BURHAN

Structures algébriques : groupes, anneaux, corps : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/structures-algebriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Structures algébriques : groupes, anneaux, corps	Application	10

Exercice 1

Une partie de $\mathbb{Z}$ stable pour le produit

Soit $H = \{5k + 1 \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme $5k + 1$. Par exemple, $-4 = 5 \times (-1) + 1$ appartient à H.

1.

Montre que H est stable pour la multiplication $\times$ de $\mathbb{Z}$.

INDICE

Prends deux éléments quelconques $x = 5k + 1$ et $y = 5m + 1$ de H, avec k et m entiers. Développe xy, puis cherche à l'écrire $5q + 1$ avec q entier.

2.

Montre que H n'est pas stable pour l'addition $+$.

INDICE

Pour réfuter, un seul couple suffit : essaie deux petits éléments positifs de H. Le point délicat : prouver que leur somme ne s'écrit pas $5q + 1$.

3.

Sur $\mathbb{Z}$, on définit la loi $*$ par $x * y = x + y + 9$. Montre que H est stable pour $*$. Calcule ensuite $6 * (-4)$.

INDICE

Reprends la méthode de la question 1 avec $x = 5k + 1$ et $y = 5m + 1$. Regroupe les constantes pour faire apparaître un multiple de 5, plus 1.

Exercice 2

Deux lois sur $\mathbb{R}$: commuter, regrouper, distribuer

1.

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x \top y = xy - y$. Montre que la loi $\top$ n'est ni commutative, ni associative.

INDICE

Pour réfuter, un exemple chiffré suffit pour chaque propriété. Pour l'associativité, essaie des valeurs comme 0 et 1, et calcule chaque parenthèse à part.

2.

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x * y = x + y + 2xy$. Montre que la loi $*$ est commutative et associative.

INDICE

La commutativité vient de celles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Pour l'associativité, développe $(x * y) * z = (x * y) + z + 2(x * y)z$, puis l'autre membre séparément.

3.

Montre que la multiplication $\times$ n'est pas distributive par rapport à la loi $*$ de la question 2.

INDICE

La distributivité demanderait $x \times (y * z) = (x \times y) * (x \times z)$ pour tous réels x, y et z. Cherche un triplet simple, sans zéro, qui la met en défaut.

Exercice 3

Neutre, symétriques et itérés d'une loi sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x * y = 2xy - x - y + 1$. Cette loi est commutative, et on admet qu'elle est associative.

1.

Montre que la loi $*$ admet un élément neutre e, que tu préciseras.

INDICE

Écris l'équation $x * e = x$ et regroupe les termes qui contiennent e. Le point délicat : le neutre doit convenir pour **tout** réel x, sans dépendre de x.

2.

Montre que tout réel $x \neq \dfrac{1}{2}$ admet un symétrique x', que tu exprimeras en fonction de x. Montre que $\dfrac{1}{2}$ n'a pas de symétrique.

INDICE

Résous $x * x' = 1$, d'inconnue x', en regroupant les termes en x'. Le coefficient de x' s'annule pour une valeur de x : traite-la à part.

3.

Calcule le symétrique $2'$ de 2, puis les itérés 2^2, 2^3 et 2^{-2} pour la loi $*$.

INDICE

Les itérés se calculent par la définition : $2^2 = 2 * 2$, puis $2^3 = 2^2 * 2$. Ici, 2^2 n'est pas le carré usuel. Pour 2^{-2}, compose $2'$ avec lui-même.

Exercice 4

Un groupe sur les couples de réels

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $*$ par $(a,b)*(c,d)=(a+c,\ b+d+2ac)$.

1.

Calcule $(1,2)*(3,-1)$ et $(3,-1)*(1,2)$. Montre que $*$ est une loi de composition interne commutative sur $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Pour la loi interne, regarde si les deux coordonnées du résultat sont des réels. Pour la commutativité, compare $(a,b)*(c,d)$ et $(c,d)*(a,b)$ coordonnée par coordonnée.

2.

Montre que la loi $*$ est associative.

INDICE

Prends trois couples (a,b), (c,d) et (p,q). Calcule les deux membres séparément, puis compare surtout les deuxièmes coordonnées.

3.

Montre que $(0,0)$ est l'élément neutre de $*$, puis que tout couple (a,b) a pour symétrique $(-a,\ -b+2a^2)$.

INDICE

La loi est commutative : un seul côté suffit pour chaque vérification. Pour le symétrique, calcule avec soin la deuxième coordonnée du composé.

4.

Conclus sur la structure de $(\mathbb{R}^2,*)$. Donne le symétrique de $(1,2)$ et vérifie-le.

INDICE

Rassemble les axiomes établis aux questions 1 à 3. Nomme l'ensemble, la loi et la structure obtenue.

Exercice 5

Les produits de puissances de 2 et de 5

On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, l'ensemble des réels strictement positifs muni de la multiplication, est un groupe commutatif de neutre 1. On pose $H = \{2^a 5^b \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1.

Montre que $0{,}4$ et $12{,}5$ appartiennent à H, puis que $1 \in H$.

INDICE

Écris chaque nombre comme une fraction, puis décompose numérateur et dénominateur en puissances de 2 et de 5. Les exposants peuvent être négatifs.

2.

Montre que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

INDICE

Applique la caractérisation : H non vide, puis $x \times y^{-1} \in H$ pour tous x et y de H. Ici, le symétrique de y est son inverse : écris-le avec des exposants.

3.

On pose $L = \{2^a 5^b \ / \ (a,b) \in \mathbb{N}^2\}$. Montre que L contient 1 et est stable pour $\times$, mais que ce n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

INDICE

Pour réfuter, cherche un élément de L dont l'inverse n'est pas dans L. Compare chaque élément de L au réel 1.

Exercice 6

Trois applications de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

1.

On pose $f(x) = x^5$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montre que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

INDICE

Vérifie d'abord que $f(x)$ appartient à $\mathbb{R}^*$. Compare ensuite $f(xy)$ et $f(x) \times f(y)$ avec une règle de calcul sur les puissances.

2.

Montre que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur lui-même. Donne les antécédents de -32 et de $\dfrac{1}{32}$.

INDICE

Il reste la bijectivité : pour $u \in \mathbb{R}^*$, combien de réels non nuls x vérifient $x^5 = u$? Pense au sens de variation de $x \mapsto x^5$ sur $\mathbb{R}$.

3.

On pose $g(x) = x^4$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montre que g est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même, mais pas un isomorphisme.

INDICE

L'homomorphisme se prouve comme à la question 1. Pour réfuter la bijectivité, un exemple suffit : deux réels de même image, ou un réel sans antécédent.

4.

On pose $h(x) = 5x$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montre que h n'est pas un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même.

INDICE

Teste l'égalité des deux membres avec des valeurs très simples. Tu peux aussi regarder l'image du neutre.

Exercice 7

Les puissances entières de −2

Pour tout entier relatif n, on pose $f(n) = (-2)^n$. On note $H = \{(-2)^n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$ l'image de f.

1.

Montre que f est un homomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

INDICE

Vérifie que $(-2)^n$ n'est jamais nul. Utilise ensuite une règle des puissances entières d'un réel non nul.

2.

Déduis-en que $(H, \times)$ est un groupe commutatif. Précise son neutre.

INDICE

Cite le transfert de structure de groupe : nomme le groupe de départ, l'homomorphisme et l'ensemble image. Le neutre de H est l'image du neutre de $(\mathbb{Z}, +)$.

3.

Donne l'inverse de -8 dans $(H, \times)$. Calcule ensuite $f(3) \times f(-5)$.

INDICE

Écris -8 sous la forme $f(n)$. Le symétrique de $f(n)$ dans H est l'image du symétrique de n dans $(\mathbb{Z}, +)$.

4.

Montre que f n'est pas un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(\mathbb{R}^*, \times)$. Que dit alors le transfert sur $\mathbb{R}^*$?

INDICE

Cherche un réel non nul simple qui n'est pas une puissance de -2. Raisonne sur la valeur absolue de $(-2)^n$.

Exercice 8

L'anneau des nombres dyadiques

On note D l'ensemble des rationnels qui s'écrivent $\frac{k}{2^n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$ et $5 = \frac{5}{2^0}$ appartiennent à D.

1.

Montre que D est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$.

INDICE

Réduis $\frac{k}{2^n} - \frac{m}{2^p}$ au dénominateur 2^{n+p}. Vérifie que le numérateur est entier et que l'exposant est un entier naturel.

2.

Montre que $(D, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Prouve d'abord la stabilité de D pour $\times$. Cite ensuite l'anneau induit sur une partie de l'anneau $(\mathbb{Q}, +, \times)$, sans oublier l'unité.

3.

Montre que 2 est inversible dans l'anneau D, mais que 3 ne l'est pas. L'anneau D est-il un corps ?

INDICE

Pour 2, propose un inverse et vérifie qu'il est dans D. Pour 3, suppose que $3 \times \frac{k}{2^n} = 1$ et cherche une contradiction de divisibilité.

Exercice 9

$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est un corps, $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ n'en est pas un

1.

Justifie que $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps commutatif. Calcule les inverses de $\overline{3}$ et de $\overline{7}$.

INDICE

Cite l'énoncé sur les corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et vérifie son hypothèse. Pour un inverse, cherche b tel que $3b \equiv 1\ [11]$ en essayant les multiples de 3.

2.

Résous dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{3} \times x + \overline{5} = \overline{2}$.

INDICE

Ajoute l'opposé de $\overline{5}$ aux deux membres, puis multiplie par l'inverse de $\overline{3}$. Le point délicat : ramener chaque représentant entre 0 et 10.

3.

Montre que $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps. Donne un élément non nul sans inverse.

INDICE

Écris 15 comme produit de deux entiers compris entre 2 et 14. Rappelle-toi qu'un corps n'a pas de diviseur de zéro.

Exercice 10

Produits de matrices d'ordre 2 et 3

1.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calcule $A + 2B$ et AB.

INDICE

Additionne et multiplie par 2 coefficient par coefficient. Pour la case (i, j) de AB, prends la ligne i de A et la colonne j de B.

2.

Calcule BA. Le produit des matrices est-il commutatif dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

INDICE

Cette fois, prends les lignes de B et les colonnes de A. Pour conclure, une seule case différente suffit.

3.

On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calcule CD.

INDICE

Chaque case de CD est une somme de trois produits. Avance ligne par ligne, et écris chaque somme avant de l'effectuer.

4.

On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule $N^2 = N \times N$ et $N^3 = N^2 \times N$. Quelle règle des réels ce calcul met-il en défaut ?

INDICE

Beaucoup de cases sont nulles : repère les produits où un 0 apparaît. Pour la règle, pense au produit de deux réels non nuls.