BURHAN

Résumé (Nombres complexes : calcul et équations)

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes/resume

Chapitre	Semestre
Nombres complexes : calcul et équations	Semestre 2

Forme algébrique, opérations, conjugué

À retenir : L'idée du chapitre

Dans $\mathbb{C}$, tu calcules comme dans $\mathbb{R}$, avec une seule règle en plus :

$$i^2 = -1.$$

Pour montrer que deux nombres complexes sont égaux, montre que leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi.

Définition : L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés **nombres complexes**, qui contient $\mathbb{R}$ et un nombre i tel que $i^2 = -1$. Il est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul. Tout nombre complexe z s'écrit $z = a + ib$ avec a et b réels : une telle écriture est une **forme algébrique** de z.

Propriété : Unicité de la forme algébrique

Pour tous réels a, b, a', b' : si $a + ib = a' + ib'$, alors $a = a'$ et $b = b'$. La forme algébrique $z = a + ib$ d'un nombre complexe est donc unique : le réel a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et le réel b sa **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}(z)$. En particulier, $a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. Le nombre z est réel si $\mathrm{Im}(z) = 0$, et **imaginaire pur** si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Exemple

Soit a et b deux réels tels que $(a + 3) + (b - 1)i = 0$. Par unicité de la forme algébrique, $a + 3 = 0$ et $b - 1 = 0$. Donc $a = -3$ et $b = 1$.

Propriété : Produit, inverse et quotient sous forme algébrique

Pour tous réels a, b, a', b' : $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$. Tout nombre complexe **non nul** $z = a + ib$, avec a et b réels, a un inverse : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$. Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z', on note $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$. Enfin, un produit de nombres complexes est nul si et seule-

ment si l'un de ses facteurs est nul.

Méthode : Écrire un quotient sous forme algébrique

1. Vérifie d'abord que le dénominateur w est non nul.
2. Multiplie le haut et le bas par $\overline{w}$: en bas apparaît $w\,\overline{w} = |w|^2$, un réel strictement positif.
3. Développe le haut, puis sépare partie réelle et partie imaginaire.

Rédaction : « Comme $w \neq 0$, on a $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\,\overline{w}}{|w|^2}$, donc… »

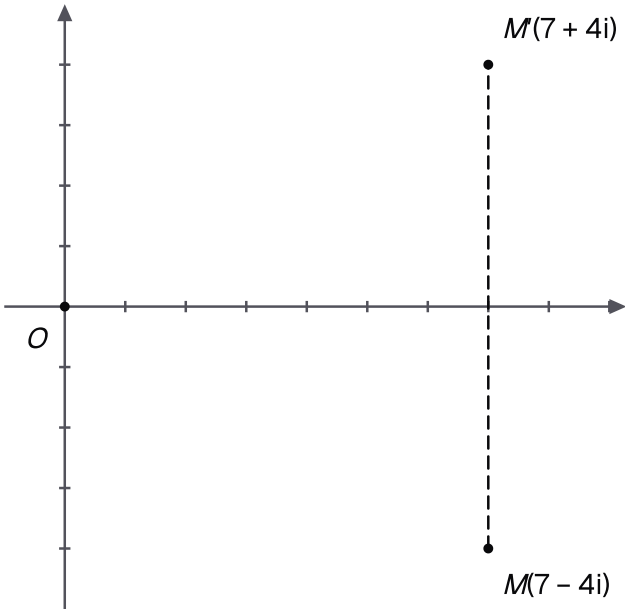
Exemple

Le nombre $1 - 2i$ est non nul. On multiplie le haut et le bas par $1 + 2i$:

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{1-2i} &= \frac{(3+i)(1+2i)}{1^2+2^2} \\ &= \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i.\end{aligned}$$

Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$. Dans le plan complexe, les images de z et de $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Le conjugué renvoie l'image de l'autre côté de l'axe réel, à la même abscisse.

Propriété : Propriétés du conjugué

Pour tous nombres complexes z et z' : $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. Enfin, $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

Exemple

Par les règles du conjugué, $\overline{\left(\dfrac{1+i}{3-2i}\right)} = \dfrac{1-i}{3+2i}$: tu conjugues le haut et le bas, sans rien développer.

Propriété : Réels, imaginaires purs et conjugué

Pour tout nombre complexe z : z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$; z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Méthode : Montrer qu'un nombre est réel ou imaginaire pur

Pour montrer qu'un nombre A est réel, calcule $\overline{A}$ avec les règles du conjugué. Prouve ensuite que $\overline{A} = A$.

Pour un imaginaire pur, prouve que $\overline{A} = -A$.

Avant un quotient, vérifie que chaque dénominateur est non nul.

Rédaction : « $\overline{A} = \cdots = A$, donc A est réel. »

Plan complexe et module

Définition : Image d'un nombre complexe, affixe d'un point et d'un vecteur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Au nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on associe le point $M(a\,;b)$, appelé **image** de z ; on dit que z est l'**affixe** du point M, notée z_M. De même, z est l'affixe du vecteur $\vec{w}(a\,;b)$, notée $z_{\vec{w}}$. Le plan muni de cette correspondance est le **plan complexe**.

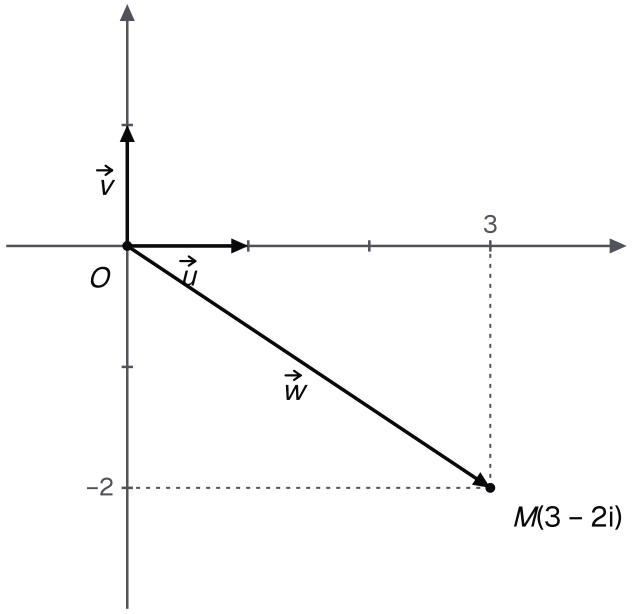
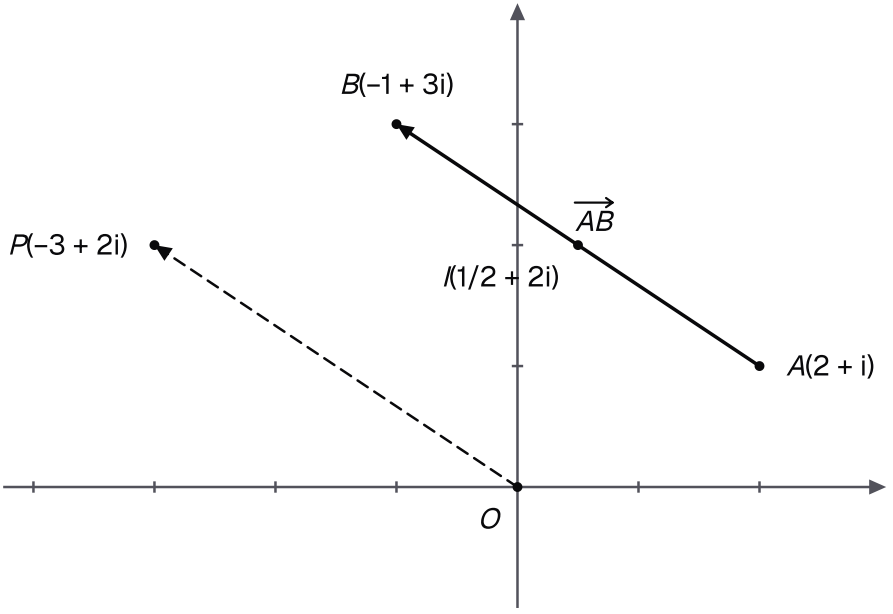


Image d'un nombre complexe : le point d'affixe 3 – 2i et le vecteur de même affixe issu de l'origine.

Propriété : Affixe d'un vecteur, d'un milieu ; opérations sur les vecteurs

Pour tous points A et B, tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ et tout réel k : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$, $z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$ et $z_{k\vec{w}} = k\, z_{\vec{w}}$. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.



Vecteur et milieu par les affixes : z_B – z_A pour le vecteur, la demi-somme pour le milieu.

Exemple

Pour $z_A = 2 - i$ et $z_B = -1 + 3i$, on a $z_{\overrightarrow{AB}} = -3 + 4i$. Donc :

$$AB = |-3 + 4i| = 5.$$

Définition : Module d'un nombre complexe

Le **module** du nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si M est l'image de z, alors $|z| = OM$. Lorsque z est réel, son module est sa valeur absolue.

Propriété : Propriétés du module

Pour tous nombres complexes z et z' : $|z|^2 = z\,\overline{z}$; $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$; $|\overline{z}| = |-z| = |z|$; $|zz'| = |z|\,|z'|$; pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$. Si $z' \neq 0$: $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{\overline{z'}}{|z'|^2}$, $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

À retenir : Le bon réflexe

Pour calculer avec un module, pense à passer par son carré :

$$|z|^2 = z\,\overline{z}.$$

Tu évites ainsi la racine carrée, et les règles du conjugué font le reste.

Théorème : Inégalité triangulaire

Pour tous nombres complexes z et z' : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ et $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$.

Attention : Module d'une somme

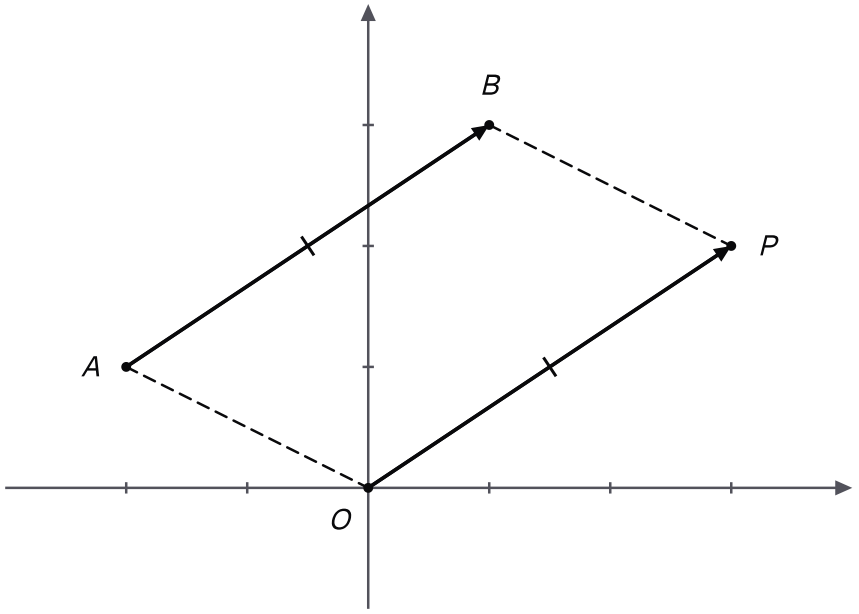
Le module ne se distribue pas sur une somme. Par exemple :

$$|2 + 2i| = 2\sqrt{2},$$
$$|2| + |2i| = 4.$$

Entre ces deux nombres, tu n'as que l'inégalité triangulaire.

Propriété : Distance de deux points

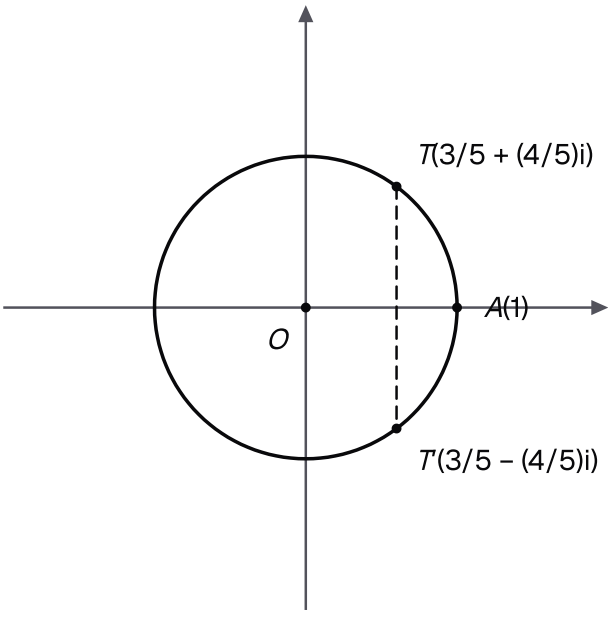
Pour tous points A et B du plan complexe : $AB = |z_B - z_A|$.



Distance AB et module de z_B – z_A : un même segment, déplacé jusqu'à l'origine.

Propriété : Nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Son image dans le plan complexe est le cercle de centre O et de rayon 1.
On a $1 \in \mathbb{U}$; pour tous z et z' de $\mathbb{U}$, $zz' \in \mathbb{U}$; pour tout z de $\mathbb{U}$, $z \neq 0$ et $\frac{1}{z} = \overline{z}$, qui appartient à $\mathbb{U}$.

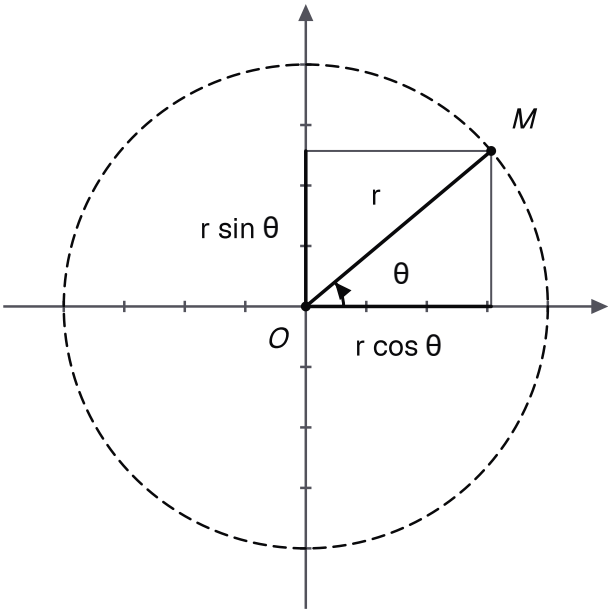


Le cercle de centre O et de rayon 1 porte toutes les images des nombres de module 1.

Argument et forme trigonométrique

Définition : Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe **non nul**, d'image M. On appelle **argument** de z toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. Si θ est un argument de z, les arguments de z sont les réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; on écrit $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$. Le nombre 0 n'a **pas** d'argument.



Argument et module se lisent sur le même dessin : l'angle θ depuis l'axe réel, la longueur r de O à M.

Propriété : Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et θ un argument de z : c'est une **forme trigonométrique** de z. Réciproquement, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec r réel strictement positif et θ réel, alors $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

Méthode : Passer à la forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ non nul, avec a et b réels.

1. Calcule $r = |z|$.
2. Cherche un réel θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.
3. Conclus : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r > 0$.

Rédaction : nomme le module, puis l'angle, puis la forme obtenue.

Exemple

Soit $z = -3 + 3i$. On a $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. On cherche θ tel que :

$$\cos\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'angle $\frac{3\pi}{4}$ convient. Donc $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\arg z \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Attention : Deux conditions à vérifier

- Le nombre 0 n'a pas d'argument : écris $z \neq 0$ avant toute règle sur $\arg z$.
- Une écriture $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ n'est une forme trigonométrique que si $r > 0$.

Si le facteur est négatif, utilise, pour tout réel θ :

$$-(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi).$$

Propriété : Argument d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance

Pour tous nombres complexes **non nuls** z et z' : $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi]$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$; pour tout entier relatif n, $\arg(z^n) \equiv n\arg z\ [2\pi]$.

Propriété : Conjugué, opposé ; réels et imaginaires purs par l'argument

Pour tout nombre complexe **non nul** z : $\arg\overline{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z\ [2\pi]$. De plus, z est réel si et seulement si $\arg z \equiv 0\ [\pi]$, et z est imaginaire pur si et seulement si $\arg z \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Attention : Argument d'une somme

Produits, quotients, puissances, conjugué, opposé : c'est là seulement que s'appliquent les règles des arguments. Une somme n'en fait pas partie. Reviens alors à la forme algébrique, ou factorise par l'angle moitié.

Notation exponentielle, Moivre, Euler

Produit

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Inverse et conjugué

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

Moivre

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Euler, cosinus

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Euler, sinus

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Angle moitié

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Définition : Notation exponentielle

Pour tout réel θ, on **note** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Tout nombre complexe non nul z, de module r et d'argument θ, s'écrit $z = re^{i\theta}$: c'est une **forme exponentielle** de z.

Exemple

On a $-3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$, car $3 > 0$ et $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Propriété : Calculs en notation exponentielle

Pour tous réels θ et θ' : $|e^{i\theta}| = 1$; $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$. Ainsi $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Théorème : Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier relatif n : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, c'est-à-dire $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Méthode : Calculer une puissance

Pour calculer z^n, avec $z \neq 0$:

1. Écris d'abord $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$.
2. La formule de Moivre donne alors $z^n = r^n e^{in\theta}$.
3. Reviens à la forme algébrique seulement à la fin, si l'énoncé la demande.

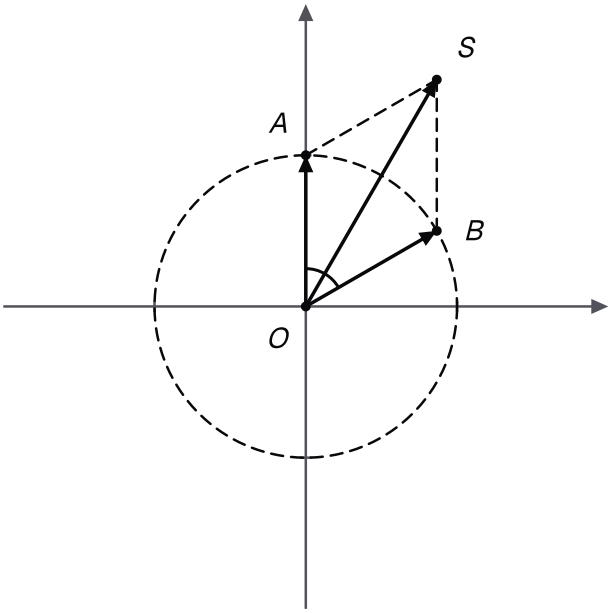
Rédaction : « Comme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, la formule de Moivre donne $z^n = r^n e^{in\theta}$, donc… »

Propriété : Formules d'Euler

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Propriété : Factorisation par l'angle moitié

Pour tous réels a et b : $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$ et $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$. En particulier, pour tout réel θ, $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.



Les images de e^(ia) et e^(ib) et celle de leur somme, sur la bissectrice de l'angle qu'elles forment.

Méthode : Module et argument d'une expression à paramètre

1. Écris l'expression sous la forme $e^{ia} + e^{ib}$ ou $e^{ia} - e^{ib}$.
2. Mets $e^{i\frac{a+b}{2}}$ en facteur par l'angle moitié.
3. Étudie le signe du facteur réel sur l'intervalle du paramètre.

Conclus selon ce signe :

- facteur strictement positif : c'est directement le module ;
- facteur strictement négatif : prends son opposé comme module, et ajoute π à l'argument ;
- facteur nul : le nombre vaut 0, sans argument.

Rédaction : « Pour θ dans cet intervalle, $\cos\frac{\theta}{2} > 0$, donc… »

Exemple

Soit $\theta \in]\pi, 2\pi[$. On a :

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}},$$

avec $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ car $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Donc :

$$\left|1+e^{i\theta}\right| = -2\cos\frac{\theta}{2},$$
$$\arg\left(1+e^{i\theta}\right) \equiv \frac{\theta}{2}+\pi\ [2\pi].$$

Linéariser et développer

Propriété : Linéarisation et développement : exposants 2 et 3

Pour tout réel θ : $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$, $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, $\cos^3\theta = \dfrac{3\cos\theta+\cos(3\theta)}{4}$ et $\sin^3\theta = \dfrac{3\sin\theta-\sin(3\theta)}{4}$: ce sont des **linéarisations**. Inversement, $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$: ce sont des **développements**.

Méthode : Linéariser

1. Remplace $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par les formules d'Euler.
2. Développe pas à pas : un carré, puis un produit.
3. Rassemble chaque $e^{ik\theta}$ avec son partenaire $e^{-ik\theta}$: leur somme vaut $2\cos(k\theta)$ et leur différence $2i\sin(k\theta)$.

Rédaction : « Par les formules d'Euler, $\cos^2\theta = \dfrac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2}{4} = \ldots$, donc… »

Méthode : Développer

1. Écris $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta) = (\cos\theta+i\sin\theta)^n$ par la formule de Moivre.
2. Développe la puissance pas à pas.
3. Identifie les parties réelles et les parties imaginaires : c'est permis, car $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont réels.

Rédaction : « Par la formule de Moivre, $\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = (\cos\theta+i\sin\theta)^3$; comme $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont réels, on identifie les parties réelles : … »

Remarque

Dans ce chapitre, les exposants restent explicites, au plus égaux à 4, et se développent pas à pas. Par exemple, $(u+v)^4$ se calcule comme le carré de $(u+v)^2$, sans formule générale de développement.

Coefficients réels et racines carrées

Théorème : Équation du second degré à coefficients réels

Soient a, b, c des réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a : si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; si $\Delta = 0$, une seule solution, $-\dfrac{b}{2a}$; si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées $\dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Dans tous les cas, pour tout z de $\mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, où z_1 et z_2 sont les solutions, égales lorsque $\Delta = 0$.

Attention : Le radical

La notation $\sqrt{x}$ n'a de sens que pour un réel $x \geq 0$.

Si $\Delta < 0$, écris Δ comme un carré : par exemple $-49 = (7i)^2$. Tu ne parles alors que d'une racine carrée de Δ.

Définition : Racine carrée d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe. On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = Z$. La notation $\sqrt{x}$ reste réservée aux réels x positifs.

Théorème : Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul Z a exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre. Si $Z = re^{i\theta}$ avec r réel strictement positif et θ réel, ce sont $\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$. Le nombre 0 a une seule racine carrée : 0.

Méthode : Racines carrées sous forme algébrique

Soit $Z = A + iB$ non nul, avec A et B réels. Cherche $\delta = x + iy$, avec x et y réels.

1. L'égalité $\delta^2 = Z$ donne $x^2 - y^2 = A$ et $2xy = B$.
2. Les modules donnent $x^2 + y^2 = |Z|$.
3. Tu en tires x^2 et y^2, puis les signes grâce au signe de B.
4. Vérifie enfin $\delta^2 = Z$: le système ne donne que des conditions nécessaires.

Rédaction : « Soit $\delta = x + iy$; si $\delta^2 = Z$, alors … ; réciproquement $\delta_0^2 = Z$, donc les racines carrées de Z sont δ_0 et $-\delta_0$. »

Exemple

Pour $Z = 21 - 20i$, on a $|Z| = \sqrt{441 + 400} = 29$. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x^2 + y^2 = 29 \\ 2xy = -20 \end{cases}$$

Donc $x^2 = 25$, $y^2 = 4$, et x, y sont de signes contraires. Les racines carrées de Z sont $5 - 2i$ et $-5 + 2i$.

Coefficients complexes et degré 3

Théorème : Équation du second degré à coefficients complexes

Soient a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, et δ une racine carrée de Δ. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation sont $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$; elles sont distinctes si $\Delta \neq 0$, et égales à $-\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$. Pour tout z de $\mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Attention : Pas de signe pour un nombre complexe

Un discriminant complexe n'a pas de signe : « $\Delta < 0$ » n'a de sens que pour un réel. Avec des coefficients complexes, cherche toujours une racine carrée δ de Δ.

Méthode : Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Repère a, b, c et vérifie $a \neq 0$.
2. Calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. Si l'énoncé propose une forme de Δ, développe-la et compare : c'est une vérification.
3. Trouve une racine carrée δ de Δ.
4. Écris $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$, puis simplifie.

Rédaction : « $\Delta = \delta^2$ avec $\delta = \ldots$, donc l'équation a pour solutions… »

Propriété : Somme et produit des solutions

Soient a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$, et z_1, z_2 les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, comptées deux fois lorsqu'elles sont égales. Alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$. Réciproquement, pour tous nombres complexes S, P, u et v : on a $u + v = S$ et $uv = P$ si et seulement si, pour tout z de $\mathbb{C}$, $z^2 - Sz + P = (z - u)(z - v)$.

À retenir : Un contrôle rapide

Contrôle toujours tes solutions par leur somme et leur produit :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a},$$
$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Ce calcul est court et détecte la plupart des erreurs de signe.

À retenir : À l'examen

Point important : la partie algébrique de l'exercice d'examen repose sur une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, avec ou sans paramètre ; le cours en donne la fréquence exacte.

Lorsque le discriminant est fourni sous une forme à vérifier, développe cette forme au lieu de chercher seul une racine carrée.

Propriété : Factorisation par une solution connue

Soit $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, avec a, b, c, d complexes et $a \neq 0$. Si z_0 est un nombre complexe tel que $P(z_0) = 0$, alors, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = (z - z_0)\left(az^2 + \beta z + \gamma\right)$, avec $\beta = az_0 + b$ et $\gamma = az_0^2 + bz_0 + c$.

Méthode : Résoudre une équation de degré 3

1. Vérifie que $P(z_0) = 0$ pour la valeur proposée. Si l'énoncé demande une solution réelle ou imaginaire pure, pose $z_0 = x$ ou $z_0 = iy$ avec un réel inconnu, et annule séparément partie réelle et partie imaginaire.
2. Factorise : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - z_0)\left(az^2 + \beta z + \gamma\right)$.
3. Par la règle du produit nul, résous le second degré obtenu.
4. Donne toutes les solutions, z_0 compris.

Rédaction : « Comme $P(z_0) = 0$, pour tout z, $P(z) = (z - z_0)(\dots)$; donc $P(z) = 0$ équivaut à $z = z_0$ ou … »