BURHAN

Nombres complexes : calcul et équations : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : calcul et équations	Niveau examen	5

Exercice 1 3,5 pts

Équation à paramètre angulaire et forme exponentielle

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} + 1 = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (E_θ) est $\Delta = (2i)^2$.

INDICE

Écris $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $b = -2e^{i\theta}$. Le carré de b se calcule par la règle du produit des exponentielles. Les termes en $e^{2i\theta}$ doivent se simplifier.

CORRIGÉ

Ici $a = 1$, $b = -2e^{i\theta}$ et $c = e^{2i\theta} + 1$. Comme $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta}$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4e^{2i\theta} - 4\left(e^{2i\theta} + 1\right) \\ &= -4.\end{aligned}$$

Or $(2i)^2 = 4i^2 = -4$.

Conclusion. $\Delta = (2i)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions z_1 et z_2 de (E_θ), avec $z_1 = e^{i\theta} + i$.

INDICE

Le nombre $\delta = 2i$ est une racine carrée de Δ. Applique le théorème du second degré à coefficients complexes. Divise numérateur et dénominateur par 2.

CORRIGÉ

Comme $a = 1 \neq 0$ et $(2i)^2 = \Delta$, le nombre $\delta = 2i$ est une racine carrée de Δ. D'après le théorème du second degré à coefficients complexes, les solutions sont $\dfrac{-b + \delta}{2}$ et $\dfrac{-b - \delta}{2}$:

$$z_1 = \frac{2e^{i\theta} + 2i}{2} = e^{i\theta} + i,$$

$$z_2 = \frac{2e^{i\theta} - 2i}{2} = e^{i\theta} - i.$$

Conclusion. Les solutions de (E_θ) sont $z_1 = e^{i\theta} + i$ et $z_2 = e^{i\theta} - i$.

3. 0,75 pts

Montrer que $z_1 = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

INDICE

Écris $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$: z_1 est une somme de deux exponentielles. Applique la factorisation par l'angle moitié avec $a = \theta$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$. Calcule soigneusement la demi-différence.

CORRIGÉ

On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $z_1 = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Pour tous réels a et b, la factorisation par l'angle moitié s'écrit :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Avec $a = \theta$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\frac{a-b}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4},$$
$$\frac{a+b}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion.

$$z_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

4. 0,5 pts

En déduire le module et un argument de z_1.

INDICE

L'écriture précédente est une forme exponentielle seulement si le facteur réel est strictement positif. Encadre $\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ pour θ dans $]0, \pi[$. Conclus sur le signe du cosinus.

CORRIGÉ

Signe du facteur réel. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Alors :

$$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[,$$

donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$.

Forme exponentielle. L'écriture de la question 3 est donc une forme exponentielle de z_1.

Conclusion. Le module et un argument de z_1 sont :

$$|z_1| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$
$$\arg z_1 \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

5. 1 pts

Sans calculer le produit $z_1 z_2$ directement, montrer que $z_1 z_2 = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$. Discuter selon θ le module et, lorsqu'il existe, un argument de $z_1 z_2$.

INDICE

Le produit des solutions vaut $\dfrac{c}{a}$. Factorise $e^{2i\theta}+1$ par $e^{i\theta}$ et reconnais une formule d'Euler. Le signe de $\cos\theta$ change en $\dfrac{\pi}{2}$: sépare trois cas.

CORRIGÉ

Produit des solutions. D'après la relation entre coefficients et racines :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \frac{c}{a} = e^{2i\theta} + 1 \\ &= e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right). \end{aligned}$$

D'après la formule d'Euler, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, donc :

$$z_1 z_2 = 2\cos\theta\, e^{i\theta}.$$

Discussion. Le signe de $\cos\theta$ décide :

- **si** $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos\theta > 0$: $|z_1 z_2| = 2\cos\theta$ et $\arg(z_1 z_2) \equiv \theta\ [2\pi]$;
- **si** $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, alors $z_1 z_2 = 0$: son module est 0 et il n'a pas d'argument (en effet $z_2 = 0$) ;
- **si** $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, alors $\cos\theta < 0$ et, comme $-1 = e^{i\pi}$, $z_1 z_2 = -2\cos\theta\, e^{i(\theta+\pi)}$: $|z_1 z_2| = -2\cos\theta$ et $\arg(z_1 z_2) \equiv \theta + \pi\ [2\pi]$.

Conclusion. $z_1 z_2 = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$ et son module vaut $2|\cos\theta|$. Un argument est θ si $\theta < \dfrac{\pi}{2}$, et $\theta + \pi$ si $\theta > \dfrac{\pi}{2}$; pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, le produit est nul et n'a pas d'argument.

6. 0,5 pts

Dans cette question, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Montrer que $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis calculer z_1^6.

INDICE

Remplace θ par $\dfrac{\pi}{6}$ dans le module et l'argument de la question 4. Tu dois reconnaître $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$. Pour la puissance, applique la formule de Moivre.

CORRIGÉ

Soit $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Alors $\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3}$.

Module et argument. D'après la question 4 :

$$\begin{aligned} |z_1| &= 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

et $\arg z_1 \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Donc $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Puissance sixième. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} z_1^6 &= \left(\sqrt{3}\right)^6 e^{2i\pi} \\ &= 27. \end{aligned}$$

Conclusion. $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_1^6 = 27$.

Exercice 2 3,75 pts

Équation à paramètre complexe et quotient des solutions

Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (F_m) : $z^2 - (1+3i)mz - 2(1-i)m^2 = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (F_m) est $\Delta = [(1-i)m]^2$.

INDICE

Calcule séparément $(1+3i)^2$ et $(1-i)^2$. Écris $\Delta = b^2 - 4ac$ en mettant m^2 en facteur. Attention au double signe moins devant $4ac$.

CORRIGÉ

Ici $a = 1$, $b = -(1+3i)m$ et $c = -2(1-i)m^2$.

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (1+3i)^2 m^2 \\ &\quad + 8(1-i)m^2.\end{aligned}$$

Or $(1+3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$, d'où :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8 + 6i + 8 - 8i)m^2 \\ &= -2i\,m^2.\end{aligned}$$

Carré proposé. $(1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$, donc $[(1-i)m]^2 = -2i\,m^2$.

Conclusion. $\Delta = [(1-i)m]^2$.

2. 0,75 pts

En déduire que les solutions de (F_m) sont $z_1 = (1+i)m$ et $z_2 = 2im$.

INDICE

Prends $\delta = (1-i)m$ comme racine carrée de Δ. Applique le théorème du second degré à coefficients complexes. Simplifie les deux numérateurs en factorisant par m.

CORRIGÉ

Comme $a = 1 \neq 0$ et $\delta = (1-i)m$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, le théorème du second degré à coefficients complexes donne les solutions $\dfrac{-b+\delta}{2}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2}$, avec $-b = (1+3i)m$:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{(1+3i)m + (1-i)m}{2} \\ &= \frac{(2+2i)m}{2} = (1+i)m, \\ z_2 &= \frac{(1+3i)m - (1-i)m}{2} \\ &= \frac{4im}{2} = 2im.\end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de (F_m) sont $z_1 = (1+i)m$ et $z_2 = 2im$.

3. 0,5 pts

Déterminer le nombre complexe m pour lequel $z_2 = 2$, puis donner z_1 sous forme algébrique pour cette valeur.

INDICE

Résous l'équation du premier degré $2im = 2$ en divisant par $2i$, non nul. Écris $\dfrac{1}{i}$ sous forme algébrique. Remplace ensuite m dans $(1+i)m$.

CORRIGÉ

Valeur de m. Comme $2i \neq 0$, l'égalité $2im = 2$ équivaut à :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{i} = \frac{-i}{i \times (-i)} \\ &= -i. \end{aligned}$$

Cette valeur est non nulle : elle est admise.

Valeur de z_1. Pour $m = -i$:

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)(-i) \\ &= -i - i^2 = 1 - i. \end{aligned}$$

Conclusion. On a $z_2 = 2$ pour $m = -i$, et alors $z_1 = 1 - i$.

4. 0,75 pts

Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, quel que soit m non nul.

INDICE

Le quotient existe car $z_2 \neq 0$: justifie-le. Simplifie par m, puis écris $\dfrac{1+i}{2i}$ sous forme algébrique. Termine par la forme exponentielle de ce nombre.

CORRIGÉ

Comme $m \neq 0$, on a $z_2 = 2im \neq 0$: le quotient est défini.

Simplification. Comme $\dfrac{1}{i} = -i$:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(1+i)m}{2im} = \frac{1+i}{2i} \\ &= \frac{(1+i)(-i)}{2} = \frac{1-i}{2}. \end{aligned}$$

Forme exponentielle. Ce nombre a pour module $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et :

$$\begin{aligned} \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(&\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) \\ &+ i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big), \end{aligned}$$

avec $\dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

Conclusion. Pour tout m non nul, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$: ce quotient ne dépend pas de m.

5. 0,5 pts

Dans la suite, $m = e^{i\alpha}$ avec α réel. Donner une forme exponentielle de z_1 et de z_2.

INDICE

Écris $1+i$ et $2i$ sous forme exponentielle. Multiplie ensuite par $e^{i\alpha}$ avec la règle du produit. Vérifie que les modules obtenus sont strictement positifs.

CORRIGÉ

On a $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. D'après la règle du produit en notation exponentielle, avec $m = e^{i\alpha}$:

$$z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$z_2 = 2e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Conclusion. Comme $\sqrt{2} > 0$ et $2 > 0$, ces écritures sont des formes exponentielles de z_1 et de z_2.

6. 1 pts

Déterminer les réels α de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ pour lesquels z_1^4 est un réel strictement positif.

INDICE

Calcule z_1^4 par la formule de Moivre ; son module est un réel strictement positif. Le nombre est alors un réel strictement positif exactement quand son facteur exponentiel vaut $1 = e^{i0}$. Traduis cette égalité d'exponentielles sur les angles, puis garde les valeurs de l'intervalle.

CORRIGÉ

Puissance quatrième. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} z_1^4 &= \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i(4\alpha+\pi)} \\ &= 4e^{i(4\alpha+\pi)}. \end{aligned}$$

Condition. Comme $4 > 0$, z_1^4 est un réel strictement positif si et seulement si $e^{i(4\alpha+\pi)}$ en est un. Ce nombre est de module 1 : la condition équivaut à $e^{i(4\alpha+\pi)} = 1 = e^{i0}$.

Angles. Deux nombres e^{ix} et e^{iy}, avec x et y réels, sont égaux si et seulement si $x \equiv y\ [2\pi]$. La condition s'écrit donc $4\alpha + \pi \equiv 0\ [2\pi]$: il existe un entier k tel que

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Valeurs dans $]-\pi, \pi]$. L'encadrement $-\pi < -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi$ équivaut à $-\frac{3}{2} < k \leq \frac{5}{2}$, soit $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Conclusion. z_1^4 est un réel strictement positif si et seulement si :

$$\alpha \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Exercice 3 3 pts

Équation de degré 3 à solution réelle

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $Q(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + (-6+3i)z + 8 + 6i$.

1. 0,25 pts

Vérifier que $Q(2) = 0$.

INDICE

Remplace z par 2 terme par terme : 2^3, 2^2, puis le terme en z. Regroupe les parties réelles d'un côté, les parties imaginaires de l'autre.

CORRIGÉ

On remplace z par 2, puis on regroupe parties réelles et parties imaginaires :

$$\begin{aligned} Q(2) &= 8 - 4(1+3i) \\ &\quad + 2(-6+3i) + 8 + 6i \\ &= (8 - 4 - 12 + 8) \\ &\quad + (-12 + 6 + 6)i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $Q(2) = 0$: le réel 2 est solution de $Q(z) = 0$.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $Q(z) = (z-2)\left(z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i\right)$.

INDICE

Utilise la factorisation par une solution connue avec $z_0 = 2$: $\beta = az_0 + b$ et $\gamma = az_0^2 + bz_0 + c$. Repère bien a, b et c dans Q. Le calcul de γ demande de l'attention.

CORRIGÉ

Le coefficient de z^3 est $a = 1 \neq 0$ et $Q(2) = 0$. On applique la factorisation par une solution connue $z_0 = 2$, avec $b = -(1+3i)$ et $c = -6 + 3i$.

Calcul de β.

$$\beta = 2 - 1 - 3i = 1 - 3i.$$

Calcul de γ.

$$\begin{aligned} \gamma &= 4 - 2(1+3i) - 6 + 3i \\ &= -4 - 3i. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = (z-2)\left(z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i\right)$.

3. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de l'équation $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$ est égal à $(3+i)^2$.

INDICE

Calcule $(1-3i)^2$, puis ajoute $4(4+3i)$. Développe ensuite $(3+i)^2$. Compare les deux résultats.

CORRIGÉ

Le discriminant de l'équation $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$ vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= (1-3i)^2 - 4(-4-3i) \\ &= (1-6i-9) + 16 + 12i \\ &= 8 + 6i.\end{aligned}$$

D'autre part, $(3+i)^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$.

Conclusion. Le discriminant est égal à $(3+i)^2$.

4. 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $Q(z) = 0$.

INDICE

Commence par la règle du produit nul appliquée à la factorisation. Pour le second facteur, applique le théorème du second degré à coefficients complexes avec $\delta = 3 + i$. N'oublie pas la solution 2.

CORRIGÉ

D'après la question 2 et la règle du produit nul, $Q(z) = 0$ si et seulement si $z - 2 = 0$ ou $z^2 + (1 - 3i)z - 4 - 3i = 0$.

Second facteur. On a $a = 1 \neq 0$, et $\delta = 3 + i$ est une racine carrée du discriminant d'après la question 3. Le théorème du second degré à coefficients complexes donne :

$$\begin{aligned}u &= \frac{-(1-3i) + (3+i)}{2} \\ &= \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i, \\ v &= \frac{-(1-3i) - (3+i)}{2} \\ &= \frac{-4+2i}{2} = -2 + i.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de $Q(z) = 0$ est $\{2, 1+2i, -2+i\}$.

5. 0,25 pts

Montrer que u et v ont le même module.

INDICE

Le module de $x+iy$, avec x et y réels, est $\sqrt{x^2+y^2}$. Calcule les deux modules séparément. Compare.

CORRIGÉ

Module de u. $|u| = |1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Module de v. $|v| = |-2+i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Conclusion. $|u| = |v|$: les nombres u et v ont le même module $\sqrt{5}$.

6. 0,5 pts

Montrer que $v = iu$, puis calculer $\left(\dfrac{v}{u}\right)^{2026}$.

INDICE

Calcule $i(1+2i)$ et compare à v. Le quotient $\dfrac{v}{u}$ existe car $u \neq 0$. Pour la puissance, sers-toi de $i^4 = 1$ et de la division de 2026 par 4.

CORRIGÉ

Égalité $v = iu$. On a $iu = i(1+2i) = i + 2i^2 = -2 + i = v$.

Quotient. Comme $u \neq 0$, on en déduit $\dfrac{v}{u} = i$.

Puissance. La division euclidienne de 2026 par 4 donne $2026 = 4 \times 506 + 2$. Comme $i^4 = 1$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{v}{u}\right)^{2026} &= \left(i^4\right)^{506} \times i^2 \\ &= -1.\end{aligned}$$

Conclusion. $v = iu$ et $\left(\dfrac{v}{u}\right)^{2026} = -1$.

Exercice 4 4 pts

Solutions par l'angle moitié, puissances réelles

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (G_θ) : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (G_θ) est $\Delta = \left(2e^{i\theta}\right)^2$.

INDICE

Écris $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $b = -2$ et $c = 1 - e^{2i\theta}$. Les termes constants se compensent. Pour reconnaître le carré, utilise la règle du produit des exponentielles.

CORRIGÉ

Ici $a = 1, b = -2$ et $c = 1 - e^{2i\theta}$. Les termes constants se compensent :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 - 4\left(1 - e^{2i\theta}\right) \\ &= 4e^{2i\theta}.\end{aligned}$$

D'après la règle du produit des exponentielles, $\left(2e^{i\theta}\right)^2 = 4e^{2i\theta}$.

Conclusion. $\Delta = \left(2e^{i\theta}\right)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions $z_1 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{i\theta}$ de (G_θ).

INDICE

Le nombre $\delta = 2e^{i\theta}$ est une racine carrée de Δ. Applique le théorème du second degré à coefficients complexes. Simplifie par 2.

CORRIGÉ

Comme $a = 1 \neq 0$ et $\delta = 2e^{i\theta}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, le théorème du second degré à coefficients complexes donne les solutions $\dfrac{2 + \delta}{2}$ et $\dfrac{2 - \delta}{2}$:

$$z_1 = \frac{2 + 2e^{i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta},$$

$$z_2 = \frac{2 - 2e^{i\theta}}{2} = 1 - e^{i\theta}.$$

Conclusion. Les solutions de (G_θ) sont $z_1 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{i\theta}$.

3. 0,75 pts

Montrer que $z_1 = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$. En déduire le module et un argument de chacune des deux solutions.

INDICE

Écris $1 = e^{i0}$ et applique la factorisation par l'angle moitié, à la somme puis à la différence. Pour z_2, il apparaît $-2i\sin\dfrac{\theta}{2}$: écris $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Le signe des facteurs réels se lit sur l'intervalle de $\dfrac{\theta}{2}$.

CORRIGÉ

On écrit $1 = e^{i0}$ et l'on factorise par $e^{i\frac{\theta}{2}}$, exponentielle de l'angle moitié. On utilise les formules d'Euler : pour tout réel x, $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ et $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$.

Écriture de z_1.

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Écriture de z_2.

$$\begin{aligned} z_2 &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= -2i\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Comme $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$:

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Signes. Pour $\theta \in]0,\pi[$, on a $\dfrac{\theta}{2} \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ et $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$: les deux écritures sont des formes exponentielles.

Conclusion.

- $|z_1| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\arg z_1 \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$;
- $|z_2| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ et $\arg z_2 \equiv \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

4. 1 pts

Déterminer les valeurs de θ dans $]0, \pi[$ pour lesquelles z_1^3 est un nombre réel.

INDICE

Écris z_1^3 sous forme exponentielle par la formule de Moivre ; il est non nul. Un nombre non nul est réel si et seulement si son argument est congru à 0 modulo π. Résous la condition obtenue, puis garde seulement les valeurs de l'intervalle.

CORRIGÉ

Forme exponentielle de z_1^3. D'après la question 3 et la formule de Moivre :

$$z_1^3 = 8\cos^3\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{3\theta}{2}},$$

avec $8\cos^3\dfrac{\theta}{2} > 0$. Ce nombre est non nul, d'argument $\dfrac{3\theta}{2}$.

Condition. Un nombre non nul est réel si et seulement si son argument est congru à 0 modulo π. Donc z_1^3 est réel si et seulement s'il existe un entier k tel que $\dfrac{3\theta}{2} = k\pi$, c'est-à-dire $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$.

Valeurs dans $]0, \pi[$. L'encadrement $0 < \dfrac{2k\pi}{3} < \pi$ équivaut à $0 < k < \dfrac{3}{2}$, donc $k = 1$.

Conclusion. La seule valeur est $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

5. 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{z_2}{z_1} = -i\tan\dfrac{\theta}{2}$. Quelle est la nature de ce nombre ?

INDICE

Le quotient existe car $z_1 \neq 0$. Divise les formes exponentielles : modules divisés, arguments soustraits. Reconnais ensuite $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

CORRIGÉ

Comme $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$, on a $z_1 \neq 0$: le quotient est défini.

D'après la règle du quotient appliquée aux formes exponentielles de la question 3 :

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= \tan\frac{\theta}{2} \times (-i).\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{z_2}{z_1} = -i\tan\dfrac{\theta}{2}$. Comme $\tan\dfrac{\theta}{2}$ est réel, ce nombre a une partie réelle nulle.

Conclusion. $\dfrac{z_2}{z_1}$ est un imaginaire pur ; il est même non nul, car $\tan\dfrac{\theta}{2} > 0$.

6. 1 pts

Dans cette question, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer z_1^{2025} et z_2^6.

INDICE

Remplace θ dans les formes exponentielles de la question 3 ; le module de z_1 devient très simple. Applique la formule de Moivre. Pour z_1^{2025}, réduis l'angle obtenu modulo 2π.

CORRIGÉ

Soit $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, de sorte que $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

Formes exponentielles. D'après la question 3 :

- $|z_1| = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$, donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$;
- $|z_2| = 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{6}$, donc $z_2 = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Calcul de z_1^{2025}. D'après la formule de Moivre, $z_1^{2025} = e^{i\frac{2025\pi}{3}} = e^{675i\pi}$. Comme $675 = 2\times 337 + 1$, on a $675\pi \equiv \pi\ [2\pi]$; et $e^{i\pi} = -1$, donc $z_1^{2025} = -1$.

Calcul de z_2^6. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} z_2^6 &= \left(\sqrt{3}\right)^6 e^{-i\pi} \\ &= -27. \end{aligned}$$

Conclusion. $z_1^{2025} = -1$ et $z_2^6 = -27$.

Exercice 5 4 pts

Équation de degré 4 ramenée au second degré

On considère dans $\mathbb{C}$ les équations $(H) : z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ et $(H') : Z^2 - 2Z + 4 = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (H') est $\Delta = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$.

INDICE

Écris $\Delta = b^2 - 4ac$ pour (H'), avec $a = 1, b = -2$ et $c = 4$. Le résultat est un réel négatif. Pour le carré proposé, utilise $i^2 = -1$.

CORRIGÉ

Pour (H'), $a = 1, b = -2$ et $c = 4$. Donc :

$$\Delta = 4 - 16 = -12.$$

Or $\left(2i\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times i^2 \times 3 = -12$.

Conclusion. $\Delta = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$.

2. 0,75 pts

En déduire les solutions Z_1 et Z_2 de (H'), avec $\mathrm{Im}(Z_1) > 0$, puis une forme exponentielle de chacune.

INDICE

Les coefficients de (H') sont réels et $\Delta < 0$: applique le théorème du second degré à coefficients réels, avec $\sqrt{-\Delta}$. Les deux solutions sont conjuguées. Pour la forme exponentielle, calcule le module, puis reconnais un cosinus et un sinus remarquables.

CORRIGÉ

Les coefficients de (H') sont réels, $a = 1 \neq 0$ et $\Delta = -12 < 0$, avec $\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{3}$.

Solutions. D'après le théorème du second degré à coefficients réels :

$$Z_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3},$$
$$Z_2 = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}.$$

On a bien $\mathrm{Im}(Z_1) > 0$, et $Z_2 = \overline{Z_1}$.

Forme exponentielle. $|Z_1| = \sqrt{1 + 3} = 2$ et :

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

avec $2 > 0$.

Conclusion. $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et, par conjugaison, $Z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3. 1 pts

Montrer qu'un nombre complexe z est solution de (H) si et seulement si $z^2 = Z_1$ ou $z^2 = Z_2$. En déduire les quatre solutions de (H) sous forme exponentielle.

INDICE

Pour tout z, $z^4 = \left(z^2\right)^2$: le premier membre de (H) est le premier membre de (H') évalué en z^2. Il reste à trouver les racines carrées de Z_1 et de Z_2 à partir de leurs formes exponentielles. Pour écrire l'opposé d'une forme exponentielle, utilise $-1 = e^{i\pi}$.

CORRIGÉ

Équivalence. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^4 = \left(z^2\right)^2$, donc :

$$\begin{aligned} & z^4 - 2z^2 + 4 \\ &= \left(z^2\right)^2 - 2z^2 + 4. \end{aligned}$$

Ainsi z est solution de (H) si et seulement si z^2 est solution de (H'), c'est-à-dire $z^2 = Z_1$ ou $z^2 = Z_2$.

Racines carrées. D'après le théorème des racines carrées d'un nombre complexe non nul :

- celles de $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$;
- celles de $Z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $-\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Formes exponentielles des opposés. Comme $-1 = e^{i\pi}$:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}} &= \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ &= \sqrt{2}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}, \\ -\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}} &= \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de (H) est :

$$\begin{aligned} \Big\{ & \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}, \\ & \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}, \sqrt{2}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}} \Big\}. \end{aligned}$$

4. 0,5 pts

On pose $s = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$. Donner la forme algébrique de s, puis écrire les quatre solutions de (H) à l'aide de s et de $\overline{s}$.

INDICE

Passe par la forme trigonométrique : $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$. Le conjugué de $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ s'obtient en changeant l'argument en son opposé. Compare ensuite avec la liste de la question 3.

CORRIGÉ

Forme algébrique de s.

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Conjugué. $\overline{s} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

Les quatre solutions. D'après la question 3, $\sqrt{2}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -s$ et $\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\overline{s}$.

Conclusion. $s = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$, et les solutions de (H) sont s, $\overline{s}$, $-s$ et $-\overline{s}$.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout nombre complexe z, $(z-s)(z-\overline{s}) = z^2 - \sqrt{6}\,z + 2$. En déduire que $z^4 - 2z^2 + 4 = \left(z^2 - \sqrt{6}\,z + 2\right)\left(z^2 + \sqrt{6}\,z + 2\right)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

INDICE

Développe : il apparaît $s+\overline{s}$ et $s\overline{s}$, que le conjugué, le module et la partie réelle obtenue à la question 4 permettent de calculer. Pour le second facteur, remplace s par $-s$. Termine par l'identité $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

CORRIGÉ

Premier facteur. Soit $z \in \mathbb{C}$. En développant :

$$\begin{aligned}&(z-s)(z-\overline{s})\\&= z^2 - (s+\overline{s})\,z + s\overline{s}.\end{aligned}$$

Or $s+\overline{s} = 2\,\mathrm{Re}(s) = \sqrt{6}$ et $s\overline{s} = |s|^2 = 2$. Donc :

$$\begin{aligned}&(z-s)(z-\overline{s})\\&= z^2 - \sqrt{6}\,z + 2.\end{aligned}$$

Second facteur. En remplaçant s par $-s$, donc $\overline{s}$ par $-\overline{s}$:

$$\begin{aligned}&(z+s)(z+\overline{s})\\&= z^2 + \sqrt{6}\,z + 2.\end{aligned}$$

Produit. Posons $A = z^2 + 2$ et $B = \sqrt{6}\,z$, de sorte que les deux trinômes sont $A - B$ et $A + B$. Avec $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$:

$$\begin{aligned}&(A-B)(A+B)\\&= \left(z^2+2\right)^2 - 6z^2\\&= z^4 + 4z^2 + 4 - 6z^2\\&= z^4 - 2z^2 + 4.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 2z^2 + 4 = \left(z^2 - \sqrt{6}\,z + 2\right)\left(z^2 + \sqrt{6}\,z + 2\right)$, produit de deux trinômes à coefficients réels.

6. 0,75 pts

Soit w une solution de (H). Montrer que $w^4 = 2w^2 - 4$, puis que $w^6 = -8$. Vérifier ce résultat pour $w = s$ par la formule de Moivre.

INDICE

La première égalité traduit simplement que w est solution de (H). Écris $w^6 = w^2 \times w^4$ et remplace w^4 par $2w^2 - 4$, deux fois. Pour la vérification, élève séparément le module et l'exponentielle à la puissance 6.

CORRIGÉ

Première égalité. Comme w est solution de (H), $w^4 - 2w^2 + 4 = 0$, donc $w^4 = 2w^2 - 4$.

Puissance sixième. On remplace w^4 par $2w^2 - 4$, deux fois :

$$\begin{aligned} w^6 &= w^2 \times w^4 = 2w^4 - 4w^2 \\ &= 2\left(2w^2 - 4\right) - 4w^2 \\ &= -8. \end{aligned}$$

Vérification pour $w = s$. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} s^6 &= \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{i\pi} \\ &= 8 \times (-1) = -8. \end{aligned}$$

Conclusion. Toute solution w de (H) vérifie $w^4 = 2w^2 - 4$ et $w^6 = -8$; la formule de Moivre le confirme pour $w = s$.