BURHAN

Nombres complexes : calcul et équations : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : calcul et équations	Entraînement	6

Exercice 1

Puissances réelles ou imaginaires pures

On pose $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

1.

Montre que $z = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

INDICE

Calcule $|z|$, puis mets-le en facteur. Simplifie $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$. Il reste à reconnaître le cosinus et le sinus d'un angle remarquable négatif.

2.

En déduire z^6 sous forme algébrique.

INDICE

Applique la formule de Moivre à $e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Calcule $\left(2\sqrt{2}\right)^6$ en passant par $\left(2\sqrt{2}\right)^2$. Reconnais enfin $e^{-i\pi}$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, z^n est réel si et seulement si n est un multiple de 6.

INDICE

Écris z^n sous forme exponentielle : il est non nul. Un nombre non nul est réel si et seulement si son argument est congru à 0 modulo π. Traduis $-\dfrac{n\pi}{6} = k\pi$ avec k entier.

4.

Détermine les entiers naturels n pour lesquels z^n est imaginaire pur, puis vérifie ta réponse pour $n = 3$.

INDICE

Même démarche : un nombre non nul est imaginaire pur si et seulement si son argument est congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π. Écris $-\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et isole n. Attention : n doit rester un entier naturel.

Exercice 2

Angle moitié et discussion selon le paramètre

Pour tout réel θ de l'intervalle $]-\pi, \pi[$, on pose $w = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1.

Montre que $w = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$.

INDICE

C'est une somme $e^{ia} + e^{ib}$: utilise la factorisation par l'angle moitié. Prends $a = \theta$ et $b = \dfrac{\pi}{3}$. Calcule ensuite $\dfrac{a-b}{2}$ et $\dfrac{a+b}{2}$.

2.

Étudie le signe de $\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$ lorsque θ décrit $]-\pi, \pi[$.

INDICE

Encadre d'abord $\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6}$. Sur l'intervalle obtenu, le cosinus est positif entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$. Traduis la borne $-\dfrac{\pi}{2}$ en une valeur de θ.

3.

En déduire, selon les valeurs de θ, le module de w et, lorsqu'il existe, un argument de w.

INDICE

Raisonne par disjonction des trois cas de la question précédente. Dans le cas positif, l'écriture est déjà une forme exponentielle. Dans le cas négatif, change de signe et ajoute π à l'angle ; dans le cas nul, regarde w lui-même.

4.

On prend $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Calcule $|w|^2$ à partir de la forme algébrique de w, puis en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

INDICE

Écris $w = i + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et calcule $|w|^2$. Le cas 1 donne aussi $|w|$ avec un cosinus. Pour conclure, justifie le signe de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ avant de prendre une racine carrée.

Exercice 3

Linéariser, développer, puis une valeur exacte

Dans tout l'exercice, θ désigne un réel. Les puissances sont développées pas à pas.

1.

Linéarise $\cos\theta\,\sin^2\theta$.

INDICE

Remplace $\sin\theta$ et $\cos\theta$ par les formules d'Euler. Calcule d'abord le carré $\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2$, puis multiplie par $e^{i\theta}+e^{-i\theta}$. Le point délicat est le regroupement des termes en $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

2.

Montre que $\cos(4\theta)=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$.

INDICE

Par la formule de Moivre, $\cos(4\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta+i\sin\theta)^4$. Calcule d'abord le carré, puis le carré du carré. Remplace enfin $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$.

3.

En choisissant $\theta=\dfrac{\pi}{8}$, montre que $\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

INDICE

Pour $\theta=\dfrac{\pi}{8}$, $\cos(4\theta)=0$: le nombre $X=\cos^2\dfrac{\pi}{8}$ vérifie une équation du second degré. Résous-la dans $\mathbb{R}$. Pour choisir entre les deux racines, compare $\cos\dfrac{\pi}{8}$ à $\cos\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 4

Équation à coefficients complexes et équation conjuguée

On considère l'équation $(E) : z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

1.

Montre que le discriminant de (E) est $\Delta = -8 - 6i$, puis détermine les racines carrées de Δ.

INDICE

Calcule $(3+i)^2$, puis retranche $4(4+3i)$. Pour les racines carrées, pose $\delta = x + iy$ et écris trois équations, dont celle des modules. Le signe de $2xy$ départage les couples.

2.

Résous l'équation (E).

INDICE

Le discriminant n'a pas de signe : utilise une racine carrée δ de Δ. Applique le théorème du second degré à coefficients complexes avec $\delta = 1 - 3i$. Simplifie chaque quotient par 2.

3.

Contrôle ces solutions à l'aide de leur somme et de leur produit.

INDICE

Les relations entre coefficients et racines donnent $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$. Calcule $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ séparément. Compare aux coefficients de (E).

4.

On considère $(E') : z^2 - (3-i)z + 4 - 3i = 0$. Montre qu'un nombre complexe w est solution de (E') si et seulement si $\overline{w}$ est solution de (E). En déduire les solutions de (E').

INDICE

Pour un nombre w, calcule le conjugué de $\overline{w}^2 - (3+i)\overline{w} + 4 + 3i$ avec les propriétés du conjugué. Utilise ensuite qu'un nombre est nul si et seulement si son conjugué est nul. Pour conclure, pense que $w = \overline{\overline{w}}$.

Exercice 5

Équation de degré 3 et solution imaginaire pure

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (10-4i)z - 20i$.

1.

Soit y un réel. Montre que $P(iy) = (-2y^2 + 4y) + i\left(-y^3 + 2y^2 + 10y - 20\right)$.

INDICE

Calcule d'abord $(iy)^2$ et $(iy)^3$. Développe chaque terme de $P(iy)$ séparément. Le point délicat est $(10-4i)(iy)$: il contient un i^2.

2.

En déduire que l'équation $P(z) = 0$ a une unique solution imaginaire pure, que l'on déterminera.

INDICE

Par unicité de la forme algébrique, $P(iy) = 0$ équivaut à deux équations réelles. Commence par la plus simple, la partie réelle : factorise-la. Teste ensuite chaque valeur trouvée dans la partie imaginaire.

3.

Détermine les nombres complexes β et γ tels que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = (z-2i)\left(z^2 + \beta z + \gamma\right)$.

INDICE

Comme $P(2i) = 0$, utilise la factorisation par une solution connue : $\beta = az_0 + b$ et $\gamma = az_0^2 + bz_0 + c$. Ici $a = 1$ et $z_0 = 2i$. Tu peux aussi développer le produit et identifier.

4.

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

INDICE

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Le second facteur est à coefficients réels : calcule son discriminant. Il est négatif : applique le théorème du second degré à coefficients réels avec $\sqrt{-\Delta}$.

Exercice 6

Inégalité triangulaire : récurrence et absurde

On rappelle l'inégalité triangulaire : pour tous nombres complexes z et z', $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

1.

Montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$ et tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$, on a $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$.

INDICE

L'initialisation $n = 2$ est l'inégalité rappelée. Pour l'hérédité, regroupe les n premiers termes : $z_1 + \cdots + z_{n+1} = S + z_{n+1}$. Applique l'inégalité triangulaire à S et z_{n+1} avant d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

2.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| \leq 1$. Montre que $|z^3 + z^2 + z| \leq 3$.

INDICE

Applique le résultat précédent avec $n = 3$. Calcule ensuite chaque $|z^k|$ grâce au module d'une puissance. L'hypothèse $|z| \leq 1$ sert à majorer chaque terme.

3.

Montre par l'absurde que l'équation $z^3 + z^2 + z + 4 = 0$ n'a aucune solution z telle que $|z| \leq 1$.

INDICE

Suppose qu'une telle solution z existe. Isole le nombre 4 dans l'équation, puis prends les modules des deux membres. Compare avec la majoration de la question 2.