BURHAN

Nombres complexes : calcul et équations : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : calcul et équations	Application	8

Exercice 1

Forme algébrique : produits et puissances

Chaque résultat est attendu sous la forme $a + ib$, avec a et b réels.

1.

Écris sous forme algébrique $z_1 = (2 - 3i)(4 + i)$.

INDICE

Développe comme dans $\mathbb{R}$: quatre produits. Commence par 2×4 et $2 \times i$. Le point délicat est le produit $-3i \times i$: remplace i^2 par -1.

2.

Écris sous forme algébrique $z_2 = (2 + 5i)^2$.

INDICE

L'identité $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ reste vraie dans $\mathbb{C}$. Prends $u = 2$ et $v = 5i$. Attention au dernier terme : $(5i)^2 = 25\,i^2$.

3.

Calcule i^3 et i^4, puis écris $z_3 = i^{11}$ sous forme algébrique.

INDICE

Écris $i^3 = i^2 \times i$ et $i^4 = \left(i^2\right)^2$. Pour i^{11}, fais la division euclidienne de 11 par 4. Le reste te dit quelle puissance de i il reste à calculer.

4.

Soit x un réel et $u = (x + 2i)(1 - i)$. Détermine x pour que u soit un nombre réel.

INDICE

Mets d'abord u sous la forme $a + ib$ avec a et b réels. Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle. Point délicat : vérifie que les deux parties trouvées sont bien réelles avant de les nommer.

Exercice 2

Quotients et inverse par le conjugué

On rappelle que pour tous réels a et b, $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$.

1.

Écris sous forme algébrique $\dfrac{7+i}{2-i}$.

INDICE

Le dénominateur $2-i$ est non nul. Multiplie le numérateur et le dénominateur par son conjugué $2+i$. Le dénominateur devient alors un réel strictement positif.

2.

Écris sous forme algébrique $w = \dfrac{5-i}{1+3i}$.

INDICE

Même méthode : le conjugué de $1+3i$ est $1-3i$. Le nouveau dénominateur vaut 1^2+3^2. Dans le numérateur, n'oublie pas le terme $-i \times (-3i)$.

3.

Montre que $v = \dfrac{4+6i}{3-2i}$ est un imaginaire pur.

INDICE

Écris v sous forme algébrique avec la même méthode. Un imaginaire pur a une partie réelle nulle. Regarde bien la partie réelle du numérateur après développement.

4.

Écris l'inverse de $s = -1+2i$ sous forme algébrique.

INDICE

Le nombre s est non nul. Écris $\dfrac{1}{s}$, puis multiplie en haut et en bas par $\overline{s}$. Le dénominateur est $s\,\overline{s}$.

Exercice 3

Conjugué : calculs et preuves courtes

Dans tout l'exercice, $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

1.

Soit $z = -2 + 7i$. Donne $\overline{z}$, puis calcule $z + \overline{z}$ et $z\,\overline{z}$.

INDICE

Le conjugué change le signe de la partie imaginaire seulement. Pour la somme, pense à $2\,\mathrm{Re}(z)$. Pour le produit, utilise $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$.

2.

Montre que, pour tout nombre complexe z, le nombre $A = z^2 + \overline{z}^2$ est réel.

INDICE

Calcule $\overline{A}$ avec les propriétés du conjugué : conjugué d'une somme, puis d'une puissance. Le point délicat est le conjugué de $\overline{z}^2$: utilise $\overline{\overline{z}} = z$.

3.

Soient z et w deux nombres complexes. Montre que $B = z\,\overline{w} - \overline{z}\,w$ est un imaginaire pur.

INDICE

Calcule $\overline{B}$: conjugué d'une différence, puis d'un produit. Compare ensuite $\overline{B}$ à $-B$. Rappelle-toi qu'un imaginaire pur est caractérisé par $\overline{B} = -B$.

4.

Soit z un nombre complexe non nul et $C = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}$. Justifie que C est bien défini, puis montre que C est réel.

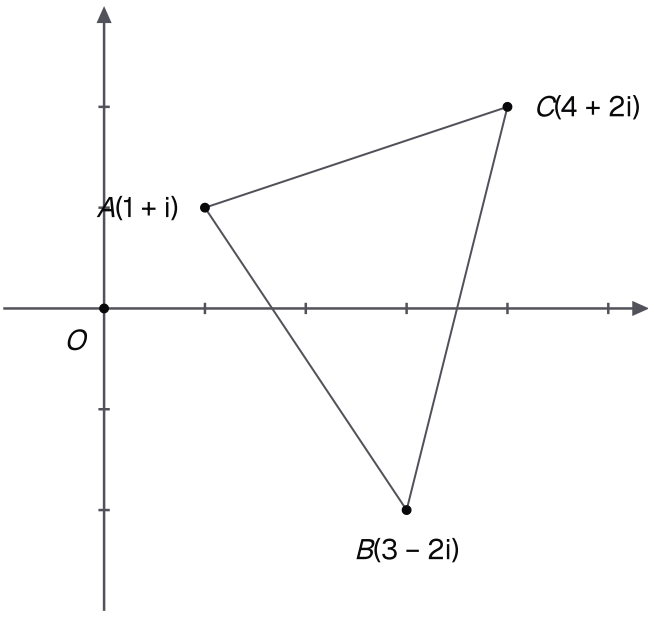
INDICE

Pour diviser par $\overline{z}$, il faut $\overline{z} \neq 0$: relie $\overline{z}$ et z. Ensuite, applique le conjugué d'un quotient à chacun des deux termes. Compare l'expression obtenue à C.

Exercice 4

Affixes de points et de vecteurs, distances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 - 2i$ et $z_C = 4 + 2i$.



Les trois points de l'énoncé placés dans le plan complexe.

1.

Calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'affixe du milieu K du segment $[BC]$. Que remarques-tu sur K ?

INDICE

L'affixe d'un vecteur se lit « extrémité moins origine ». Celle d'un milieu est la demi-somme des affixes des extrémités. Regarde ensuite où se trouve le point K dans le repère.

2.

Détermine l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

INDICE

$ABCD$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Deux vecteurs sont égaux exactement quand leurs affixes le sont. Écris cette égalité, puis isole z_D.

3.

Calcule les distances AB et AC.

INDICE

La distance de deux points est le module de la différence de leurs affixes. Pour AB, tu as déjà $z_B - z_A$. Le module de $a + ib$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

4.

Le point E d'affixe $1+4i$ appartient-il au cercle de centre A et de rayon 3 ?

INDICE

Un point M est sur ce cercle si et seulement si $AM = 3$. Calcule donc $|z_E - z_A|$. Le nombre $z_E - z_A$ est très simple.

Exercice 5

Module : calculer sans développer

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1.

Calcule le module de $z = \dfrac{(2-i)^3(1+3i)}{(1+2i)^2}$, sans développer.

INDICE

Calcule d'abord les modules de $2-i$, $1+3i$ et $1+2i$. Puis applique les règles : module d'un produit, d'une puissance, d'un quotient. Vérifie que le dénominateur est non nul.

2.

Soit z un élément de $\mathbb{U}$. Montre que $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$.

INDICE

Écris chaque carré de module comme un produit par le conjugué : $|w|^2 = w\,\overline{w}$. Développe $(1+z)(1+\overline{z})$. L'hypothèse sert à un seul endroit : remplace $z\,\overline{z}$.

3.

Compare $|(1+2i)+(1-2i)|$ et $|1+2i| + |1-2i|$. Quelle erreur cet exemple permet-il d'éviter ?

INDICE

Calcule d'abord la somme $(1+2i)+(1-2i)$, puis son module. Calcule ensuite chacun des deux modules. Compare avec l'inégalité triangulaire.

Exercice 6

Forme trigonométrique et argument

Pour chaque nombre non nul, donne une forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$.

1.

$z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$.

INDICE

Calcule $r = |z_1|$, puis $\dfrac{-2\sqrt{3}}{r}$ et $\dfrac{-2}{r}$. Cherche un angle dont ce sont le cosinus et le sinus. Les deux sont négatifs : l'angle est dans le troisième quart du cercle.

2.

$z_2 = 3 - 3i$.

INDICE

Le module vaut $\sqrt{3^2 + 3^2}$. Mets-le en facteur. Le cosinus et le sinus cherchés sont opposés : place le point sur le cercle trigonométrique pour trouver le quadrant.

3.

$z_3 = -5i$.

INDICE

Le module d'un imaginaire pur bi est $|b|$. Mets ce module en facteur. Il reste $-i$: quel angle a pour cosinus 0 et pour sinus -1 ?

4.

Soit $u = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$. Explique pourquoi cette écriture n'est pas une forme trigonométrique de u, puis donne une forme trigonométrique de u.

INDICE

Regarde le signe du facteur placé devant la parenthèse. Écris -1 comme $\cos\pi + i\sin\pi$. Utilise ensuite $\cos(a+\pi) = -\cos a$ et $\sin(a+\pi) = -\sin a$.

5.

Peut-on donner un argument du nombre $z_1 + \overline{z_1} + 4\sqrt{3}$?

INDICE

Calcule d'abord $z_1 + \overline{z_1}$, qui vaut $2\,\mathrm{Re}(z_1)$. Ajoute ensuite $4\sqrt{3}$. Avant d'écrire un argument, vérifie une condition sur le nombre obtenu.

Exercice 7

Notation exponentielle et formule de Moivre

On pose $u = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{-i\frac{\pi}{10}}$.

1.

Donne une forme exponentielle de uv.

INDICE

Multiplie les modules entre eux. Pour les exponentielles, utilise $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$. Attention au signe de l'angle de v.

2.

Donne une forme exponentielle de $\dfrac{u}{v}$ et de $\overline{u}$.

INDICE

Pour le quotient, divise les modules et soustrais les angles. Soustraire un angle négatif revient à ajouter. Pour le conjugué, souviens-toi que $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$.

3.

Calcule u^5 et écris le résultat sous forme algébrique.

INDICE

Élève le module à la puissance 5. Pour l'exponentielle, applique la formule de Moivre. Il reste à reconnaître $e^{i\pi}$.

4.

Calcule $\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^{12}$ sous forme algébrique.

INDICE

La formule de Moivre s'applique directement : l'angle est multiplié par 12. Simplifie $\dfrac{12\pi}{8}$. Lis ensuite le cosinus et le sinus de l'angle obtenu.

Exercice 8

Racines carrées et équation à coefficients réels

On rappelle que la notation $\sqrt{x}$ est réservée aux réels positifs.

1.

Détermine les racines carrées de $Z = 15 - 8i$ sous forme algébrique.

INDICE

Cherche $\delta = x + iy$ avec x et y réels. Écris $x^2 - y^2$ et $2xy$, puis ajoute l'égalité des modules $x^2 + y^2 = |Z|$. Le signe de $2xy$ fixe les signes de x et de y.

2.

Détermine les racines carrées de $W = 9e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

INDICE

Utilise le théorème des racines carrées d'un nombre non nul écrit $re^{i\theta}$ avec $r > 0$. Prends la racine carrée du module. Divise l'angle par 2.

3.

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 29 = 0$.

INDICE

Les coefficients sont réels : calcule Δ et regarde son signe. Si $\Delta < 0$, écris Δ comme le carré d'un imaginaire pur. Ne prends jamais le radical d'un nombre négatif.

4.

Déduis-en une factorisation de $z^2 + 4z + 29$ pour tout z de $\mathbb{C}$, puis vérifie-la.

INDICE

Le même théorème donne la factorisation $a(z - z_1)(z - z_2)$. Ici $a = 1$. Pour vérifier, regroupe $z + 2$ et utilise $(z + 2)^2 - (5i)^2$.