BURHAN

Nombres complexes : calcul et équations : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : calcul et équations	Niveau examen	5

Exercice 1 3,5 pts

Équation à paramètre angulaire et forme exponentielle

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} + 1 = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (E_θ) est $\Delta = (2i)^2$.

INDICE

Écris $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $b = -2e^{i\theta}$. Le carré de b se calcule par la règle du produit des exponentielles. Les termes en $e^{2i\theta}$ doivent se simplifier.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions z_1 et z_2 de (E_θ), avec $z_1 = e^{i\theta} + i$.

INDICE

Le nombre $\delta = 2i$ est une racine carrée de Δ. Applique le théorème du second degré à coefficients complexes. Divise numérateur et dénominateur par 2.

3. 0,75 pts

Montrer que $z_1 = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$.

INDICE

Écris $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$: z_1 est une somme de deux exponentielles. Applique la factorisation par l'angle moitié avec $a = \theta$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$. Calcule soigneusement la demi-différence.

4. 0,5 pts

En déduire le module et un argument de z_1.

INDICE

L'écriture précédente est une forme exponentielle seulement si le facteur réel est strictement positif. Encadre $\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ pour θ dans $]0, \pi[$. Conclus sur le signe du cosinus.

5. 1 pts

Sans calculer le produit $z_1 z_2$ directement, montrer que $z_1 z_2 = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$. Discuter selon θ le module et, lorsqu'il existe, un argument de $z_1 z_2$.

INDICE

Le produit des solutions vaut $\dfrac{c}{a}$. Factorise $e^{2i\theta} + 1$ par $e^{i\theta}$ et reconnais une formule d'Euler. Le signe de $\cos\theta$ change en $\dfrac{\pi}{2}$: sépare trois cas.

6. `0,5 pts`

Dans cette question, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Montrer que $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis calculer z_1^6.

INDICE

Remplace θ par $\dfrac{\pi}{6}$ dans le module et l'argument de la question 4. Tu dois reconnaître $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$. Pour la puissance, applique la formule de Moivre.

Exercice 2 3,75 pts

Équation à paramètre complexe et quotient des solutions

Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (F_m) : $z^2 - (1+3i)mz - 2(1-i)m^2 = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (F_m) est $\Delta = [(1-i)m]^2$.

INDICE

Calcule séparément $(1+3i)^2$ et $(1-i)^2$. Écris $\Delta = b^2 - 4ac$ en mettant m^2 en facteur. Attention au double signe moins devant $4ac$.

2. 0,75 pts

En déduire que les solutions de (F_m) sont $z_1 = (1+i)m$ et $z_2 = 2im$.

INDICE

Prends $\delta = (1-i)m$ comme racine carrée de Δ. Applique le théorème du second degré à coefficients complexes. Simplifie les deux numérateurs en factorisant par m.

3. 0,5 pts

Déterminer le nombre complexe m pour lequel $z_2 = 2$, puis donner z_1 sous forme algébrique pour cette valeur.

INDICE

Résous l'équation du premier degré $2im = 2$ en divisant par $2i$, non nul. Écris $\dfrac{1}{i}$ sous forme algébrique. Remplace ensuite m dans $(1+i)m$.

4. 0,75 pts

Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, quel que soit m non nul.

INDICE

Le quotient existe car $z_2 \neq 0$: justifie-le. Simplifie par m, puis écris $\dfrac{1+i}{2i}$ sous forme algébrique. Termine par la forme exponentielle de ce nombre.

5. 0,5 pts

Dans la suite, $m = e^{i\alpha}$ avec α réel. Donner une forme exponentielle de z_1 et de z_2.

INDICE

Écris $1+i$ et $2i$ sous forme exponentielle. Multiplie ensuite par $e^{i\alpha}$ avec la règle du produit. Vérifie que les modules obtenus sont strictement positifs.

6. 1 pts

Déterminer les réels α de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ pour lesquels z_1^4 est un réel strictement positif.

INDICE

Calcule z_1^4 par la formule de Moivre ; son module est un réel strictement positif. Le nombre est alors un réel strictement positif exactement quand son facteur exponentiel vaut $1 = e^{i0}$. Traduis cette égalité d'exponentielles sur les angles, puis garde les valeurs de l'intervalle.

Exercice 3 3 pts

Équation de degré 3 à solution réelle

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $Q(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + (-6+3i)z + 8 + 6i$.

1. 0,25 pts

Vérifier que $Q(2) = 0$.

INDICE

Remplace z par 2 terme par terme : 2^3, 2^2, puis le terme en z. Regroupe les parties réelles d'un côté, les parties imaginaires de l'autre.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $Q(z) = (z-2)\left(z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i\right)$.

INDICE

Utilise la factorisation par une solution connue avec $z_0 = 2$: $\beta = az_0 + b$ et $\gamma = az_0^2 + bz_0 + c$. Repère bien a, b et c dans Q. Le calcul de γ demande de l'attention.

3. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de l'équation $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$ est égal à $(3+i)^2$.

INDICE

Calcule $(1-3i)^2$, puis ajoute $4(4+3i)$. Développe ensuite $(3+i)^2$. Compare les deux résultats.

4. 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $Q(z) = 0$.

INDICE

Commence par la règle du produit nul appliquée à la factorisation. Pour le second facteur, applique le théorème du second degré à coefficients complexes avec $\delta = 3 + i$. N'oublie pas la solution 2.

5. 0,25 pts

Montrer que u et v ont le même module.

INDICE

Le module de $x + iy$, avec x et y réels, est $\sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule les deux modules séparément. Compare.

6. 0,5 pts

Montrer que $v = iu$, puis calculer $\left(\dfrac{v}{u}\right)^{2026}$.

INDICE

Calcule $i(1+2i)$ et compare à v. Le quotient $\dfrac{v}{u}$ existe car $u \neq 0$. Pour la puissance, sers-toi de $i^4 = 1$ et de la division de 2026 par 4.

Exercice 4 4 pts

Solutions par l'angle moitié, puissances réelles

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (G_θ) : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (G_θ) est $\Delta = \left(2e^{i\theta}\right)^2$.

INDICE

Écris $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $b = -2$ et $c = 1 - e^{2i\theta}$. Les termes constants se compensent. Pour reconnaître le carré, utilise la règle du produit des exponentielles.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions $z_1 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{i\theta}$ de (G_θ).

INDICE

Le nombre $\delta = 2e^{i\theta}$ est une racine carrée de Δ. Applique le théorème du second degré à coefficients complexes. Simplifie par 2.

3. 0,75 pts

Montrer que $z_1 = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$. En déduire le module et un argument de chacune des deux solutions.

INDICE

Écris $1 = e^{i0}$ et applique la factorisation par l'angle moitié, à la somme puis à la différence. Pour z_2, il apparaît $-2i\sin\dfrac{\theta}{2}$: écris $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Le signe des facteurs réels se lit sur l'intervalle de $\dfrac{\theta}{2}$.

4. 1 pts

Déterminer les valeurs de θ dans $]0, \pi[$ pour lesquelles z_1^3 est un nombre réel.

INDICE

Écris z_1^3 sous forme exponentielle par la formule de Moivre ; il est non nul. Un nombre non nul est réel si et seulement si son argument est congru à 0 modulo π. Résous la condition obtenue, puis garde seulement les valeurs de l'intervalle.

5. 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{z_2}{z_1} = -i\tan\dfrac{\theta}{2}$. Quelle est la nature de ce nombre ?

INDICE

Le quotient existe car $z_1 \neq 0$. Divise les formes exponentielles : modules divisés, arguments soustraits. Reconnais ensuite $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

6. 1 pts

Dans cette question, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer z_1^{2025} et z_2^6.

INDICE

Remplace θ dans les formes exponentielles de la question 3 ; le module de z_1 devient très simple. Applique la formule de Moivre. Pour z_1^{2025}, réduis l'angle obtenu modulo 2π.

Exercice 5 4 pts

Équation de degré 4 ramenée au second degré

On considère dans $\mathbb{C}$ les équations (H) : $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ et (H') : $Z^2 - 2Z + 4 = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (H') est $\Delta = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$.

INDICE

Écris $\Delta = b^2 - 4ac$ pour (H'), avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = 4$. Le résultat est un réel négatif. Pour le carré proposé, utilise $i^2 = -1$.

2. 0,75 pts

En déduire les solutions Z_1 et Z_2 de (H'), avec $\mathrm{Im}(Z_1) > 0$, puis une forme exponentielle de chacune.

INDICE

Les coefficients de (H') sont réels et $\Delta < 0$: applique le théorème du second degré à coefficients réels, avec $\sqrt{-\Delta}$. Les deux solutions sont conjuguées. Pour la forme exponentielle, calcule le module, puis reconnais un cosinus et un sinus remarquables.

3. 1 pts

Montrer qu'un nombre complexe z est solution de (H) si et seulement si $z^2 = Z_1$ ou $z^2 = Z_2$. En déduire les quatre solutions de (H) sous forme exponentielle.

INDICE

Pour tout z, $z^4 = \left(z^2\right)^2$: le premier membre de (H) est le premier membre de (H') évalué en z^2. Il reste à trouver les racines carrées de Z_1 et de Z_2 à partir de leurs formes exponentielles. Pour écrire l'opposé d'une forme exponentielle, utilise $-1 = e^{i\pi}$.

4. 0,5 pts

On pose $s = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$. Donner la forme algébrique de s, puis écrire les quatre solutions de (H) à l'aide de s et de $\overline{s}$.

INDICE

Passe par la forme trigonométrique : $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$. Le conjugué de $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ s'obtient en changeant l'argument en son opposé. Compare ensuite avec la liste de la question 3.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout nombre complexe z, $(z - s)(z - \overline{s}) = z^2 - \sqrt{6}\, z + 2$. En déduire que $z^4 - 2z^2 + 4 = \left(z^2 - \sqrt{6}\, z + 2\right)\left(z^2 + \sqrt{6}\, z + 2\right)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

INDICE

Développe : il apparaît $s + \overline{s}$ et $s\overline{s}$, que le conjugué, le module et la partie réelle obtenue à la question 4 permettent de calculer. Pour le second facteur, remplace s par $-s$. Termine par l'identité $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

6. 0,75 pts

Soit w une solution de (H). Montrer que $w^4 = 2w^2 - 4$, puis que $w^6 = -8$. Vérifier ce résultat pour $w = s$ par la formule de Moivre.

INDICE

La première égalité traduit simplement que w est solution de (H). Écris $w^6 = w^2 \times w^4$ et remplace w^4 par $2w^2 - 4$, deux fois. Pour la vérification, élève séparément le module et l'exponentielle à la puissance 6.