BURHAN

Nombres complexes : calcul et équations : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : calcul et équations	Entraînement	6

Exercice 1

Puissances réelles ou imaginaires pures

On pose $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

1.

Montre que $z = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

INDICE

Calcule $|z|$, puis mets-le en facteur. Simplifie $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$. Il reste à reconnaître le cosinus et le sinus d'un angle remarquable négatif.

CORRIGÉ

Module. $|z| = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; en particulier $z \neq 0$.

Mise en facteur.

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right). \end{aligned}$$

Angle. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Comme $2\sqrt{2} > 0$, on obtient $z = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2.

En déduire z^6 sous forme algébrique.

INDICE

Applique la formule de Moivre à $e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Calcule $\left(2\sqrt{2}\right)^6$ en passant par $\left(2\sqrt{2}\right)^2$. Reconnais enfin $e^{-i\pi}$.

CORRIGÉ

D'après la formule de Moivre, $\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = e^{-i\pi}$, donc :

$$z^6 = \left(2\sqrt{2}\right)^6 e^{-i\pi}.$$

Module. $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$, donc $\left(2\sqrt{2}\right)^6 = 8^3 = 512$.

Conclusion. Comme $e^{-i\pi} = -1$, on obtient $z^6 = -512$.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, z^n est réel si et seulement si n est un multiple de 6.

INDICE

Écris z^n sous forme exponentielle : il est non nul. Un nombre non nul est réel si et seulement si son argument est congru à 0 modulo π. Traduis $-\dfrac{n\pi}{6} = k\pi$ avec k entier.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Moivre :

$$z^n = \left(2\sqrt{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}.$$

Ce nombre est non nul, d'argument $-\dfrac{n\pi}{6}$.

Condition. Un nombre non nul est réel si et seulement si son argument est congru à 0 modulo π. Donc z^n est réel si et seulement s'il existe un entier k tel que :

$$-\frac{n\pi}{6} = k\pi,$$

c'est-à-dire $n = -6k$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, z^n est réel si et seulement si n est un multiple de 6.

4.

Détermine les entiers naturels n pour lesquels z^n est imaginaire pur, puis vérifie ta réponse pour $n = 3$.

INDICE

Même démarche : un nombre non nul est imaginaire pur si et seulement si son argument est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Écris $-\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et isole n. Attention : n doit rester un entier naturel.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre non nul z^n est imaginaire pur si et seulement si son argument est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, c'est-à-dire s'il existe un entier k tel que :

$$-\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Cela s'écrit $n = -3 - 6k$.

Changement d'indice. Posons $p = -k - 1$, entier relatif. Alors $n = 3 + 6p$, et :

$$n \geq 0 \iff p \geq -\frac{1}{2}.$$

Comme p est entier, cela équivaut à $p \geq 0$.

Vérification pour $n = 3$.

$$\begin{aligned} z^3 &= \left(2\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= 16\sqrt{2}\,(-i) \\ &= -16\sqrt{2}\,i, \end{aligned}$$

qui est bien imaginaire pur.

Conclusion. z^n est imaginaire pur si et seulement si $n = 3 + 6p$ avec p entier naturel : n vaut $3, 9, 15,$ etc.

Exercice 2

Angle moitié et discussion selon le paramètre

Pour tout réel θ de l'intervalle $]-\pi, \pi[$, on pose $w = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1.

Montre que $w = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$.

INDICE

C'est une somme $e^{ia} + e^{ib}$: utilise la factorisation par l'angle moitié. Prends $a = \theta$ et $b = \dfrac{\pi}{3}$. Calcule ensuite $\dfrac{a-b}{2}$ et $\dfrac{a+b}{2}$.

CORRIGÉ

Pour tous réels a et b, la factorisation par l'angle moitié donne :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

On l'applique avec $a = \theta$ et $b = \dfrac{\pi}{3}$:

$$\frac{a-b}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6},$$
$$\frac{a+b}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

Conclusion. Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$:

$$w = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

2.

Étudie le signe de $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.

INDICE

Encadre d'abord $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}$. Sur l'intervalle obtenu, le cosinus est positif entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Traduis la borne $-\frac{\pi}{2}$ en une valeur de θ.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$. Alors :

$$\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[.$$

Signe du cosinus sur cet intervalle. Le cosinus y est :

- strictement positif sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right[$;
- nul en $-\frac{\pi}{2}$;
- strictement négatif sur $\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right[$.

Retour à θ. L'application $\theta \mapsto \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}$ est strictement croissante, et $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$ équivaut à $\theta=-\frac{2\pi}{3}$.

Conclusion. Le facteur $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ est :

- strictement positif pour $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3},\pi\right[$;
- nul pour $\theta=-\frac{2\pi}{3}$;
- strictement négatif pour $\theta \in \left]-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right[$.

3.

En déduire, selon les valeurs de θ, le module de w et, lorsqu'il existe, un argument de w.

INDICE

Raisonne par disjonction des trois cas de la question précédente. Dans le cas positif, l'écriture est déjà une forme exponentielle. Dans le cas négatif, change de signe et ajoute π à l'angle ; dans le cas nul, regarde w lui-même.

CORRIGÉ

Notons $c = \cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$, de sorte que $w = 2c\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$. On reprend les trois cas de la question 2.

Cas 1 : $\theta \in \left]-\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right[$**.** Alors $2c > 0$: l'écriture est une forme exponentielle. Donc $|w| = 2c$ et :

$$\arg w \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

Cas 2 : $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$**.** Alors $c = 0$, donc $w = 0$: son module est 0 et il n'a pas d'argument.

Cas 3 : $\theta \in \left]-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right[$**.** Alors $-2c > 0$. Comme $-1 = e^{i\pi}$:

$$w = -2c\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi}{6}\right)}.$$

Donc $|w| = -2c$ et :

$$\arg w \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{7\pi}{6}\ [2\pi].$$

Conclusion. Les trois cas couvrent tout l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Dans chacun, $|w| = 2|c|$; un argument de w existe pour $\theta \neq -\dfrac{2\pi}{3}$ et vient d'être donné.

4.

On prend $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Calcule $|w|^2$ à partir de la forme algébrique de w, puis en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

INDICE

Écris $w = i + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et calcule $|w|^2$. Le cas 1 donne aussi $|w|$ avec un cosinus. Pour conclure, justifie le signe de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ avant de prendre une racine carrée.

CORRIGÉ

Forme algébrique. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on a $e^{i\theta} = i$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, donc :

$$w = \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) i.$$

Carré du module.

$$\begin{aligned} |w|^2 &= \frac{1}{4} + 1 + \sqrt{3} + \frac{3}{4} \\ &= 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Avec la question 3. Comme $\dfrac{\pi}{2} \in \left]-\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right[$, le cas 1 donne :

$$\begin{aligned} |w| &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\cos\frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Ainsi $4\cos^2\dfrac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

Signe. Comme $\dfrac{\pi}{12} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\dfrac{\pi}{12} > 0$.

Conclusion. $|w|^2 = 2 + \sqrt{3}$ et :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 3

Linéariser, développer, puis une valeur exacte

Dans tout l'exercice, θ désigne un réel. Les puissances sont développées pas à pas.

1.

Linéarise $\cos\theta\,\sin^2\theta$.

INDICE

Remplace $\sin\theta$ et $\cos\theta$ par les formules d'Euler. Calcule d'abord le carré $\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2$, puis multiplie par $e^{i\theta}+e^{-i\theta}$. Le point délicat est le regroupement des termes en $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

CORRIGÉ

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},$$

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=\frac{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2}{(2i)^2}\\&=-\frac{e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}}{4}.\end{aligned}$$

Produit. Posons :

$$\begin{aligned}P=&\left(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}\right)\\&\times\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right).\end{aligned}$$

En développant, puis en regroupant :

$$\begin{aligned}P&=e^{3i\theta}+e^{i\theta}-2e^{i\theta}\\&\quad-2e^{-i\theta}+e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\\&=\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\\&\quad-\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\\&=2\cos(3\theta)-2\cos\theta.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $\cos\theta\,\sin^2\theta=-\dfrac{P}{8}$, pour tout réel θ :

$$\cos\theta\,\sin^2\theta=\frac{\cos\theta-\cos(3\theta)}{4}.$$

2.

Montre que $\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$.

INDICE

Par la formule de Moivre, $\cos(4\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^4$. Calcule d'abord le carré, puis le carré du carré. Remplace enfin $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$.

CORRIGÉ

Notons $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$, qui sont réels. D'après la formule de Moivre :

$$(c + is)^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta).$$

Carré. $(c + is)^2 = c^2 - s^2 + 2ics$.

Puissance 4.

$$\begin{aligned}(c + is)^4 &= \left(c^2 - s^2 + 2ics\right)^2 \\ &= \left(c^2 - s^2\right)^2 - 4c^2s^2 \\ &\quad + 4ics\left(c^2 - s^2\right).\end{aligned}$$

Partie réelle. Comme c et s sont réels, on identifie les parties réelles :

$$\cos(4\theta) = c^4 - 6c^2s^2 + s^4.$$

Élimination de s. On remplace s^2 par $1 - c^2$:

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) &= c^4 - 6c^2 + 6c^4 \\ &\quad + 1 - 2c^2 + c^4 \\ &= 8c^4 - 8c^2 + 1.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel θ, $\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$.

3.

En choisissant $\theta = \dfrac{\pi}{8}$, montre que $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

INDICE

Pour $\theta = \dfrac{\pi}{8}$, $\cos(4\theta) = 0$: le nombre $X = \cos^2 \dfrac{\pi}{8}$ vérifie une équation du second degré. Résous-la dans $\mathbb{R}$. Pour choisir entre les deux racines, compare $\cos \dfrac{\pi}{8}$ à $\cos \dfrac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Équation vérifiée. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{8}$, on a $\cos(4\theta) = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$. D'après la question 2, $X = \cos^2 \dfrac{\pi}{8}$ vérifie :

$$8X^2 - 8X + 1 = 0.$$

Résolution. Le discriminant vaut $64 - 32 = 32 > 0$, et $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Les racines sont $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Choix de la racine. Le cosinus est strictement décroissant sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{4}$. Donc $\cos \dfrac{\pi}{8} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$ et, en élevant au carré, $X > \dfrac{1}{2}$. Or $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} < \dfrac{1}{2}$: cette racine est exclue.

Conclusion. $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 4

Équation à coefficients complexes et équation conjuguée

On considère l'équation (E) : $z^2-(3+i)z+4+3i=0$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

1.

Montre que le discriminant de (E) est $\Delta=-8-6i$, puis détermine les racines carrées de Δ.

INDICE

Calcule $(3+i)^2$, puis retranche $4(4+3i)$. Pour les racines carrées, pose $\delta=x+iy$ et écris trois équations, dont celle des modules. Le signe de $2xy$ départage les couples.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta&=(3+i)^2-4(4+3i)\\&=9+6i-1-16-12i\\&=-8-6i.\end{aligned}$$

Conditions nécessaires. Soit $\delta=x+iy$, avec x et y réels, tel que $\delta^2=\Delta$. Par unicité de la forme algébrique, $x^2-y^2=-8$ et $2xy=-6$. L'égalité des modules donne $x^2+y^2=|\Delta|$, avec :

$$|\Delta|=\sqrt{64+36}=10.$$

Résolution. On obtient $x^2=1$ et $y^2=9$. Comme $xy=-3<0$, seuls $1-3i$ et $-1+3i$ sont possibles.

Vérification. Réciproquement, $(1-3i)^2=1-6i+9i^2=-8-6i$, et $(-1+3i)^2=(1-3i)^2$.

Conclusion. $\Delta=-8-6i$, et ses racines carrées sont $\delta=1-3i$ et $-1+3i$.

2.

Résous l'équation (E).

INDICE

Le discriminant n'a pas de signe : utilise une racine carrée δ de Δ. Applique le théorème du second degré à coefficients complexes avec $\delta=1-3i$. Simplifie chaque quotient par 2.

CORRIGÉ

Ici $a=1\neq 0$, $b=-(3+i)$, et $\delta=1-3i$ vérifie $\delta^2=\Delta$. D'après le théorème du second degré à coefficients complexes, les solutions sont $\dfrac{-b-\delta}{2}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2}$:

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{3+i-(1-3i)}{2}\\&=\frac{2+4i}{2}=1+2i,\\z_2&=\frac{3+i+(1-3i)}{2}\\&=\frac{4-2i}{2}=2-i.\end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de (E) sont $1+2i$ et $2-i$.

3.

Contrôle ces solutions à l'aide de leur somme et de leur produit.

INDICE

Les relations entre coefficients et racines donnent $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$. Calcule $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ séparément. Compare aux coefficients de (E).

CORRIGÉ

D'après les relations entre coefficients et racines, on attend $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = 3 + i$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} = 4 + 3i$.

Somme. $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i$.

Produit.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1 + 2i)(2 - i) \\ &= 2 - i + 4i - 2i^2 \\ &= 4 + 3i. \end{aligned}$$

Conclusion. La somme et le produit concordent avec les coefficients de (E) : les solutions trouvées sont confirmées.

4.

On considère (E') : $z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = 0$. Montre qu'un nombre complexe w est solution de (E') si et seulement si $\overline{w}$ est solution de (E). En déduire les solutions de (E').

INDICE

Pour un nombre w, calcule le conjugué de $\overline{w}^2 - (3 + i)\overline{w} + 4 + 3i$ avec les propriétés du conjugué. Utilise ensuite qu'un nombre est nul si et seulement si son conjugué est nul. Pour conclure, pense que $w = \overline{\overline{w}}$.

CORRIGÉ

Soit $w \in \mathbb{C}$. Posons $N = \overline{w}^2 - (3 + i)\overline{w} + 4 + 3i$: le nombre $\overline{w}$ est solution de (E) si et seulement si $N = 0$.

Conjugué de N. Le conjugué d'une somme, d'un produit et d'une puissance se calcule terme à terme, et $\overline{\overline{w}} = w$:

$$\overline{N} = w^2 - (3 - i)w + 4 - 3i.$$

Équivalence. Un nombre est nul si et seulement si son conjugué est nul. Donc $\overline{w}$ est solution de (E) si et seulement si w est solution de (E').

Solutions de (E'). Les solutions de (E) sont $1 + 2i$ et $2 - i$. Ainsi w est solution de (E') si et seulement si $\overline{w} \in \{1 + 2i, 2 - i\}$, c'est-à-dire :

$$w \in \{1 - 2i, 2 + i\}.$$

Conclusion. Les solutions de (E') sont $1 - 2i$ et $2 + i$, conjuguées de celles de (E).

Exercice 5

Équation de degré 3 et solution imaginaire pure

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (10-4i)z - 20i$.

1.

Soit y un réel. Montre que $P(iy) = (-2y^2 + 4y) + i\left(-y^3 + 2y^2 + 10y - 20\right)$.

INDICE

Calcule d'abord $(iy)^2$ et $(iy)^3$. Développe chaque terme de $P(iy)$ séparément. Le point délicat est $(10-4i)(iy)$: il contient un i^2.

CORRIGÉ

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $(iy)^2 = -y^2$ et $(iy)^3 = -iy^3$.

Termes de $P(iy)$.

- $(iy)^3 = -iy^3$;
- $(2-2i)(iy)^2 = -2y^2 + 2iy^2$;
- $(10-4i)(iy) = 10iy - 4i^2y = 4y + 10iy$;
- le terme constant vaut $-20i$.

Regroupement. En séparant les termes sans i et les termes en i :

$$\begin{aligned} P(iy) = &\left(-2y^2 + 4y\right) \\ &+ i\big(-y^3 + 2y^2 \\ &+ 10y - 20\big). \end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité demandée est établie. Comme y est réel, les deux parenthèses sont la partie réelle et la partie imaginaire de $P(iy)$.

2.

En déduire que l'équation $P(z) = 0$ a une unique solution imaginaire pure, que l'on déterminera.

INDICE

Par unicité de la forme algébrique, $P(iy) = 0$ équivaut à deux équations réelles. Commence par la plus simple, la partie réelle : factorise-la. Teste ensuite chaque valeur trouvée dans la partie imaginaire.

CORRIGÉ

Soit $y \in \mathbb{R}$. Par unicité de la forme algébrique, $P(iy) = 0$ si et seulement si :

- partie réelle : $-2y^2 + 4y = 0$;
- partie imaginaire : $-y^3 + 2y^2 + 10y - 20 = 0$.

Partie réelle. $-2y^2 + 4y = -2y(y-2)$: la première condition équivaut à $y = 0$ ou $y = 2$.

Cas $y = 0$. La partie imaginaire vaut $-20 \neq 0$: le nombre 0 n'est pas solution.

Cas $y = 2$. La partie imaginaire vaut $-8 + 8 + 20 - 20 = 0$: le nombre $2i$ est solution.

Conclusion. Les deux cas épuisent les possibilités : $2i$ est l'unique solution imaginaire pure de $P(z) = 0$.

3.

Détermine les nombres complexes β et γ tels que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = (z - 2i)\left(z^2 + \beta z + \gamma\right)$.

INDICE

Comme $P(2i) = 0$, utilise la factorisation par une solution connue : $\beta = az_0 + b$ et $\gamma = az_0^2 + bz_0 + c$. Ici $a = 1$ et $z_0 = 2i$. Tu peux aussi développer le produit et identifier.

CORRIGÉ

On a $P(2i) = 0$ et le coefficient de z^3 vaut $a = 1 \neq 0$. On applique la factorisation par une solution connue $z_0 = 2i$, avec $b = 2 - 2i$ et $c = 10 - 4i$.

Calcul de β.

$$\beta = 2i + 2 - 2i = 2.$$

Calcul de γ.

$$\begin{aligned}\gamma &= (2i)^2 + (2 - 2i)(2i) \\ &\quad + 10 - 4i \\ &= -4 + 4i + 4 + 10 - 4i \\ &= 10.\end{aligned}$$

Contrôle. Le terme constant du produit vaut $(-2i) \times 10 = -20i$, comme celui de P.

Conclusion. $\beta = 2$, $\gamma = 10$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - 2i)\left(z^2 + 2z + 10\right)$.

4.

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

INDICE

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Le second facteur est à coefficients réels : calcule son discriminant. Il est négatif : applique le théorème du second degré à coefficients réels avec $\sqrt{-\Delta}$.

CORRIGÉ

D'après la règle du produit nul, $P(z) = 0$ si et seulement si $z - 2i = 0$ ou $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Premier facteur. Il s'annule en $2i$.

Second facteur. Il est à coefficients réels, et :

$$\Delta = 4 - 40 = -36 < 0.$$

Avec $\sqrt{-\Delta} = 6$, le théorème du second degré à coefficients réels donne deux solutions conjuguées :

$$\frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i,$$
$$\frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i.$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de $P(z) = 0$ est $\{2i, -1 - 3i, -1 + 3i\}$.

Exercice 6

Inégalité triangulaire : récurrence et absurde

On rappelle l'inégalité triangulaire : pour tous nombres complexes z et z', $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

1.

Montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$ et tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$, on a $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$.

INDICE

L'initialisation $n = 2$ est l'inégalité rappelée. Pour l'hérédité, regroupe les n premiers termes : $z_1 + \cdots + z_{n+1} = S + z_{n+1}$. Applique l'inégalité triangulaire à S et z_{n+1} avant d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 2$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : pour tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$,

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Initialisation. $\mathcal{P}(2)$ est l'inégalité triangulaire rappelée.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et soient $z_1, \ldots, z_{n+1}$ des nombres complexes. Posons $S = z_1 + \cdots + z_n$. D'après l'inégalité triangulaire, puis $\mathcal{P}(n)$:

$$\begin{aligned} |S + z_{n+1}| &\leq |S| + |z_{n+1}| \\ &\leq |z_1| + \cdots + |z_n| \\ &\quad + |z_{n+1}|. \end{aligned}$$

Comme $S + z_{n+1} = z_1 + \cdots + z_{n+1}$, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

2.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| \leq 1$. Montre que $|z^3 + z^2 + z| \leq 3$.

INDICE

Applique le résultat précédent avec $n = 3$. Calcule ensuite chaque $|z^k|$ grâce au module d'une puissance. L'hypothèse $|z| \leq 1$ sert à majorer chaque terme.

CORRIGÉ

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$.

Inégalité à trois termes. D'après la question 1 avec $n = 3$:

$$|z^3 + z^2 + z| \leq |z^3| + |z^2| + |z|.$$

Majoration de chaque terme. D'après le module d'une puissance, $|z^k| = |z|^k$. Comme $0 \leq |z| \leq 1$, on a $|z|^k \leq 1$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

Conclusion. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| \leq 1$, on a $|z^3 + z^2 + z| \leq 3$.

3.

Montre par l'absurde que l'équation $z^3+z^2+z+4=0$ n'a aucune solution z telle que $|z|\leq 1$.

INDICE

Suppose qu'une telle solution z existe. Isole le nombre 4 dans l'équation, puis prends les modules des deux membres. Compare avec la majoration de la question 2.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde qu'il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leq 1$ et $z^3+z^2+z+4=0$.

Modules des deux membres. Alors $4=-\left(z^3+z^2+z\right)$, donc :

$$4=|z^3+z^2+z|.$$

Contradiction. D'après la question 2, $|z^3+z^2+z|\leq 3$. On obtient $4\leq 3$: contradiction.

Conclusion. L'équation $z^3+z^2+z+4=0$ n'a aucune solution z telle que $|z|\leq 1$.