BURHAN

Structures algébriques : groupes, anneaux, corps : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/structures-algebriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Structures algébriques : groupes, anneaux, corps	Application	10

Exercice 1

Une partie de $\mathbb{Z}$ stable pour le produit

Soit $H = \{5k + 1 \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme $5k + 1$. Par exemple, $-4 = 5 \times (-1) + 1$ appartient à H.

1.

Montre que H est stable pour la multiplication $\times$ de $\mathbb{Z}$.

INDICE

Prends deux éléments quelconques $x = 5k + 1$ et $y = 5m + 1$ de H, avec k et m entiers. Développe xy, puis cherche à l'écrire $5q + 1$ avec q entier.

CORRIGÉ

Soient x et y dans H. Il existe des entiers relatifs k et m tels que $x = 5k + 1$ et $y = 5m + 1$. On développe :

$$\begin{aligned} xy &= 25km + 5k + 5m + 1 \\ &= 5(5km + k + m) + 1. \end{aligned}$$

Or $q = 5km + k + m$ est un entier relatif, car k et m en sont. Donc $xy = 5q + 1$ appartient à H.

Conclusion. Pour tous x et y de H, le produit $x \times y$ appartient à H : la partie H est stable pour la multiplication.

2.

Montre que H n'est pas stable pour l'addition $+$.

INDICE

Pour réfuter, un seul couple suffit : essaie deux petits éléments positifs de H. Le point délicat : prouver que leur somme ne s'écrit pas $5q + 1$.

CORRIGÉ

Deux éléments de H. On a $1 = 5 \times 0 + 1$ et $6 = 5 \times 1 + 1$, donc $1 \in H$ et $6 \in H$.

Leur somme. Elle vaut 7. Si l'on avait $7 = 5q + 1$ avec q entier, on aurait $5q = 6$. C'est impossible, car 5 ne divise pas 6. Donc $7 \notin H$.

Conclusion. Les éléments 1 et 6 de H ont une somme hors de H : la partie H n'est pas stable pour l'addition.

3.

Sur $\mathbb{Z}$, on définit la loi $*$ par $x * y = x + y + 9$. Montre que H est stable pour $*$. Calcule ensuite $6 * (-4)$.

INDICE

Reprends la méthode de la question 1 avec $x = 5k + 1$ et $y = 5m + 1$. Regroupe les constantes pour faire apparaître un multiple de 5, plus 1.

CORRIGÉ

Stabilité. Soient x et y dans H : $x = 5k + 1$ et $y = 5m + 1$, avec k et m entiers relatifs. Alors

$$\begin{aligned} x * y &= 5k + 1 + 5m + 1 + 9 \\ &= 5(k + m + 2) + 1, \end{aligned}$$

avec $k + m + 2 \in \mathbb{Z}$. Donc $x * y \in H$.

Calcul. On applique la définition de la loi :

$$\begin{aligned} 6 * (-4) &= 6 - 4 + 9 \\ &= 11 \\ &= 5 \times 2 + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. La partie H est stable pour $*$, et $6 * (-4) = 11$. Ce résultat appartient bien à H, comme 6 et -4.

Exercice 2

Deux lois sur $\mathbb{R}$: commuter, regrouper, distribuer

1.

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x \top y = xy - y$. Montre que la loi $\top$ n'est ni commutative, ni associative.

INDICE

Pour réfuter, un exemple chiffré suffit pour chaque propriété. Pour l'associativité, essaie des valeurs comme 0 et 1, et calcule chaque parenthèse à part.

CORRIGÉ

Commutativité. On a $2 \top 3 = 6 - 3 = 3$, alors que $3 \top 2 = 6 - 2 = 4$. Donc $2 \top 3 \neq 3 \top 2$.

Associativité. D'une part, $0 \top 0 = 0$, donc

$$\begin{aligned}(0 \top 0) \top 1 &= 0 \top 1 \\ &= 0 - 1 = -1.\end{aligned}$$

D'autre part, $0 \top 1 = -1$, donc

$$\begin{aligned}0 \top (0 \top 1) &= 0 \top (-1) \\ &= 0 - (-1) = 1.\end{aligned}$$

Comme $-1 \neq 1$, on a $(0 \top 0) \top 1 \neq 0 \top (0 \top 1)$.

Conclusion. Un contre-exemple suffit pour chaque propriété : la loi $\top$ n'est ni commutative, ni associative.

2.

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x * y = x + y + 2xy$. Montre que la loi $*$ est commutative et associative.

INDICE

La commutativité vient de celles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Pour l'associativité, développe $(x * y) * z = (x * y) + z + 2(x * y)z$, puis l'autre membre séparément.

CORRIGÉ

Soient x, y et z trois réels.

Commutativité. L'addition et la multiplication des réels sont commutatives, donc

$$\begin{aligned} y * x &= y + x + 2yx \\ &= x + y + 2xy = x * y. \end{aligned}$$

Associativité. On développe chaque membre :

$$\begin{aligned} &(x * y) * z \\ &= (x + y + 2xy) + z \\ &\quad + 2(x + y + 2xy)z \\ &= x + y + z + 2xy \\ &\quad + 2xz + 2yz + 4xyz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x * (y * z) \\ &= x + (y + z + 2yz) \\ &\quad + 2x(y + z + 2yz) \\ &= x + y + z + 2xy \\ &\quad + 2xz + 2yz + 4xyz. \end{aligned}$$

Pour tous réels x, y et z, les deux membres valent donc $x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz$.

Conclusion. La loi $*$ est commutative et associative sur $\mathbb{R}$.

3.

Montre que la multiplication $\times$ n'est pas distributive par rapport à la loi $*$ de la question 2.

INDICE

La distributivité demanderait $x \times (y * z) = (x \times y) * (x \times z)$ pour tous réels x, y et z. Cherche un triplet simple, sans zéro, qui la met en défaut.

CORRIGÉ

La distributivité exigerait, pour tous réels x, y et z :

$$x(y * z) = (xy) * (xz).$$

Prenons $x = 2$ et $y = z = 1$.

- D'une part, $1 * 1 = 1 + 1 + 2 = 4$, donc $2 \times (1 * 1) = 8$.
- D'autre part, $(2 \times 1) * (2 \times 1) = 2 * 2 = 2 + 2 + 8 = 12$.

Comme $8 \neq 12$, l'égalité échoue pour ce triplet.

Conclusion. La multiplication n'est pas distributive par rapport à la loi $*$.

Exercice 3

Neutre, symétriques et itérés d'une loi sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x * y = 2xy - x - y + 1$. Cette loi est commutative, et on admet qu'elle est associative.

1.

Montre que la loi $*$ admet un élément neutre e, que tu préciseras.

INDICE

Écris l'équation $x * e = x$ et regroupe les termes qui contiennent e. Le point délicat : le neutre doit convenir pour **tout** réel x, sans dépendre de x.

CORRIGÉ

Analyse. Si e est neutre, alors $x * e = x$ pour tout réel x, c'est-à-dire

$$2xe - x - e + 1 = x.$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient $-e + 1 = 0$. Donc nécessairement $e = 1$.

Synthèse. Pour tout réel x :

$$x * 1 = 2x - x - 1 + 1 = x.$$

La loi étant commutative, on a aussi $1 * x = x$.

Conclusion. La loi $*$ admet un élément neutre : $e = 1$.

2.

Montre que tout réel $x \neq \dfrac{1}{2}$ admet un symétrique x', que tu exprimeras en fonction de x. Montre que $\dfrac{1}{2}$ n'a pas de symétrique.

INDICE

Résous $x * x' = 1$, d'inconnue x', en regroupant les termes en x'. Le coefficient de x' s'annule pour une valeur de x : traite-la à part.

CORRIGÉ

Soit x un réel. L'équation $x * x' = 1$, d'inconnue x', s'écrit $2xx' - x - x' + 1 = 1$, c'est-à-dire

$$x'(2x - 1) = x.$$

Cas $x \neq \dfrac{1}{2}$. Alors $2x - 1 \neq 0$, et l'unique solution est le réel

$$x' = \frac{x}{2x - 1}.$$

La loi étant commutative, on a aussi $x' * x = 1$: ce réel est le symétrique de x.

Cas $x = \dfrac{1}{2}$. L'équation devient $0 \times x' = \dfrac{1}{2}$. Elle n'a aucune solution.

Conclusion. Tout réel x différent de $\dfrac{1}{2}$ a pour symétrique $x' = \dfrac{x}{2x - 1}$, et $\dfrac{1}{2}$ n'a pas de symétrique.

3.

Calcule le symétrique $2'$ de 2, puis les itérés 2^2, 2^3 et 2^{-2} pour la loi $*$.

INDICE

Les itérés se calculent par la définition : $2^2 = 2 * 2$, puis $2^3 = 2^2 * 2$. Ici, 2^2 n'est pas le carré usuel. Pour 2^{-2}, compose $2'$ avec lui-même.

CORRIGÉ

Symétrique de 2. D'après la question 2,

$$2' = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3}.$$

Contrôle : $2 * \frac{2}{3} = \frac{8}{3} - 2 - \frac{2}{3} + 1 = 1$.

Itérés positifs. Ils se calculent de proche en proche :

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2 * 2 \\ &= 8 - 2 - 2 + 1 = 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2^2 * 2 = 5 * 2 \\ &= 20 - 5 - 2 + 1 = 14. \end{aligned}$$

Itéré 2^{-2}. C'est le composé de $2'$ avec lui-même :

$$\begin{aligned} 2^{-2} &= 2' * 2' \\ &= \frac{2}{3} * \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{9} - \frac{4}{3} + 1 \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour la loi $*$: $2' = \frac{2}{3}$, $2^2 = 5$, $2^3 = 14$ et $2^{-2} = \frac{5}{9}$.

Exercice 4

Un groupe sur les couples de réels

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $*$ par $(a,b)*(c,d)=(a+c,\ b+d+2ac)$.

1.

Calcule $(1,2)*(3,-1)$ et $(3,-1)*(1,2)$. Montre que $*$ est une loi de composition interne commutative sur $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Pour la loi interne, regarde si les deux coordonnées du résultat sont des réels. Pour la commutativité, compare $(a,b)*(c,d)$ et $(c,d)*(a,b)$ coordonnée par coordonnée.

CORRIGÉ

Calculs. On applique la définition dans chaque ordre :

$$\begin{aligned}&(1,2)*(3,-1)\\&=(1+3,\ 2-1+2\times 1\times 3)\\&=(4,7),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(3,-1)*(1,2)\\&=(3+1,-1+2+2\times 3\times 1)\\&=(4,7).\end{aligned}$$

Loi interne. Pour tous couples (a,b) et (c,d) de réels, $a+c$ et $b+d+2ac$ sont des réels. Donc $(a,b)*(c,d)\in\mathbb{R}^2$.

Commutativité. L'addition et la multiplication des réels sont commutatives, donc

$$\begin{aligned}&(c,d)*(a,b)\\&=(c+a,\ d+b+2ca)\\&=(a,b)*(c,d).\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux composés valent $(4,7)$, et $*$ est une loi de composition interne commutative sur $\mathbb{R}^2$.

2.

Montre que la loi $*$ est associative.

INDICE

Prends trois couples (a,b), (c,d) et (p,q). Calcule les deux membres séparément, puis compare surtout les deuxièmes coordonnées.

CORRIGÉ

Soient (a,b), (c,d) et (p,q) dans $\mathbb{R}^2$.

Premier membre. On a $(a,b)*(c,d)=(a+c,\ b+d+2ac)$. Le composé de ce couple avec (p,q) a pour première coordonnée $a+c+p$. Sa deuxième coordonnée vaut :

$$\begin{aligned} &b+d+2ac+q\\ &\quad+2(a+c)p\\ &=b+d+q+2ac\\ &\quad+2ap+2cp. \end{aligned}$$

Second membre. On a $(c,d)*(p,q)=(c+p,\ d+q+2cp)$. Le composé de (a,b) avec ce couple a pour première coordonnée $a+c+p$. Sa deuxième coordonnée vaut :

$$\begin{aligned} &b+d+q+2cp\\ &\quad+2a(c+p)\\ &=b+d+q+2ac\\ &\quad+2ap+2cp. \end{aligned}$$

Les deux membres ont la même première coordonnée $a+c+p$, et la même deuxième coordonnée $b+d+q+2ac+2ap+2cp$.

Conclusion. Les deux membres sont égaux, pour tous couples : la loi $*$ est associative sur $\mathbb{R}^2$.

3.

Montre que $(0,0)$ est l'élément neutre de $*$, puis que tout couple (a,b) a pour symétrique $(-a,\ -b+2a^2)$.

INDICE

La loi est commutative : un seul côté suffit pour chaque vérification. Pour le symétrique, calcule avec soin la deuxième coordonnée du composé.

CORRIGÉ

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Neutre. On a

$$\begin{aligned}&(a,b)*(0,0)\\&=(a+0,\ b+0+2a\times 0)\\&=(a,b).\end{aligned}$$

La loi étant commutative, $(0,0)*(a,b)=(a,b)$ aussi.

Symétrique. Le couple $(-a,\ -b+2a^2)$ appartient à $\mathbb{R}^2$. Composé avec (a,b), il donne la première coordonnée $a-a=0$, et la deuxième :

$$\begin{aligned}&b-b+2a^2\\&\quad+2a\times(-a)=0.\end{aligned}$$

Donc $(a,b)*(-a,\ -b+2a^2)=(0,0)$. Par commutativité, le composé dans l'autre ordre vaut aussi $(0,0)$.

Conclusion. Le couple $(0,0)$ est l'élément neutre de $*$, et tout couple (a,b) a pour symétrique $(a,b)'=(-a,\ -b+2a^2)$.

4.

Conclus sur la structure de $(\mathbb{R}^2, *)$. Donne le symétrique de $(1, 2)$ et vérifie-le.

INDICE

Rassemble les axiomes établis aux questions 1 à 3. Nomme l'ensemble, la loi et la structure obtenue.

CORRIGÉ

Structure. On rassemble les résultats établis :

- $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$, commutative (question 1) ;
- elle est associative (question 2) ;
- elle admet le neutre $(0, 0)$, et tout couple a un symétrique (question 3).

Donc $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe, et sa loi est commutative.

Symétrique de $(1, 2)$. D'après la question 3, c'est $(-1,\ -2 + 2 \times 1^2) = (-1, 0)$. Contrôle :

$$\begin{aligned}&(1, 2) * (-1, 0)\\ &= \big(0,\ 2 + 0 + 2 \times 1 \times (-1)\big)\\ &= (0, 0).\end{aligned}$$

Conclusion. $(\mathbb{R}^2, *)$ est un **groupe commutatif**, et le symétrique de $(1, 2)$ est $(-1, 0)$.

Exercice 5

Les produits de puissances de 2 et de 5

On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, l'ensemble des réels strictement positifs muni de la multiplication, est un groupe commutatif de neutre 1. On pose $H = \{2^a 5^b \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1.

Montre que $0{,}4$ et $12{,}5$ appartiennent à H, puis que $1 \in H$.

INDICE

Écris chaque nombre comme une fraction, puis décompose numérateur et dénominateur en puissances de 2 et de 5. Les exposants peuvent être négatifs.

CORRIGÉ

Le réel $0{,}4$. On a $0{,}4 = \dfrac{2}{5} = 2^1 5^{-1}$, avec $(1,-1) \in \mathbb{Z}^2$.

Le réel $12{,}5$. On a $12{,}5 = \dfrac{25}{2} = 2^{-1} 5^2$, avec $(-1,2) \in \mathbb{Z}^2$.

Le réel 1. On a $1 = 2^0 5^0$, avec $(0,0) \in \mathbb{Z}^2$.

Conclusion. Les réels $0{,}4$, $12{,}5$ et 1 appartiennent à H.

2.

Montre que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

INDICE

Applique la caractérisation : H non vide, puis $x \times y^{-1} \in H$ pour tous x et y de H. Ici, le symétrique de y est son inverse : écris-le avec des exposants.

CORRIGÉ

Partie non vide. Tout réel $2^a 5^b$ est strictement positif : $H \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 1, $1 \in H$, donc $H \neq \emptyset$.

Test du sous-groupe. Soient $x = 2^a 5^b$ et $y = 2^c 5^d$ dans H, avec a, b, c et d entiers relatifs. Le symétrique de y dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est $y^{-1} = 2^{-c} 5^{-d}$. Alors

$$x \times y^{-1} = 2^{a-c} 5^{b-d},$$

avec $(a-c,\ b-d) \in \mathbb{Z}^2$. Donc $x \times y^{-1} \in H$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-groupe, H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, et $(H, \times)$ est un groupe commutatif.

3.

On pose $L = \{2^a 5^b \ / \ (a,b) \in \mathbb{N}^2\}$. Montre que L contient 1 et est stable pour $\times$, mais que ce n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

INDICE

Pour réfuter, cherche un élément de L dont l'inverse n'est pas dans L. Compare chaque élément de L au réel 1.

CORRIGÉ

L'élément 1. On a $1 = 2^0 5^0$, avec $(0,0) \in \mathbb{N}^2$, donc $1 \in L$.

Stabilité. Soient $x = 2^a 5^b$ et $y = 2^c 5^d$ dans L. Alors $xy = 2^{a+c} 5^{b+d}$, où $a+c$ et $b+d$ sont des entiers naturels. Donc $xy \in L$.

Un inverse manquant. Le réel $2 = 2^1 5^0$ appartient à L, mais son inverse $\dfrac{1}{2}$ n'est pas dans L. En effet, si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $2^a \geq 1$ et $5^b \geq 1$. Donc $2^a 5^b \geq 1 > \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. La partie L contient 1 et est stable pour $\times$. Mais un sous-groupe contient l'inverse de chacun de ses éléments : L n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Exercice 6

Trois applications de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

1.

On pose $f(x) = x^5$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montre que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

INDICE

Vérifie d'abord que $f(x)$ appartient à $\mathbb{R}^*$. Compare ensuite $f(xy)$ et $f(x) \times f(y)$ avec une règle de calcul sur les puissances.

CORRIGÉ

Ensemble d'arrivée. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $x^5 \neq 0$: f va bien de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

Morphisme. Soient x et y dans $\mathbb{R}^*$. D'après les règles de calcul sur les puissances,

$$\begin{aligned} f(xy) &= (xy)^5 = x^5 y^5 \\ &= f(x) \times f(y). \end{aligned}$$

Conclusion. L'application f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

2.

Montre que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur lui-même. Donne les antécédents de -32 et de $\dfrac{1}{32}$.

INDICE

Il reste la bijectivité : pour $u \in \mathbb{R}^*$, combien de réels non nuls x vérifient $x^5 = u$? Pense au sens de variation de $x \mapsto x^5$ sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

Bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^5$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites sont $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$. Soit $u \in \mathbb{R}^*$. L'équation $x^5 = u$ a une seule solution réelle x, et $x \neq 0$ car $0^5 = 0 \neq u$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$.

Antécédents. On a $(-2)^5 = -32$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32}$.

Conclusion. Homomorphisme bijectif, f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur lui-même. Les antécédents de -32 et de $\dfrac{1}{32}$ sont -2 et $\dfrac{1}{2}$.

3.

On pose $g(x) = x^4$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montre que g est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même, mais pas un isomorphisme.

INDICE

L'homomorphisme se prouve comme à la question 1. Pour réfuter la bijectivité, un exemple suffit : deux réels de même image, ou un réel sans antécédent.

CORRIGÉ

Homomorphisme. Pour $x \neq 0$, on a $x^4 \neq 0$. Pour tous x et y de $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} g(xy) &= (xy)^4 = x^4 y^4 \\ &= g(x) \times g(y). \end{aligned}$$

Pas un isomorphisme. On a $g(-1) = g(1) = 1$, avec $-1 \neq 1$: g n'est pas injective. De plus, -1 n'a aucun antécédent, car $x^4 > 0$ pour tout réel x non nul.

Conclusion. L'application g est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même. Elle n'est pas bijective : ce n'est pas un isomorphisme.

4.

On pose $h(x) = 5x$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montre que h n'est pas un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même.

INDICE

Teste l'égalité des deux membres avec des valeurs très simples. Tu peux aussi regarder l'image du neutre.

CORRIGÉ

Contre-exemple. Avec $x = y = 1$, on a $h(1 \times 1) = h(1) = 5$, alors que $h(1) \times h(1) = 25$. Comme $5 \neq 25$, l'égalité $h(xy) = h(x) \times h(y)$ échoue.

Autre argument. Un homomorphisme entre deux groupes envoie le neutre 1 sur le neutre 1. Or $h(1) = 5$.

Conclusion. L'application h n'est pas un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 7

Les puissances entières de –2

Pour tout entier relatif n, on pose $f(n) = (-2)^n$. On note $H = \{(-2)^n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$ l'image de f.

1.

Montre que f est un homomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

INDICE

Vérifie que $(-2)^n$ n'est jamais nul. Utilise ensuite une règle des puissances entières d'un réel non nul.

CORRIGÉ

Ensemble d'arrivée. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(-2)^n$ est un réel non nul, car $-2 \neq 0$.

Morphisme. Soient n et m deux entiers relatifs. D'après les règles de calcul sur les puissances entières d'un réel non nul,

$$\begin{aligned} f(n+m) &= (-2)^{n+m} \\ &= (-2)^n \times (-2)^m \\ &= f(n) \times f(m). \end{aligned}$$

Conclusion. L'application f est un homomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

2.

Déduis-en que $(H, \times)$ est un groupe commutatif. Précise son neutre.

INDICE

Cite le transfert de structure de groupe : nomme le groupe de départ, l'homomorphisme et l'ensemble image. Le neutre de H est l'image du neutre de $(\mathbb{Z}, +)$.

CORRIGÉ

Hypothèses du transfert. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif, de neutre 0. L'application f est un homomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ (question 1), et son image est $f(\mathbb{Z}) = H$.

Transfert. D'après le transfert de structure de groupe, H est stable pour $\times$, et $(H, \times)$ est un groupe commutatif. Son neutre est l'image du neutre 0 :

$$f(0) = (-2)^0 = 1.$$

Conclusion. $(H, \times)$ est un groupe commutatif, de neutre 1.

3.

Donne l'inverse de -8 dans $(H, \times)$. Calcule ensuite $f(3) \times f(-5)$.

INDICE

Écris -8 sous la forme $f(n)$. Le symétrique de $f(n)$ dans H est l'image du symétrique de n dans $(\mathbb{Z}, +)$.

CORRIGÉ

Inverse de -8. On a $-8 = (-2)^3 = f(3)$. Son inverse dans H est l'image du symétrique -3 de 3 dans $(\mathbb{Z}, +)$:

$$f(-3) = (-2)^{-3} = -\frac{1}{8}.$$

Contrôle : $(-8) \times \left(-\frac{1}{8}\right) = 1$.

Produit. Comme f est un homomorphisme,

$$\begin{aligned} &f(3) \times f(-5) \\ &= f\big(3 + (-5)\big) = f(-2) \\ &= (-2)^{-2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Contrôle direct : $(-8) \times \left(-\frac{1}{32}\right) = \frac{1}{4}$.

Conclusion. L'inverse de -8 dans $(H, \times)$ est $-\frac{1}{8}$, et $f(3) \times f(-5) = \frac{1}{4}$.

4.

Montre que f n'est pas un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(\mathbb{R}^*, \times)$. Que dit alors le transfert sur $\mathbb{R}^*$?

INDICE

Cherche un réel non nul simple qui n'est pas une puissance de -2. Raisonne sur la valeur absolue de $(-2)^n$.

CORRIGÉ

Un réel sans antécédent. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|(-2)^n| = 2^n$. Si l'on avait $3 = (-2)^n$, on aurait $2^n = 3$. C'est impossible :

- pour $n \leq 1$, $2^n \leq 2$;
- pour $n \geq 2$, $2^n \geq 4$.

Donc 3 n'a pas d'antécédent par f : f n'est pas surjective sur $\mathbb{R}^*$.

Conclusion. L'application f n'est pas un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(\mathbb{R}^*, \times)$. Le transfert donne une structure de groupe sur l'image H seulement, et $H \neq \mathbb{R}^*$.

Exercice 8

L'anneau des nombres dyadiques

On note D l'ensemble des rationnels qui s'écrivent $\frac{k}{2^n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$ et $5 = \frac{5}{2^0}$ appartiennent à D.

1.

Montre que D est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$.

INDICE

Réduis $\frac{k}{2^n} - \frac{m}{2^p}$ au dénominateur 2^{n+p}. Vérifie que le numérateur est entier et que l'exposant est un entier naturel.

CORRIGÉ

Partie non vide. Tout élément de D est rationnel : $D \subset \mathbb{Q}$. De plus, $0 = \frac{0}{2^0}$, donc $0 \in D$ et $D \neq \emptyset$.

Test du sous-groupe. Soient $x = \frac{k}{2^n}$ et $y = \frac{m}{2^p}$ dans D, avec k et m entiers relatifs, n et p entiers naturels. Au dénominateur 2^{n+p} :

$$x - y = \frac{k \times 2^p - m \times 2^n}{2^{n+p}},$$

avec $k \times 2^p - m \times 2^n \in \mathbb{Z}$ et $n + p \in \mathbb{N}$. Donc $x - y \in D$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-groupe, D est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$.

2.

Montre que $(D, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

INDICE

Prouve d'abord la stabilité de D pour $\times$. Cite ensuite l'anneau induit sur une partie de l'anneau $(\mathbb{Q}, +, \times)$, sans oublier l'unité.

CORRIGÉ

Stabilité pour $\times$. Avec les notations de la question 1 :

$$xy = \frac{km}{2^{n+p}},$$

avec $km \in \mathbb{Z}$ et $n + p \in \mathbb{N}$. Donc $xy \in D$.

Anneau induit. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. La partie D en est un sous-groupe additif (question 1), stable pour $\times$. D'après l'anneau induit sur une partie, $(D, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Unité. On a $1 = \frac{1}{2^0} \in D$.

Conclusion. $(D, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire, d'unité 1.

3.

Montre que 2 est inversible dans l'anneau D, mais que 3 ne l'est pas. L'anneau D est-il un corps ?

INDICE

Pour 2, propose un inverse et vérifie qu'il est dans D. Pour 3, suppose que $3 \times \dfrac{k}{2^n} = 1$ et cherche une contradiction de divisibilité.

CORRIGÉ

Le nombre 2. On a $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^1} \in D$ et $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$. La multiplication étant commutative, 2 est inversible dans D, d'inverse $\dfrac{1}{2}$.

Le nombre 3. Supposons par l'absurde qu'il existe $\dfrac{k}{2^n} \in D$ tel que $3 \times \dfrac{k}{2^n} = 1$. Alors $3k = 2^n$, donc 3 divise 2^n.

Or 3 est premier et ne divise pas 2. D'après le théorème de Gauss (chapitre d'arithmétique), appliqué de proche en proche, 3 ne divise aucune puissance 2^n avec $n \geq 1$. Il ne divise pas non plus $2^0 = 1$. C'est une contradiction : 3 n'est pas inversible dans D.

Conclusion. L'élément 3 est non nul et sans inverse dans D : l'anneau $(D, +, \times)$ n'est pas un corps.

Exercice 9

$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est un corps, $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ n'en est pas un

1.

Justifie que $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps commutatif. Calcule les inverses de $\overline{3}$ et de $\overline{7}$.

INDICE

Cite l'énoncé sur les corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et vérifie son hypothèse. Pour un inverse, cherche b tel que $3b \equiv 1\ [11]$ en essayant les multiples de 3.

CORRIGÉ

Structure. Le nombre 11 est premier : ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 11. D'après l'énoncé sur les corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Inverse de $\overline{3}$. On a $3 \times 4 = 12 = 11 + 1$, donc $\overline{3} \times \overline{4} = \overline{1}$.

Inverse de $\overline{7}$. On a $7 \times 8 = 56 = 5 \times 11 + 1$, donc $\overline{7}^{-1} = \overline{8}$.

La multiplication étant commutative, un seul produit suffit dans chaque cas.

Conclusion. $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est un corps commutatif, dans lequel $\overline{3}^{-1} = \overline{4}$ et $\overline{7}^{-1} = \overline{8}$.

2.

Résous dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{3} \times x + \overline{5} = \overline{2}$.

INDICE

Ajoute l'opposé de $\overline{5}$ aux deux membres, puis multiplie par l'inverse de $\overline{3}$. Le point délicat : ramener chaque représentant entre 0 et 10.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Isoler le terme en x. En ajoutant $-\overline{5}$ aux deux membres, l'équation équivaut à

$$\overline{3} \times x = \overline{2} - \overline{5} = \overline{-3} = \overline{8}.$$

Multiplier par l'inverse. La classe $\overline{3}$ est inversible, d'inverse $\overline{4}$ (question 1). L'égalité équivaut donc à

$$x = \overline{4} \times \overline{8} = \overline{32} = \overline{10},$$

car $32 = 2 \times 11 + 10$.

Conclusion. L'unique solution est $x = \overline{10}$. Contrôle : $3 \times 10 + 5 = 35 = 3 \times 11 + 2$.

3.

Montre que $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps. Donne un élément non nul sans inverse.

INDICE

Écris 15 comme produit de deux entiers compris entre 2 et 14. Rappelle-toi qu'un corps n'a pas de diviseur de zéro.

CORRIGÉ

Un diviseur de zéro. On a $15 = 3 \times 5$, donc $\overline{3} \times \overline{5} = \overline{15} = \overline{0}$. Or $\overline{3} \neq \overline{0}$ et $\overline{5} \neq \overline{0}$, car 15 ne divise ni 3 ni 5. L'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ a donc un diviseur de zéro.

Un élément sans inverse. Supposons que $\overline{3}$ ait un inverse $\overline{3}^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} \overline{5} &= \overline{3}^{-1} \times \overline{3} \times \overline{5} \\ &= \overline{3}^{-1} \times \overline{0} = \overline{0}, \end{aligned}$$

ce qui est faux. Donc $\overline{3}$ n'a pas d'inverse.

Conclusion. $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps : la classe non nulle $\overline{3}$ n'y a pas d'inverse.

Exercice 10

Produits de matrices d'ordre 2 et 3

1.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calcule $A + 2B$ et AB.

INDICE

Additionne et multiplie par 2 coefficient par coefficient. Pour la case (i, j) de AB, prends la ligne i de A et la colonne j de B.

CORRIGÉ

Calcul de $A + 2B$. On multiplie B par 2, puis on additionne coefficient par coefficient :

$$2B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de AB. Ligne par colonne, les coefficients de AB sont :

- case $(1,1)$: $1 \times 0 + 3 \times 1 = 3$;
- case $(1,2)$: $1 \times 2 + 3 \times (-1) = -1$;
- case $(2,1)$: $(-2) \times 0 + 1 \times 1 = 1$;
- case $(2,2)$: $(-2) \times 2 + 1 \times (-1) = -5$.

Conclusion. On obtient

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.

Calcule BA. Le produit des matrices est-il commutatif dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

INDICE

Cette fois, prends les lignes de B et les colonnes de A. Pour conclure, une seule case différente suffit.

CORRIGÉ

Calcul de BA. Ligne par colonne, les coefficients de BA sont :

- case $(1,1)$: $0\times 1+2\times(-2)=-4$;
- case $(1,2)$: $0\times 3+2\times 1=2$;
- case $(2,1)$: $1\times 1+(-1)\times(-2)=3$;
- case $(2,2)$: $1\times 3+(-1)\times 1=2$.

Donc

$$BA=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Comparaison. La case $(1,1)$ vaut 3 dans AB et -4 dans BA. Donc $AB\neq BA$.

Conclusion. Le produit des matrices n'est pas commutatif dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3.

On pose $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calcule CD.

INDICE

Chaque case de CD est une somme de trois produits. Avance ligne par ligne, et écris chaque somme avant de l'effectuer.

CORRIGÉ

Chaque ligne de C multiplie successivement les trois colonnes de D.

- Ligne 1 de C : $0+0-1=-1$, puis $1+0-1=0$, puis $0+0+0=0$.
- Ligne 2 de C : $0+1+0=1$, puis $2+0+0=2$, puis $0+2+0=2$.
- Ligne 3 de C : $0-1+1=0$, puis $0+0+1=1$, puis $0-2+0=-2$.

Conclusion. On obtient

$$CD=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

4.

On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule $N^2 = N \times N$ et $N^3 = N^2 \times N$. Quelle règle des réels ce calcul met-il en défaut ?

INDICE

Beaucoup de cases sont nulles : repère les produits où un 0 apparaît. Pour la règle, pense au produit de deux réels non nuls.

CORRIGÉ

Calcul de N^2. Ligne par colonne, la seule case non nulle de N^2 est la case $(1,3)$: $0 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 0 = 3$. Donc

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul de N^3. La seule ligne non nulle de N^2 est la ligne 1, de la forme $(0,0,3)$. Elle multiplie des colonnes de N dont le troisième coefficient est nul. Donc $N^3 = O$.

Règle mise en défaut. On a $N^2 \neq O$ et $N \neq O$, alors que $N^2 \times N = O$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$, un produit de deux facteurs non nuls n'est jamais nul. Cette règle ne passe pas aux matrices.