 6 \in L$.

INDICE

Pour J, encadre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ lorsque x et y sont dans $]0, 1]$. Pour L, un seul couple bien choisi suffit, et un essai réussi ne prouve rien.

Exercice 2

Un groupe sur $\mathbb{C}$ privé de –i, transporté depuis $\mathbb{C}^*$

Soit $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Pour tous z et w de E, on pose $z * w = z + w - izw$.

1.

Calcule $1 * i$. Montre que, pour tous z et w de E, $1 - i(z * w) = (1 - iz)(1 - iw)$. Déduis-en que $*$ est une loi de composition interne sur E.

INDICE

Développe les deux membres, sans oublier que $i^2 = -1$. Pour la loi interne, cherche pour quel complexe z le facteur $1 - iz$ est nul.

2.

On pose $f(u) = i(u - 1)$ pour tout $u \in \mathbb{C}^*$. Montre que f est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, *)$.

INDICE

Vérifie d'abord que $f(u) \neq -i$. Calcule ensuite $1 - if(u)$: le résultat est très simple. Utilise alors l'égalité de la question 1.

3.

Montre que f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur E, et précise sa réciproque.

INDICE

Pour $z \in E$, résous l'équation $f(u) = z$, d'inconnue u. Le point délicat : vérifier que la solution trouvée appartient bien à $\mathbb{C}^*$.

4.

Déduis-en que $(E, *)$ est un groupe commutatif. Précise son neutre et le symétrique z' d'un élément z de E.

INDICE

Cite le transfert de structure : groupe de départ, homomorphisme, surjectivité. Le symétrique de $f(u)$ est l'image de l'inverse de u ; ici, $u = 1 - iz$.

5.

Calcule le symétrique de 1 pour la loi $*$, puis vérifie-le par un calcul direct.

INDICE

Applique la formule de la question 4, puis rends le dénominateur réel avec le conjugué de $1 - i$.

Exercice 3

Les rationnels de numérateur et dénominateur impairs

$(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe commutatif, de neutre 1. On note H l'ensemble des rationnels qui s'écrivent $\frac{a}{b}$, avec a et b deux entiers relatifs **impairs**.

1.

Montre que $\frac{3}{5}$, -7 et 1 appartiennent à H, mais que 2 n'appartient pas à H.

INDICE

Pour chaque nombre, propose une écriture avec deux entiers impairs. Pour 2, raisonne par l'absurde avec la parité.

2.

Montre que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

INDICE

Vérifie d'abord que $H \subset \mathbb{Q}^*$: un entier impair n'est jamais nul. Pour le test, écris $x \times y^{-1}$ comme un quotient de deux produits d'entiers impairs.

3.

La partie H est-elle stable pour l'addition ?

INDICE

Un seul couple d'éléments de H dont la somme sort de H suffit. Pense au résultat de la question 1.

4.

On note H_+ l'ensemble des éléments strictement positifs de H. Montre que H_+ est un sous-groupe du groupe $(H, \times)$.

INDICE

Applique la caractérisation dans le groupe $(H, \times)$ de la question 2. Le test $x \times y^{-1}$ demande deux vérifications : l'appartenance à H et le signe.

5.

Résous dans H l'équation $\frac{3}{5} \times x = \frac{7}{9}$, d'inconnue x.

INDICE

Dans un groupe, l'équation $a \times x = b$ a une seule solution. Exprime-la avec l'inverse de a, puis vérifie qu'elle appartient à H.

Exercice 4

Un anneau de matrices engendré par une matrice de carré nul

On pose $U = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour a et b réels, on note $M(a,b) = aI + bU = \begin{pmatrix} a+3b & -9b \\ b & a-3b \end{pmatrix}$, et $E = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Ici, I est la matrice unité d'ordre 2 et O la matrice nulle.

1.

Calcule U^2. Montre ensuite, en calculant le produit case par case, que pour tous réels a, b, c et d : $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac,\ ad+bc)$.

INDICE

Pour le produit, développe chaque case, puis fais apparaître ac et $ad+bc$. Compare enfin avec l'écriture de $M(ac,\ ad+bc)$.

2.

Montre que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

INDICE

Applique la caractérisation dans le groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$, où le symétrique d'une matrice est son opposée. Calcule $M(a,b) - M(c,d)$ case par case.

3.

Montre que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Cite l'anneau induit sur une partie de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$. La commutativité se lit sur la formule de la question 1, car $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.

4.

Montre que U est un diviseur de zéro dans l'anneau E. Montre ensuite que $M(2,1)$ est inversible dans E, d'inverse $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

INDICE

Écris U sous la forme $M(a,b)$. Pour l'inverse, utilise la formule de la question 1, puis contrôle par un produit de matrices écrites en entier.

Exercice 5

Le groupe des applications x ↦ ax

Pour tout réel $a \neq 0$, on note u_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_a(x) = ax$. On pose $F = \{u_a \ / \ a \in \mathbb{R}^*\}$. On rappelle que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ muni de la composition, est un groupe de neutre $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

1.

Montre que, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, u_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $u_{\frac{1}{a}}$.

INDICE

Pour y réel, résous l'équation $ax = y$, d'inconnue x. Le fait que $a \neq 0$ est essentiel.

2.

Montre que, pour tous a et b de $\mathbb{R}^*$, $u_a \circ u_b = u_{ab}$. On pose $f(a) = u_a$ pour $a \in \mathbb{R}^*$. Déduis-en que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$.

INDICE

Deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont égales si elles prennent la même valeur en tout réel x. Calcule $(u_a \circ u_b)(x)$.

3.

Montre que f est injective. Déduis-en que $(F, \circ)$ est un groupe commutatif, isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

INDICE

Si $u_a = u_b$, évalue ces deux applications en un réel bien choisi. Pour le groupe, cite le transfert de structure sur l'image $F = f(\mathbb{R}^*)$.

4.

Dans le groupe $(F, \circ)$, donne le symétrique de u_{-4}. Résous ensuite l'équation $u_2 \circ g = u_6$, d'inconnue $g \in F$.

INDICE

Le symétrique de $f(a)$ est l'image de l'inverse de a. Pour l'équation, compose à gauche par le symétrique de u_2, du même côté que u_2.

Exercice 6

Les nombres a + b√5 : un corps et un anneau qui n'en est pas un

On admet que $\sqrt{5}$ est irrationnel. On pose $K = \{a + b\sqrt{5} \ / \ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ et $A = \{a + b\sqrt{5} \ / \ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Ici, A désigne un ensemble de réels, pas une matrice.

1.

Montre que $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Place K dans l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$. Vérifie le test du sous-groupe pour $+$, puis développe $(a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5})$ en utilisant $\sqrt{5}^2 = 5$.

2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, différent de $(0, 0)$. Montre que $a^2 - 5b^2 \neq 0$.

INDICE

Raisonne par l'absurde, puis distingue deux cas : $b = 0$ et $b \neq 0$. Dans le second cas, isole $\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

3.

Déduis-en que $(K, +, \times)$ est un corps commutatif. Calcule l'inverse de $3 + \sqrt{5}$.

INDICE

Pour $x = a + b\sqrt{5}$ non nul, multiplie x par $a - b\sqrt{5}$. Le point délicat : l'inverse proposé doit avoir des coefficients **rationnels**.

4.

Montre que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire, dans lequel $9 + 4\sqrt{5}$ est inversible mais 2 ne l'est pas. L'anneau A est-il un corps ?

INDICE

Reprends la question 1 avec des coefficients entiers. Pour $9 + 4\sqrt{5}$, essaie $9 - 4\sqrt{5}$. Pour 2, suppose $2(c + d\sqrt{5}) = 1$ avec c et d entiers, puis distingue $d = 0$ et $d \neq 0$.

Exercice 7

Équations dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$

1.

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, montre que $\overline{3}$ et $\overline{6}$ sont des diviseurs de zéro. Détermine ensuite les éléments inversibles et leurs inverses. $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est-il un corps ?

INDICE

Pour $\overline{3}$ et $\overline{6}$, cherche un produit égal à un multiple de 9. Pour les autres classes non nulles, cherche b tel que $ab \equiv 1\ [9]$.

2.

Justifie que $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ est un corps commutatif. Dresse le tableau des inverses de ses éléments non nuls.

INDICE

Vérifie l'hypothèse de l'énoncé sur les corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour le tableau, groupe les classes par paires d'inverses : ab doit valoir 1, 14, 27, 40, 53, 66…

3.

Résous dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{5} \times x + \overline{4} = \overline{1}$.

INDICE

Isole $\overline{5} \times x$, puis utilise l'inverse de $\overline{5}$ lu dans le tableau. Ramène chaque représentant entre 0 et 12.

4.

Résous l'équation $(x - \overline{2}) \times (x - \overline{5}) = \overline{0}$, d'abord dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Explique la différence.

INDICE

Dans un corps, un produit nul a un facteur nul. Dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, cette règle n'est plus garantie : teste les neuf classes une par une.

Exercice 8

Un corps sur $\mathbb{R}$ à lois inhabituelles

Sur $\mathbb{R}$, on définit deux lois de composition interne : $x * y = x + y + 1$ et $x \top y = xy + x + y$. On pose $f(t) = t - 1$ pour tout réel t.

1.

Montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, puis que, pour tous réels t et s, $f(t + s) = f(t) * f(s)$ et $f(ts) = f(t) \top f(s)$.

INDICE

Pour la bijection, résous $t - 1 = u$. Pour les deux égalités, calcule séparément chaque membre et développe $(t - 1)(s - 1)$.

2.

Déduis-en que $(\mathbb{R}, *, \top)$ est un corps commutatif. Précise son zéro et son unité.

INDICE

Applique le transfert d'une structure de corps, en partant d'un corps connu. Le zéro est l'image de 0, l'unité celle de 1.

3.

Calcule le symétrique de 3 pour $*$, puis l'inverse de 3 pour $\top$. Vérifie chaque résultat.

INDICE

Écris $3 = f(t)$. Le symétrique de $f(t)$ pour $*$ est $f(-t)$; l'inverse de $f(t)$ pour $\top$ est $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, si $t \neq 0$.

4.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $3 \top x = 2$.

INDICE

Écris $x = f(t)$ et $2 = f(3)$, puis ramène l'équation dans $\mathbb{R}$ grâce à la question 1.