BURHAN

Structures algébriques : groupes, anneaux, corps : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/structures-algebriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Structures algébriques : groupes, anneaux, corps	Entraînement	8

Exercice 1

La loi des résistances en parallèle

Deux résistances électriques de valeurs x et y (en ohms), montées en parallèle, équivalent à une seule résistance de valeur $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$. On étudie cette opération sur l'ensemble $E = \mathbb{R}_+^*$.

1.

Montre que $*$ est une loi de composition interne sur E. Calcule $3 * 6$ et $4 * 12$.

INDICE

Pour x et y strictement positifs, regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur. Le quotient existe-t-il toujours ?

CORRIGÉ

Loi interne. Soient x et y dans E. Alors $x + y > 0$, donc le quotient $\dfrac{xy}{x+y}$ existe. De plus, $xy > 0$, donc ce quotient est strictement positif. Ainsi $x * y \in E$.

Calculs. On a $3 * 6 = \dfrac{18}{9} = 2$ et $4 * 12 = \dfrac{48}{16} = 3$.

Conclusion. La loi $*$ est une loi de composition interne sur E, avec $3 * 6 = 2$ et $4 * 12 = 3$.

2.

Montre que, pour tous x et y de E, $\frac{1}{x*y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Déduis-en que $*$ est commutative et associative.

INDICE

Inverse le quotient, puis sépare la fraction obtenue en deux. Pour la suite, deux réels strictement positifs qui ont le même inverse sont égaux.

CORRIGÉ

L'égalité. Soient x et y dans E :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x*y} &= \frac{x+y}{xy} \\ &= \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} \\ &= \frac{1}{y} + \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Commutativité. D'après cette égalité, $\frac{1}{x*y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{y*x}$. Deux réels non nuls de même inverse sont égaux : $x*y = y*x$.

Associativité. Soient x, y et z dans E. En appliquant deux fois l'égalité :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x*y)*z} \\ &= \frac{1}{x*y} + \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y*z} \\ &= \frac{1}{x*(y*z)}.\end{aligned}$$

Donc $(x*y)*z = x*(y*z)$.

Conclusion. Pour tous x et y de E, $\frac{1}{x*y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, et la loi $*$ est commutative et associative sur E.

3.

Montre que la loi $*$ n'a pas d'élément neutre dans E.

INDICE

Raisonne par l'absurde : suppose qu'un réel e de E est neutre, puis traduis $x * e = x$ avec l'égalité de la question 2.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde qu'il existe $e \in E$ neutre pour $*$. Alors $1 * e = 1$. D'après la question 2, $\dfrac{1}{1 * e} = 1 + \dfrac{1}{e}$, donc

$$1 + \frac{1}{e} = 1, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{e} = 0.$$

C'est impossible : l'inverse d'un réel non nul n'est jamais nul.

Conclusion. La loi $*$ n'a pas d'élément neutre dans E.

4.

Montre que $J = \,]0, 1]$ est stable pour $*$. Montre ensuite que $L = [2, +\infty[$ n'est pas stable pour $*$, bien que $3 * 6 \in L$.

INDICE

Pour J, encadre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ lorsque x et y sont dans $]0, 1]$. Pour L, un seul couple bien choisi suffit, et un essai réussi ne prouve rien.

CORRIGÉ

Stabilité de J. Soient x et y dans J. Comme $0 < x \leq 1$, on a $\dfrac{1}{x} \geq 1$; de même, $\dfrac{1}{y} \geq 1$. D'après la question 2, $\dfrac{1}{x * y} \geq 2$, d'où

$$0 < x * y \leq \frac{1}{2} \leq 1.$$

Ainsi $x * y \in J$.

Non-stabilité de L. On a $2 \in L$, mais $2 * 2 = \dfrac{4}{4} = 1$ et $1 \notin L$. L'essai $3 * 6 = 2$, qui reste dans L, ne prouvait donc rien.

Conclusion. La partie J est stable pour $*$. Le couple $(2, 2)$ fait sortir de L : la partie L n'est pas stable pour $*$.

Exercice 2

Un groupe sur $\mathbb{C}$ privé de –i, transporté depuis $\mathbb{C}^*$

Soit $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Pour tous z et w de E, on pose $z * w = z + w - izw$.

1.

Calcule $1 * i$. Montre que, pour tous z et w de E, $1 - i(z * w) = (1 - iz)(1 - iw)$. Déduis-en que $*$ est une loi de composition interne sur E.

INDICE

Développe les deux membres, sans oublier que $i^2 = -1$. Pour la loi interne, cherche pour quel complexe z le facteur $1 - iz$ est nul.

CORRIGÉ

Calcul de $1 * i$. On a $1 * i = 1 + i - i \times 1 \times i = 1 + i + 1 = 2 + i$.

L'égalité. Soient z et w dans E. Comme $i^2 = -1$, on développe chaque membre :

$$\begin{aligned} &1 - i(z * w) \\ &= 1 - iz - iw + i^2 zw \\ &= 1 - iz - iw - zw, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1 - iz)(1 - iw) \\ &= 1 - iw - iz + i^2 zw \\ &= 1 - iz - iw - zw. \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux.

Loi interne. L'égalité $1 - iz = 0$ équivaut à $z = \dfrac{1}{i} = -i$. Comme $z \neq -i$ et $w \neq -i$, les facteurs $1 - iz$ et $1 - iw$ sont non nuls, donc leur produit aussi. Ainsi $1 - i(z * w) \neq 0$, c'est-à-dire $z * w \neq -i$.

Conclusion. On a $1 * i = 2 + i$, l'égalité est établie, et $*$ est une loi de composition interne sur E.

2.

On pose $f(u) = i(u-1)$ pour tout $u \in \mathbb{C}^*$. Montre que f est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, *)$.

INDICE

Vérifie d'abord que $f(u) \neq -i$. Calcule ensuite $1 - if(u)$: le résultat est très simple. Utilise alors l'égalité de la question 1.

CORRIGÉ

Valeurs dans E. Soit $u \in \mathbb{C}^*$. L'égalité $i(u-1) = -i$ équivaudrait à $u - 1 = -1$, soit $u = 0$, ce qui est exclu. Donc $f(u) \in E$.

Un calcul utile. On a

$$\begin{aligned} 1 - if(u) &= 1 - i^2(u-1) \\ &= 1 + u - 1 = u. \end{aligned}$$

Morphisme. Soient u et v dans $\mathbb{C}^*$. D'après la question 1, puis le calcul précédent :

$$\begin{aligned} &1 - i\big(f(u) * f(v)\big) \\ &= \big(1 - if(u)\big)\big(1 - if(v)\big) \\ &= uv = 1 - if(uv). \end{aligned}$$

Donc $i\big(f(u) * f(v)\big) = if(uv)$. En divisant par $i \neq 0$, on obtient $f(u) * f(v) = f(uv)$.

Conclusion. L'application f est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, *)$.

3.

Montre que f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur E, et précise sa réciproque.

INDICE

Pour $z \in E$, résous l'équation $f(u) = z$, d'inconnue u. Le point délicat : vérifier que la solution trouvée appartient bien à $\mathbb{C}^*$.

CORRIGÉ

Résolution. Soit $z \in E$. Pour $u \in \mathbb{C}^*$, l'équation $i(u-1) = z$ équivaut à $u - 1 = \dfrac{z}{i} = -iz$, soit $u = 1 - iz$.

Appartenance à $\mathbb{C}^*$. Comme $z \neq -i$, on a $1 - iz \neq 0$: la solution $u = 1 - iz$ appartient à $\mathbb{C}^*$. Tout z de E a donc exactement un antécédent par f.

Conclusion. L'application f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur E, de réciproque $z \mapsto 1 - iz$.

4.

Déduis-en que $(E, *)$ est un groupe commutatif. Précise son neutre et le symétrique z' d'un élément z de E.

INDICE

Cite le transfert de structure : groupe de départ, homomorphisme, surjectivité. Le symétrique de $f(u)$ est l'image de l'inverse de u ; ici, $u = 1 - iz$.

CORRIGÉ

Transfert. $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif, de neutre 1. L'application f est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, *)$ (question 2), surjectif (question 3). Par transfert de structure, $(E, *)$ est un groupe commutatif.

Neutre. C'est l'image du neutre 1 : $f(1) = i(1 - 1) = 0$.

Symétrique. Soit $z \in E$: $z = f(u)$ avec $u = 1 - iz$. Son symétrique est l'image de l'inverse de u :

$$\begin{aligned} z' &= f\left(\frac{1}{1 - iz}\right) \\ &= i\left(\frac{1}{1 - iz} - 1\right) \\ &= i \times \frac{iz}{1 - iz} \\ &= \frac{-z}{1 - iz}. \end{aligned}$$

Conclusion. $(E, *)$ est un groupe commutatif, de neutre 0, et tout z de E a pour symétrique $z' = \dfrac{-z}{1 - iz}$.

5.

Calcule le symétrique de 1 pour la loi $*$, puis vérifie-le par un calcul direct.

INDICE

Applique la formule de la question 4, puis rends le dénominateur réel avec le conjugué de $1-i$.

CORRIGÉ

Formule. D'après la question 4, avec $z=1$:

$$\begin{aligned} 1' &= \frac{-1}{1-i} \\ &= \frac{-(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= -\frac{1+i}{2}. \end{aligned}$$

Contrôle. Par définition de la loi :

$$\begin{aligned} & 1 * \left(-\frac{1+i}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1+i}{2} + i \times \frac{1+i}{2} \\ &= 1 + \frac{-1-i+i-1}{2} \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

On retrouve le neutre 0. La loi étant commutative, le composé dans l'autre ordre vaut aussi 0.

Conclusion. Le symétrique de 1 pour la loi $*$ est $-\frac{1+i}{2}$.

Exercice 3

Les rationnels de numérateur et dénominateur impairs

$(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe commutatif, de neutre 1. On note H l'ensemble des rationnels qui s'écrivent $\frac{a}{b}$, avec a et b deux entiers relatifs **impairs**.

1.

Montre que $\frac{3}{5}$, -7 et 1 appartiennent à H, mais que 2 n'appartient pas à H.

INDICE

Pour chaque nombre, propose une écriture avec deux entiers impairs. Pour 2, raisonne par l'absurde avec la parité.

CORRIGÉ

Trois éléments de H. On a $\frac{3}{5}$ avec 3 et 5 impairs, $-7 = \frac{-7}{1}$ avec -7 et 1 impairs, et $1 = \frac{1}{1}$.

Le nombre 2. Supposons par l'absurde que $2 = \frac{a}{b}$, avec a et b impairs. Alors $a = 2b$ est pair, ce qui contredit l'imparité de a.

Conclusion. Les nombres $\frac{3}{5}$, -7 et 1 appartiennent à H, et $2 \notin H$.

2.

Montre que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

INDICE

Vérifie d'abord que $H \subset \mathbb{Q}^*$: un entier impair n'est jamais nul. Pour le test, écris $x \times y^{-1}$ comme un quotient de deux produits d'entiers impairs.

CORRIGÉ

Partie non vide. Un entier impair n'est pas nul. Donc tout $\frac{a}{b}$, avec a et b impairs, est un rationnel non nul : $H \subset \mathbb{Q}^*$. De plus, $1 \in H$ (question 1), donc $H \neq \emptyset$.

Test du sous-groupe. Soient $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ dans H, avec a, b, c et d impairs. L'inverse de y dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est $y^{-1} = \frac{d}{c}$, et

$$x \times y^{-1} = \frac{ad}{bc}.$$

Produit de deux impairs. Soient k et m deux entiers. Alors

$$\begin{aligned}&(2k+1)(2m+1)\\ &= 2(2km + k + m) + 1.\end{aligned}$$

Un produit de deux entiers impairs est donc impair. Ainsi ad et bc sont impairs, et $x \times y^{-1} \in H$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-groupe, H est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$. Ainsi $(H, \times)$ est un groupe commutatif.

3.

La partie H est-elle stable pour l'addition ?

INDICE

Un seul couple d'éléments de H dont la somme sort de H suffit. Pense au résultat de la question 1.

CORRIGÉ

On a $1 \in H$, mais $1+1=2$ et $2 \notin H$ (question 1).

Conclusion. Le couple $(1,1)$ d'éléments de H a une somme hors de H : la partie H n'est pas stable pour l'addition.

4.

On note H_+ l'ensemble des éléments strictement positifs de H. Montre que H_+ est un sous-groupe du groupe $(H,\times)$.

INDICE

Applique la caractérisation dans le groupe $(H,\times)$ de la question 2. Le test $x \times y^{-1}$ demande deux vérifications : l'appartenance à H et le signe.

CORRIGÉ

Partie non vide. D'après la question 2, $(H,\times)$ est un groupe, de neutre 1. Par définition, $H_+ \subset H$, et $1 \in H_+$ car $1>0$: $H_+ \neq \emptyset$.

Test du sous-groupe. Soient x et y dans H_+. Comme H est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*,\times)$, on a $x \times y^{-1} \in H$. De plus, $x>0$ et $y^{-1}>0$, donc $x \times y^{-1}>0$. Ainsi $x \times y^{-1} \in H_+$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-groupe, H_+ est un sous-groupe de $(H,\times)$.

5.

Résous dans H l'équation $\dfrac{3}{5} \times x = \dfrac{7}{9}$, d'inconnue x.

INDICE

Dans un groupe, l'équation $a \times x = b$ a une seule solution. Exprime-la avec l'inverse de a, puis vérifie qu'elle appartient à H.

CORRIGÉ

Les nombres $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{7}{9}$ appartiennent au groupe $(H,\times)$. D'après les règles de calcul dans un groupe, l'équation a une seule solution dans H :

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \times \frac{7}{9} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{35}{27}. \end{aligned}$$

Comme 35 et 27 sont impairs, $\dfrac{35}{27} \in H$. Contrôle : $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{35}{27} = \dfrac{105}{135} = \dfrac{7}{9}$.

Conclusion. L'unique solution dans H est $x = \dfrac{35}{27}$.

Exercice 4

Un anneau de matrices engendré par une matrice de carré nul

On pose $U = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour a et b réels, on note $M(a,b) = aI + bU = \begin{pmatrix} a+3b & -9b \\ b & a-3b \end{pmatrix}$, et $E = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Ici, I est la matrice unité d'ordre 2 et O la matrice nulle.

1.

Calcule U^2. Montre ensuite, en calculant le produit case par case, que pour tous réels a, b, c et d : $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac,\ ad+bc)$.

INDICE

Pour le produit, développe chaque case, puis fais apparaître ac et $ad+bc$. Compare enfin avec l'écriture de $M(ac,\ ad+bc)$.

CORRIGÉ

Calcul de U^2. Ligne par colonne : $U^2 = \begin{pmatrix} 9-9 & -27+27 \\ 3-3 & -9+9 \end{pmatrix} = O$.

Produit $M(a,b) \times M(c,d)$. Soient a, b, c et d réels. Les quatre cases du produit valent :

- case $(1,1)$: $(a+3b)(c+3d) - 9bd = ac + 3(ad+bc)$;
- case $(1,2)$: $-9d(a+3b) - 9b(c-3d) = -9(ad+bc)$;
- case $(2,1)$: $b(c+3d) + d(a-3b) = ad+bc$;
- case $(2,2)$: $-9bd + (a-3b)(c-3d) = ac - 3(ad+bc)$.

Ce sont les cases de $M(ac,\ ad+bc)$.

Conclusion. On a $U^2 = O$ et, pour tous réels a, b, c et d, $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac,\ ad+bc)$.

2.

Montre que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

INDICE

Applique la caractérisation dans le groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$, où le symétrique d'une matrice est son opposée. Calcule $M(a,b) - M(c,d)$ case par case.

CORRIGÉ

Partie non vide. Par définition, $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif de neutre O. On a $O = M(0,0)$, donc $O \in E$ et $E \neq \emptyset$.

Test du sous-groupe. Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ dans E. Case par case, $M(a,b) - M(c,d)$ a pour coefficients :

- case $(1,1)$: $(a-c) + 3(b-d)$;
- case $(1,2)$: $-9(b-d)$;
- case $(2,1)$: $b-d$;
- case $(2,2)$: $(a-c) - 3(b-d)$.

Ce sont les coefficients de $M(a-c,\ b-d)$, avec $a-c$ et $b-d$ réels. Donc $M(a,b) - M(c,d) \in E$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-groupe, E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

3.

Montre que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Cite l'anneau induit sur une partie de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$. La commutativité se lit sur la formule de la question 1, car $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.

CORRIGÉ

Anneau induit. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. La partie E en est un sous-groupe additif (question 2). Elle est stable pour $\times$, car $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac,\ ad+bc)$, avec ac et $ad+bc$ réels (question 1). D'après l'anneau induit sur une partie, $(E, +, \times)$ est un anneau.

Commutativité. Pour tous réels a, b, c et d :

$$\begin{aligned} &M(c,d) \times M(a,b) \\ &= M(ca,\ cb+da) \\ &= M(ac,\ ad+bc) \\ &= M(a,b) \times M(c,d). \end{aligned}$$

Unité. On a $I = M(1,0) \in E$.

Conclusion. $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire, d'unité I.

4.

Montre que U est un diviseur de zéro dans l'anneau E. Montre ensuite que $M(2,1)$ est inversible dans E, d'inverse $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

INDICE

Écris U sous la forme $M(a,b)$. Pour l'inverse, utilise la formule de la question 1, puis contrôle par un produit de matrices écrites en entier.

CORRIGÉ

Diviseur de zéro. On a $U=M(0,1)\in E$ et $U\neq O$. Pourtant $U\times U=O$ (question 1). Donc U est un diviseur de zéro de l'anneau E.

Inverse de $M(2,1)$. On applique la question 1 avec $a=2, b=1, c=\frac{1}{2}$ et $d=-\frac{1}{4}$. Le produit $M(2,1)\times M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ vaut $M(ac,\ ad+bc)$, avec $ac=2\times\frac{1}{2}=1$ et

$$\begin{aligned} &ad+bc\\ &=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+1\times\frac{1}{2}=0. \end{aligned}$$

Ce produit vaut donc $M(1,0)=I$. L'anneau E étant commutatif, le produit dans l'autre ordre vaut aussi I.

Contrôle en entier. On a $M(2,1)=\begin{pmatrix}5 & -9\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{9}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}$. Ligne par colonne, le produit a pour cases :

- case $(1,1)$: $-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}=1$;
- case $(1,2)$: $\frac{45}{4}-\frac{45}{4}=0$;
- case $(2,1)$: $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$;
- case $(2,2)$: $\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=1$.

Conclusion. U est un diviseur de zéro dans E, et $M(2,1)$ est inversible dans E, d'inverse $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

Exercice 5

Le groupe des applications x ↦ ax

Pour tout réel $a \neq 0$, on note u_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_a(x) = ax$. On pose $F = \{u_a \ / \ a \in \mathbb{R}^*\}$. On rappelle que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ muni de la composition, est un groupe de neutre $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

1.

Montre que, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, u_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $u_{\frac{1}{a}}$.

INDICE

Pour y réel, résous l'équation $ax = y$, d'inconnue x. Le fait que $a \neq 0$ est essentiel.

CORRIGÉ

Bijectivité. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}$. Comme $a \neq 0$, l'équation $ax = y$ a une seule solution réelle, $x = \dfrac{y}{a}$. Tout réel y a donc exactement un antécédent par u_a.

Réciproque. Elle associe à y le réel $\dfrac{1}{a}y$: c'est $u_{\frac{1}{a}}$, et $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$.

Conclusion. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, u_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $u_{\frac{1}{a}}$.

2.

Montre que, pour tous a et b de $\mathbb{R}^*$, $u_a \circ u_b = u_{ab}$. On pose $f(a) = u_a$ pour $a \in \mathbb{R}^*$. Déduis-en que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$.

INDICE

Deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont égales si elles prennent la même valeur en tout réel x. Calcule $(u_a \circ u_b)(x)$.

CORRIGÉ

Composée. Soient a et b dans $\mathbb{R}^*$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(u_a \circ u_b)(x) &= u_a(bx) \\ &= abx = u_{ab}(x).\end{aligned}$$

Donc $u_a \circ u_b = u_{ab}$.

Morphisme. D'après la question 1, f va de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour tous a et b de $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}f(ab) &= u_{ab} = u_a \circ u_b \\ &= f(a) \circ f(b).\end{aligned}$$

Conclusion. L'application f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$.

3.

Montre que f est injective. Déduis-en que $(F, \circ)$ est un groupe commutatif, isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

INDICE

Si $u_a = u_b$, évalue ces deux applications en un réel bien choisi. Pour le groupe, cite le transfert de structure sur l'image $F = f(\mathbb{R}^*)$.

CORRIGÉ

Injectivité. Soient a et b dans $\mathbb{R}^*$ tels que $f(a) = f(b)$. Alors $u_a(1) = u_b(1)$, soit $a = b$. Donc f est injective.

Transfert. $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif, et f en est un homomorphisme dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$, d'image $f(\mathbb{R}^*) = F$. Par transfert de structure, $(F, \circ)$ est un groupe commutatif, de neutre $f(1) = u_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Isomorphisme. L'application f est injective, et surjective de $\mathbb{R}^*$ sur F par définition de F. C'est un homomorphisme bijectif, donc un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur $(F, \circ)$.

Conclusion. $(F, \circ)$ est un groupe commutatif, isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$. Remarque : $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$, lui, n'est pas commutatif.

4.

Dans le groupe $(F, \circ)$, donne le symétrique de u_{-4}. Résous ensuite l'équation $u_2 \circ g = u_6$, d'inconnue $g \in F$.

INDICE

Le symétrique de $f(a)$ est l'image de l'inverse de a. Pour l'équation, compose à gauche par le symétrique de u_2, du même côté que u_2.

CORRIGÉ

Symétrique de u_{-4}. On a $u_{-4} = f(-4)$, dont le symétrique est l'image de l'inverse de -4 : $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = u_{-\frac{1}{4}}$. Contrôle : $u_{-4} \circ u_{-\frac{1}{4}} = u_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Équation. Dans le groupe $(F, \circ)$, l'équation $u_2 \circ g = u_6$ a une seule solution. On compose à gauche par $u_{\frac{1}{2}}$, symétrique de u_2 :

$$g = u_{\frac{1}{2}} \circ u_6 = u_3,$$

car $\dfrac{1}{2} \times 6 = 3$. Contrôle : $u_2 \circ u_3 = u_6$.

Conclusion. Le symétrique de u_{-4} est $u_{-\frac{1}{4}}$, et l'unique solution de l'équation est $g = u_3$.

Exercice 6

Les nombres a + b√5 : un corps et un anneau qui n'en est pas un

On admet que $\sqrt{5}$ est irrationnel. On pose $K = \{a + b\sqrt{5} \ / \ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ et $A = \{a + b\sqrt{5} \ / \ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Ici, A désigne un ensemble de réels, pas une matrice.

1.

Montre que $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Place K dans l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$. Vérifie le test du sous-groupe pour $+$, puis développe $(a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5})$ en utilisant $\sqrt{5}^2 = 5$.

CORRIGÉ

On a $K \subset \mathbb{R}$, et $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Sous-groupe. On a $0 = 0 + 0\sqrt{5} \in K$. Soient $x = a + b\sqrt{5}$ et $y = c + d\sqrt{5}$ dans K, avec a, b, c, d rationnels. Alors

$$x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{5},$$

avec $a - c$ et $b - d$ rationnels : $x - y \in K$. Donc K est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Stabilité. Comme $\sqrt{5}^2 = 5$:

$$\begin{aligned} xy = (ac + 5bd) \\ + (ad + bc)\sqrt{5}, \end{aligned}$$

avec $ac + 5bd$ et $ad + bc$ rationnels : $xy \in K$.

Conclusion. D'après l'anneau induit sur une partie, $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif. Il est unitaire, car $1 = 1 + 0\sqrt{5} \in K$.

2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, différent de $(0, 0)$. Montre que $a^2 - 5b^2 \neq 0$.

INDICE

Raisonne par l'absurde, puis distingue deux cas : $b = 0$ et $b \neq 0$. Dans le second cas, isole $\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde que $a^2 - 5b^2 = 0$.

- **Cas $b = 0$.** Alors $a^2 = 0$, donc $a = 0$, et $(a, b) = (0, 0)$: c'est exclu.
- **Cas $b \neq 0$.** Alors $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$, donc $\sqrt{5} = \left|\frac{a}{b}\right|$ serait rationnel. Cela contredit l'irrationalité de $\sqrt{5}$.

Les deux cas mènent à une contradiction.

Conclusion. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ différent de $(0, 0)$, $a^2 - 5b^2 \neq 0$.

3.

Déduis-en que $(K,+,\times)$ est un corps commutatif. Calcule l'inverse de $3+\sqrt{5}$.

INDICE

Pour $x=a+b\sqrt{5}$ non nul, multiplie x par $a-b\sqrt{5}$. Le point délicat : l'inverse proposé doit avoir des coefficients **rationnels**.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $(K,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire, et $1\neq 0$.

Inverse d'un élément non nul. Soit $x=a+b\sqrt{5}$ un élément non nul de K, avec a et b rationnels. Alors $(a,b)\neq(0,0)$, donc $N=a^2-5b^2\neq 0$ (question 2). On pose

$$y=\frac{a}{N}-\frac{b}{N}\sqrt{5}.$$

Les coefficients $\dfrac{a}{N}$ et $-\dfrac{b}{N}$ sont rationnels, donc $y\in K$. De plus,

$$\begin{aligned} xy &= \frac{(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})}{N} \\ &= \frac{a^2-5b^2}{N}=1, \end{aligned}$$

et $yx=1$ par commutativité. Tout élément non nul de K est donc inversible dans K.

Inverse de $3+\sqrt{5}$. Ici $N=9-5=4$, donc $(3+\sqrt{5})^{-1}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{5}$. Contrôle : $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=4$.

Conclusion. $(K,+,\times)$ est un corps commutatif, et l'inverse de $3+\sqrt{5}$ est $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{5}$.

4.

Montre que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire, dans lequel $9 + 4\sqrt{5}$ est inversible mais 2 ne l'est pas. L'anneau A est-il un corps ?

INDICE

Reprends la question 1 avec des coefficients entiers. Pour $9 + 4\sqrt{5}$, essaie $9 - 4\sqrt{5}$. Pour 2, suppose $2(c + d\sqrt{5}) = 1$ avec c et d entiers, puis distingue $d = 0$ et $d \neq 0$.

CORRIGÉ

Anneau. Les calculs de la question 1 restent valables avec des entiers : 0 et 1 sont dans A, et $x - y$ et xy ont des coefficients entiers. Donc A est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, stable pour $\times$, qui contient 1. D'après l'anneau induit sur une partie, $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Un inversible. On a $9 - 4\sqrt{5} \in A$ et $(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5}) = 81 - 80 = 1$. Donc $9 + 4\sqrt{5}$ est inversible dans A.

Un non-inversible. Supposons par l'absurde que $2(c + d\sqrt{5}) = 1$, avec c et d entiers.

- Si $d \neq 0$, alors $\sqrt{5} = \dfrac{1 - 2c}{2d}$ serait rationnel, ce qui est faux.
- Si $d = 0$, alors $2c = 1$, ce qui est impossible pour un entier c.

Ainsi 2 n'est pas inversible dans A.

Conclusion. $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire, et $9 + 4\sqrt{5}$ y est inversible. L'élément 2 est non nul et sans inverse dans A : l'anneau A n'est pas un corps.

Exercice 7

Équations dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$

1.

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, montre que $\overline{3}$ et $\overline{6}$ sont des diviseurs de zéro. Détermine ensuite les éléments inversibles et leurs inverses. $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est-il un corps ?

INDICE

Pour $\overline{3}$ et $\overline{6}$, cherche un produit égal à un multiple de 9. Pour les autres classes non nulles, cherche b tel que $ab \equiv 1\ [9]$.

CORRIGÉ

Diviseurs de zéro. On a $\overline{3} \times \overline{3} = \overline{9} = \overline{0}$ et $\overline{6} \times \overline{3} = \overline{18} = \overline{0}$, avec $\overline{3} \neq \overline{0}$ et $\overline{6} \neq \overline{0}$. Donc $\overline{3}$ et $\overline{6}$ sont des diviseurs de zéro.

Éléments non inversibles. Supposons $\overline{3} \times \overline{u} = \overline{1}$. Par associativité,

$$\begin{aligned}\overline{3} &= \overline{3} \times (\overline{3} \times \overline{u}) \\ &= (\overline{3} \times \overline{3}) \times \overline{u} = \overline{0},\end{aligned}$$

ce qui est faux. Supposons $\overline{6} \times \overline{u} = \overline{1}$. De même,

$$\begin{aligned}\overline{3} &= \overline{3} \times (\overline{6} \times \overline{u}) \\ &= (\overline{3} \times \overline{6}) \times \overline{u} = \overline{0},\end{aligned}$$

ce qui est faux. Enfin, $\overline{0} \times \overline{u} = \overline{0} \neq \overline{1}$: $\overline{0}$ n'est pas inversible.

Éléments inversibles. Pour les autres classes, on a $1 \times 1 = 1$, $2 \times 5 = 10 = 9 + 1$, $4 \times 7 = 28 = 3 \times 9 + 1$ et $8 \times 8 = 64 = 7 \times 9 + 1$. Les inversibles sont donc $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$ et $\overline{8}$, avec :

- $\overline{1}^{-1} = \overline{1}$ et $\overline{8}^{-1} = \overline{8}$;
- $\overline{2}^{-1} = \overline{5}$ et $\overline{5}^{-1} = \overline{2}$;
- $\overline{4}^{-1} = \overline{7}$ et $\overline{7}^{-1} = \overline{4}$.

Conclusion. L'élément $\overline{3}$ est non nul et non inversible : $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.

2.

Justifie que $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ est un corps commutatif. Dresse le tableau des inverses de ses éléments non nuls.

INDICE

Vérifie l'hypothèse de l'énoncé sur les corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour le tableau, groupe les classes par paires d'inverses : ab doit valoir $1, 14, 27, 40, 53, 66$…

CORRIGÉ

Structure. Le nombre 13 est premier. D'après l'énoncé sur les corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps commutatif : chaque classe non nulle a un inverse.

Paires d'inverses. On trouve $1 \times 1 = 1, 2 \times 7 = 14, 3 \times 9 = 27, 4 \times 10 = 40, 5 \times 8 = 40, 6 \times 11 = 66$ et $12 \times 12 = 144$. Chacun de ces produits est congru à 1 modulo 13 :

- $14 = 13 + 1$ et $27 = 2 \times 13 + 1$;
- $40 = 3 \times 13 + 1$ et $66 = 5 \times 13 + 1$;
- $144 = 11 \times 13 + 1$.

Conclusion. Le tableau des inverses dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ est le suivant.

$\overline{a}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{a}^{-1}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$

3.

Résous dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{5} \times x + \overline{4} = \overline{1}$.

INDICE

Isole $\overline{5} \times x$, puis utilise l'inverse de $\overline{5}$ lu dans le tableau. Ramène chaque représentant entre 0 et 12.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Isoler le terme en x. En ajoutant $-\overline{4}$ aux deux membres, l'équation équivaut à

$$\overline{5} \times x = \overline{1} - \overline{4} = \overline{-3} = \overline{10}.$$

Multiplier par l'inverse. L'inverse de $\overline{5}$ est $\overline{8}$ (question 2). L'équation équivaut donc à

$$x = \overline{8} \times \overline{10} = \overline{80} = \overline{2},$$

car $80 = 6 \times 13 + 2$.

Conclusion. L'unique solution est $x = \overline{2}$. Contrôle : $5 \times 2 + 4 = 14 = 13 + 1$.

4.

Résous l'équation $(x-\overline{2})\times(x-\overline{5})=\overline{0}$, d'abord dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Explique la différence.

INDICE

Dans un corps, un produit nul a un facteur nul. Dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, cette règle n'est plus garantie : teste les neuf classes une par une.

CORRIGÉ

Dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. C'est un corps : il n'a pas de diviseur de zéro. L'équation équivaut donc à $x-\overline{2}=\overline{0}$ ou $x-\overline{5}=\overline{0}$. Les solutions sont $\overline{2}$ et $\overline{5}$.

Dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. On calcule le produit pour chaque classe :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$(x-\overline{2})\times(x-\overline{5})$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

Les solutions sont $\overline{2}$, $\overline{5}$ et $\overline{8}$. Pour $x=\overline{8}$, on a $(\overline{6})\times(\overline{3})=\overline{18}=\overline{0}$, alors que les deux facteurs sont non nuls.

Conclusion. L'équation a deux solutions dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ et trois dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. La solution supplémentaire $\overline{8}$ vient des diviseurs de zéro de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Exercice 8

Un corps sur $\mathbb{R}$ à lois inhabituelles

Sur $\mathbb{R}$, on définit deux lois de composition interne : $x * y = x + y + 1$ et $x \top y = xy + x + y$. On pose $f(t) = t - 1$ pour tout réel t.

1.

Montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, puis que, pour tous réels t et s, $f(t + s) = f(t) * f(s)$ et $f(ts) = f(t) \top f(s)$.

INDICE

Pour la bijection, résous $t - 1 = u$. Pour les deux égalités, calcule séparément chaque membre et développe $(t - 1)(s - 1)$.

CORRIGÉ

Bijection. Pour tout réel u, l'équation $t - 1 = u$ a une seule solution, $t = u + 1$: f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Soient t et s deux réels quelconques.

Première loi. On a

$$\begin{aligned} & f(t) * f(s) \\ &= (t - 1) + (s - 1) + 1 \\ &= t + s - 1 = f(t + s). \end{aligned}$$

Seconde loi. On développe $(t - 1)(s - 1)$:

$$\begin{aligned} & f(t) \top f(s) \\ &= (t - 1)(s - 1) \\ &\quad + (t - 1) + (s - 1) \\ &= ts - t - s + 1 + t + s - 2 \\ &= ts - 1 = f(ts). \end{aligned}$$

Conclusion. f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tous réels t et s, $f(t + s) = f(t) * f(s)$ et $f(ts) = f(t) \top f(s)$.

2.

Déduis-en que $(\mathbb{R}, *, \top)$ est un corps commutatif. Précise son zéro et son unité.

INDICE

Applique le transfert d'une structure de corps, en partant d'un corps connu. Le zéro est l'image de 0, l'unité celle de 1.

CORRIGÉ

Transfert. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif. L'application f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(t+s) = f(t) * f(s)$ et $f(ts) = f(t) \top f(s)$ (question 1). Par transfert d'une structure de corps, $(\mathbb{R}, *, \top)$ est un corps commutatif.

Zéro et unité. Le zéro, neutre de $*$, est $f(0) = -1$. L'unité, neutre de $\top$, est $f(1) = 0$. Contrôle : pour tout réel x, $x * (-1) = x$ et $x \top 0 = x$.

Conclusion. $(\mathbb{R}, *, \top)$ est un corps commutatif, de zéro -1 et d'unité 0.

3.

Calcule le symétrique de 3 pour $*$, puis l'inverse de 3 pour $\top$. Vérifie chaque résultat.

INDICE

Écris $3 = f(t)$. Le symétrique de $f(t)$ pour $*$ est $f(-t)$; l'inverse de $f(t)$ pour $\top$ est $f\left(\frac{1}{t}\right)$, si $t \neq 0$.

CORRIGÉ

On a $3 = f(4)$.

Symétrique pour $*$. C'est l'image de l'opposé de 4 : $f(-4) = -5$. Contrôle : $3 * (-5) = 3 - 5 + 1 = -1$, le zéro du corps.

Inverse pour $\top$. Comme $4 \neq 0$, c'est l'image de l'inverse de 4 :

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Contrôle : $3 \top \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{4} + 3 - \frac{3}{4} = 0$, l'unité du corps.

Conclusion. Le symétrique de 3 pour $*$ est -5, et son inverse pour $\top$ est $-\frac{3}{4}$.

4.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $3 \top x = 2$.

INDICE

Écris $x = f(t)$ et $2 = f(3)$, puis ramène l'équation dans $\mathbb{R}$ grâce à la question 1.

CORRIGÉ

Changement d'inconnue. Soit x un réel ; on pose $x = f(t)$, c'est-à-dire $t = x + 1$. Comme $3 = f(4)$ et $2 = f(3)$, l'équation s'écrit $f(4) \top f(t) = f(3)$, soit $f(4t) = f(3)$.

Résolution. Comme f est injective, l'équation équivaut à $4t = 3$, soit $t = \dfrac{3}{4}$. On en déduit

$$x = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Conclusion. L'unique solution est $x = -\dfrac{1}{4}$. Contrôle : $3 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + 3 - \dfrac{1}{4} = -1 + 3 = 2$.