BURHAN

Nombres complexes : calcul et équations : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : calcul et équations	Application	8

Exercice 1

Forme algébrique : produits et puissances

Chaque résultat est attendu sous la forme $a + ib$, avec a et b réels.

1.

Écris sous forme algébrique $z_1 = (2 - 3i)(4 + i)$.

INDICE

Développe comme dans $\mathbb{R}$: quatre produits. Commence par 2×4 et $2 \times i$. Le point délicat est le produit $-3i \times i$: remplace i^2 par -1.

CORRIGÉ

On développe avec les règles de calcul de $\mathbb{C}$, puis on remplace i^2 par -1 :

$$\begin{aligned} z_1 &= 8 + 2i - 12i - 3i^2 \\ &= 8 - 10i + 3 \\ &= 11 - 10i. \end{aligned}$$

Conclusion. $z_1 = 11 - 10i$: sa partie réelle vaut 11 et sa partie imaginaire vaut -10.

2.

Écris sous forme algébrique $z_2 = (2 + 5i)^2$.

INDICE

L'identité $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ reste vraie dans $\mathbb{C}$. Prends $u = 2$ et $v = 5i$. Attention au dernier terme : $(5i)^2 = 25\,i^2$.

CORRIGÉ

L'identité $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ reste vraie dans $\mathbb{C}$. Avec $u = 2$ et $v = 5i$:

$$\begin{aligned} z_2 &= 2^2 + 2 \times 2 \times 5i + (5i)^2 \\ &= 4 + 20i + 25i^2 \\ &= 4 + 20i - 25. \end{aligned}$$

Conclusion. $z_2 = -21 + 20i$.

3.

Calcule i^3 et i^4, puis écris $z_3 = i^{11}$ sous forme algébrique.

INDICE

Écris $i^3 = i^2 \times i$ et $i^4 = \left(i^2\right)^2$. Pour i^{11}, fais la division euclidienne de 11 par 4. Le reste te dit quelle puissance de i il reste à calculer.

CORRIGÉ

Puissances 3 et 4. Comme $i^2 = -1$:

$$i^3 = i^2 \times i = -i,$$

$$i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Puissance 11. La division euclidienne de 11 par 4 s'écrit $11 = 4 \times 2 + 3$. Donc :

$$\begin{aligned} i^{11} &= \left(i^4\right)^2 \times i^3 \\ &= 1 \times (-i). \end{aligned}$$

Conclusion. $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ et $z_3 = -i$: la partie réelle de z_3 est nulle, c'est un imaginaire pur.

4.

Soit x un réel et $u = (x + 2i)(1 - i)$. Détermine x pour que u soit un nombre réel.

INDICE

Mets d'abord u sous la forme $a + ib$ avec a et b réels. Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle. Point délicat : vérifie que les deux parties trouvées sont bien réelles avant de les nommer.

CORRIGÉ

Forme algébrique de u. On développe :

$$\begin{aligned} u &= x - xi + 2i - 2i^2 \\ &= (x + 2) + (2 - x)i. \end{aligned}$$

Comme x est réel, $x + 2$ et $2 - x$ sont réels. Par l'unicité de la forme algébrique, $\mathrm{Re}(u) = x + 2$ et $\mathrm{Im}(u) = 2 - x$.

Condition. Le nombre u est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

$$2 - x = 0 \iff x = 2.$$

Contrôle. Pour $x = 2$, on trouve $u = (2 + 2i)(1 - i) = 4$.

Conclusion. u est un nombre réel si et seulement si $x = 2$, et alors $u = 4$.

Exercice 2

Quotients et inverse par le conjugué

On rappelle que pour tous réels a et b, $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.

1.

Écris sous forme algébrique $\dfrac{7+i}{2-i}$.

INDICE

Le dénominateur $2-i$ est non nul. Multiplie le numérateur et le dénominateur par son conjugué $2+i$. Le dénominateur devient alors un réel strictement positif.

CORRIGÉ

Le dénominateur $2-i$ est non nul. On multiplie le numérateur et le dénominateur par son conjugué $2+i$.

Dénominateur. $(2-i)(2+i)=2^2+1^2=5$.

Numérateur. Posons $N=(7+i)(2+i)$:

$$\begin{aligned} N &= 14+7i+2i+i^2 \\ &= 13+9i. \end{aligned}$$

Conclusion.

$$\frac{7+i}{2-i}=\frac{13}{5}+\frac{9}{5}i.$$

2.

Écris sous forme algébrique $w=\dfrac{5-i}{1+3i}$.

INDICE

Même méthode : le conjugué de $1+3i$ est $1-3i$. Le nouveau dénominateur vaut 1^2+3^2. Dans le numérateur, n'oublie pas le terme $-i\times(-3i)$.

CORRIGÉ

Comme $1+3i\neq 0$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $1-3i$. Le dénominateur devient $1^2+3^2=10$.

Numérateur. Posons $N=(5-i)(1-3i)$:

$$\begin{aligned} N &= 5-15i-i+3i^2 \\ &= 2-16i. \end{aligned}$$

Conclusion.

$$\begin{aligned} w &= \frac{2-16i}{10} \\ &= \frac{1}{5}-\frac{8}{5}i. \end{aligned}$$

3.

Montre que $v = \dfrac{4+6i}{3-2i}$ est un imaginaire pur.

INDICE

Écris v sous forme algébrique avec la même méthode. Un imaginaire pur a une partie réelle nulle. Regarde bien la partie réelle du numérateur après développement.

CORRIGÉ

Comme $3-2i \neq 0$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $3+2i$. Le dénominateur devient $3^2+2^2=13$.

Numérateur. Posons $N=(4+6i)(3+2i)$:

$$\begin{aligned} N &= 12+8i+18i+12i^2 \\ &= 0+26i. \end{aligned}$$

Donc :

$$v = \frac{26i}{13} = 2i.$$

Conclusion. La partie réelle de v est nulle : v est un imaginaire pur.

4.

Écris l'inverse de $s=-1+2i$ sous forme algébrique.

INDICE

Le nombre s est non nul. Écris $\dfrac{1}{s}$, puis multiplie en haut et en bas par $\overline{s}$. Le dénominateur est $s\,\overline{s}$.

CORRIGÉ

Le nombre s est non nul, car sa partie imaginaire vaut 2. Son conjugué est $\overline{s}=-1-2i$, et :

$$s\,\overline{s} = (-1)^2+2^2 = 5.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1}{s}$ par $\overline{s}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &= \frac{\overline{s}}{s\,\overline{s}} = \frac{-1-2i}{5} \\ &= -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i. \end{aligned}$$

Conclusion. L'inverse de s est $-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$.

Exercice 3

Conjugué : calculs et preuves courtes

Dans tout l'exercice, $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

1.

Soit $z = -2 + 7i$. Donne $\overline{z}$, puis calcule $z + \overline{z}$ et $z\,\overline{z}$.

INDICE

Le conjugué change le signe de la partie imaginaire seulement. Pour la somme, pense à $2\,\mathrm{Re}(z)$. Pour le produit, utilise $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$.

CORRIGÉ

Le conjugué change le signe de la partie imaginaire : $\overline{z} = -2 - 7i$.

Somme. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = -4$.

Produit. $z\,\overline{z} = (-2)^2 + 7^2 = 4 + 49 = 53$.

Conclusion. $\overline{z} = -2 - 7i$, $z + \overline{z} = -4$ et $z\,\overline{z} = 53$. Ces deux derniers nombres sont réels, comme pour tout nombre complexe z.

2.

Montre que, pour tout nombre complexe z, le nombre $A = z^2 + \overline{z}^2$ est réel.

INDICE

Calcule $\overline{A}$ avec les propriétés du conjugué : conjugué d'une somme, puis d'une puissance. Le point délicat est le conjugué de $\overline{z}^2$: utilise $\overline{\overline{z}} = z$.

CORRIGÉ

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour montrer que A est réel, on montre que $\overline{A} = A$.

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, celui d'une puissance est la puissance du conjugué, et $\overline{\overline{z}} = z$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overline{z^2} + \overline{\overline{z}^2} \\ &= \overline{z}^2 + \left(\overline{\overline{z}}\right)^2 \\ &= \overline{z}^2 + z^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{A} = A$. Un nombre complexe égal à son conjugué est réel.

Conclusion. Pour tout nombre complexe z, le nombre $A = z^2 + \overline{z}^2$ est réel.

3.

Soient z et w deux nombres complexes. Montre que $B = z\,\overline{w} - \overline{z}\,w$ est un imaginaire pur.

INDICE

Calcule $\overline{B}$: conjugué d'une différence, puis d'un produit. Compare ensuite $\overline{B}$ à $-B$. Rappelle-toi qu'un imaginaire pur est caractérisé par $\overline{B} = -B$.

CORRIGÉ

Soient z et w deux nombres complexes. Un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement s'il est égal à l'opposé de son conjugué : on montre que $\overline{B} = -B$.

Par les propriétés du conjugué (différence, produit) :

$$\begin{aligned}\overline{B} &= \overline{z}\,\overline{\overline{w}} - \overline{\overline{z}}\,\overline{w} \\ &= \overline{z}\,w - z\,\overline{w} \\ &= -B.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overline{B} = -B$: le nombre $B = z\,\overline{w} - \overline{z}\,w$ est imaginaire pur.

4.

Soit z un nombre complexe non nul et $C = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}$. Justifie que C est bien défini, puis montre que C est réel.

INDICE

Pour diviser par $\overline{z}$, il faut $\overline{z} \neq 0$: relie $\overline{z}$ et z. Ensuite, applique le conjugué d'un quotient à chacun des deux termes. Compare l'expression obtenue à C.

CORRIGÉ

C est bien défini. Si l'on avait $\overline{z} = 0$, on aurait $z = \overline{\overline{z}} = \overline{0} = 0$, ce qui est exclu. Donc $\overline{z} \neq 0$: les deux dénominateurs $\overline{z}$ et z sont non nuls.

C est réel. Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués :

$$\begin{aligned}\overline{C} &= \frac{\overline{z}}{\overline{\overline{z}}} + \frac{\overline{\overline{z}}}{\overline{z}} \\ &= \frac{\overline{z}}{z} + \frac{z}{\overline{z}}.\end{aligned}$$

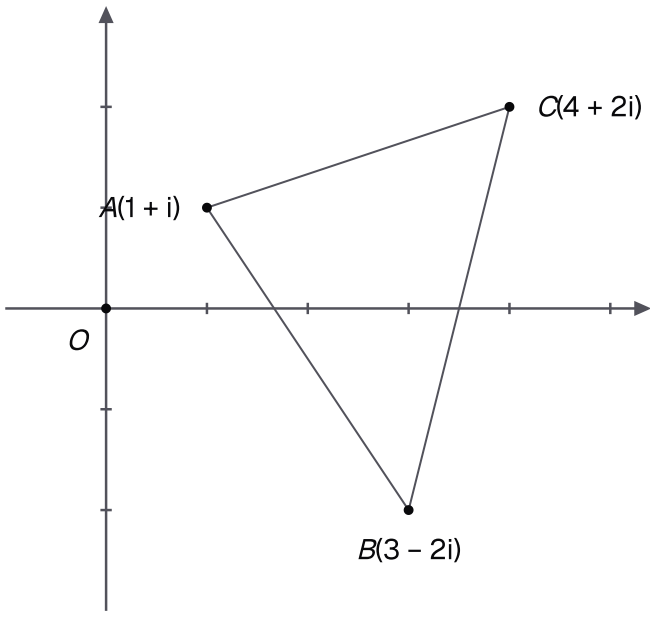
On reconnaît C : $\overline{C} = C$.

Conclusion. C est bien défini et égal à son conjugué : C est réel.

Exercice 4

Affixes de points et de vecteurs, distances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 - 2i$ et $z_C = 4 + 2i$.



Les trois points de l'énoncé placés dans le plan complexe.

1.

Calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'affixe du milieu K du segment $[BC]$. Que remarques-tu sur K ?

INDICE

L'affixe d'un vecteur se lit « extrémité moins origine ». Celle d'un milieu est la demi-somme des affixes des extrémités. Regarde ensuite où se trouve le point K dans le repère.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{AB}$. L'affixe d'un vecteur est l'affixe de l'extrémité moins celle de l'origine :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= (3 - 2i) - (1 + i) \\ &= 2 - 3i. \end{aligned}$$

Milieu K. L'affixe du milieu est la demi-somme des affixes :

$$\begin{aligned} z_K &= \frac{z_B + z_C}{2} \\ &= \frac{(3 - 2i) + (4 + 2i)}{2} \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $2 - 3i$ et K a pour affixe $\dfrac{7}{2}$. Ce nombre est réel : K est sur l'axe des abscisses.

2.

Détermine l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

INDICE

$ABCD$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Deux vecteurs sont égaux exactement quand leurs affixes le sont. Écris cette égalité, puis isole z_D.

CORRIGÉ

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. L'égalité de deux vecteurs se traduit par l'égalité de leurs affixes ; la condition s'écrit :

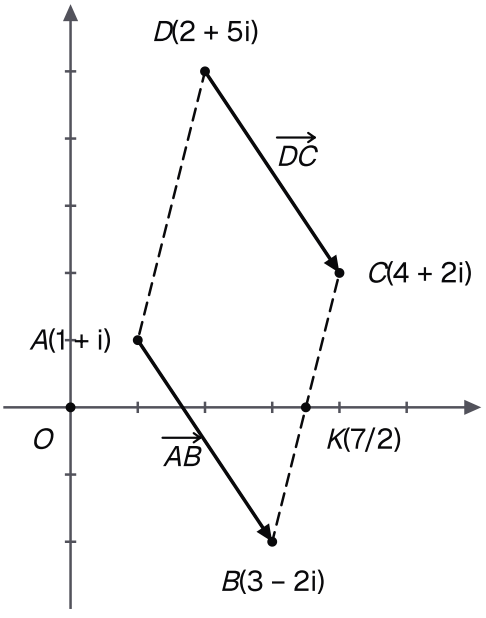
$$z_B - z_A = z_C - z_D.$$

On isole z_D :

$$\begin{aligned} z_D &= z_A + z_C - z_B \\ &= (1+i) + (4+2i) \\ &\quad - (3-2i) \\ &= 2 + 5i. \end{aligned}$$

Contrôle. $z_D - z_A = 1 + 4i = z_C - z_B$.

Conclusion. $ABCD$ est un parallélogramme lorsque D a pour affixe $z_D = 2 + 5i$.



Le parallélogramme ABCD obtenu par l'égalité des vecteurs AB et DC, et le milieu K de [BC] posé sur l'axe réel.

3.

Calcule les distances AB et AC.

INDICE

La distance de deux points est le module de la différence de leurs affixes. Pour AB, tu as déjà $z_B - z_A$. Le module de $a + ib$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

CORRIGÉ

La distance de deux points est le module de la différence de leurs affixes.

Distance AB. D'après la question 1, $z_B - z_A = 2 - 3i$, donc :

$$\begin{aligned} AB &= |2 - 3i| \\ &= \sqrt{4 + 9}. \end{aligned}$$

Distance AC. On a $z_C - z_A = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i$, donc :

$$\begin{aligned} AC &= |3 + i| \\ &= \sqrt{9 + 1}. \end{aligned}$$

Conclusion. $AB = \sqrt{13}$ et $AC = \sqrt{10}$.

4.

Le point E d'affixe $1+4i$ appartient-il au cercle de centre A et de rayon 3 ?

INDICE

Un point M est sur ce cercle si et seulement si $AM = 3$. Calcule donc $|z_E - z_A|$. Le nombre $z_E - z_A$ est très simple.

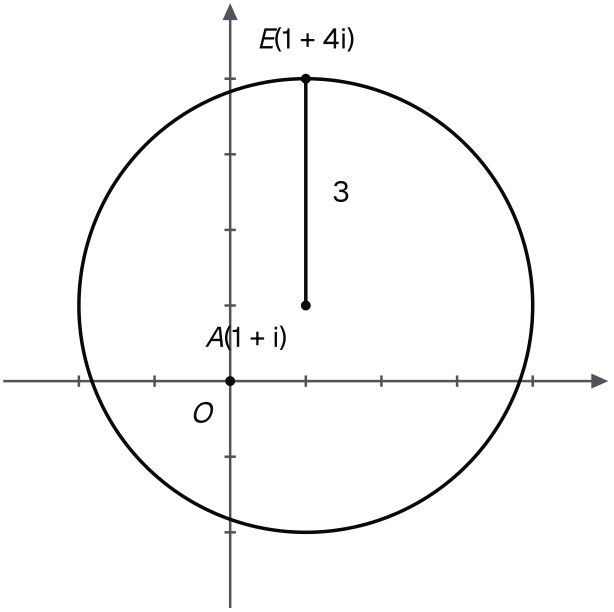
CORRIGÉ

Un point M appartient au cercle de centre A et de rayon 3 si et seulement si $AM = 3$.

On a $z_E - z_A = (1+4i) - (1+i) = 3i$, donc :

$$AE = |3i| = 3.$$

Conclusion. Le point E est à la distance 3 de A : il appartient au cercle de centre A et de rayon 3.



Le point E est à la distance 3 de A : il se trouve sur le cercle de centre A et de rayon 3.

Exercice 5

Module : calculer sans développer

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1.

Calcule le module de $z = \dfrac{(2-i)^3(1+3i)}{(1+2i)^2}$, sans développer.

INDICE

Calcule d'abord les modules de $2-i$, $1+3i$ et $1+2i$. Puis applique les règles : module d'un produit, d'une puissance, d'un quotient. Vérifie que le dénominateur est non nul.

CORRIGÉ

Modules des facteurs. $|2-i| = \sqrt{5}$, $|1+3i| = \sqrt{10}$ et $|1+2i| = \sqrt{5}$. En particulier $1+2i \neq 0$: le quotient est bien défini.

Règles du module. Le module d'un produit, d'une puissance ou d'un quotient est le produit, la puissance ou le quotient des modules :

$$\begin{aligned} |z| &= \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3 \sqrt{10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{5}\,\sqrt{10} \\ &= \sqrt{50}. \end{aligned}$$

Conclusion. $|z| = 5\sqrt{2}$.

2.

Soit z un élément de $\mathbb{U}$. Montre que $|1+z|^2+|1-z|^2=4$.

INDICE

Écris chaque carré de module comme un produit par le conjugué : $|w|^2 = w\,\overline{w}$. Développe $(1+z)(1+\overline{z})$. L'hypothèse sert à un seul endroit : remplace $z\,\overline{z}$.

CORRIGÉ

Soit $z \in \mathbb{U}$: on a $z\,\overline{z} = |z|^2 = 1$. On utilise $|w|^2 = w\,\overline{w}$, valable pour tout nombre complexe w, et le conjugué d'une somme.

Premier carré.

$$\begin{aligned} |1+z|^2 &= (1+z)(1+\overline{z}) \\ &= 1 + z + \overline{z} + z\,\overline{z} \\ &= 2 + z + \overline{z}. \end{aligned}$$

Second carré. De même :

$$\begin{aligned} |1-z|^2 &= (1-z)(1-\overline{z}) \\ &= 2 - z - \overline{z}. \end{aligned}$$

Conclusion. En ajoutant les deux égalités, pour tout $z \in \mathbb{U}$:

$$|1+z|^2+|1-z|^2=4.$$

3.

Compare $|(1+2i)+(1-2i)|$ et $|1+2i|+|1-2i|$. Quelle erreur cet exemple permet-il d'éviter ?

INDICE

Calcule d'abord la somme $(1+2i)+(1-2i)$, puis son module. Calcule ensuite chacun des deux modules. Compare avec l'inégalité triangulaire.

CORRIGÉ

Module de la somme. On a $(1+2i)+(1-2i)=2$, nombre de module 2.

Somme des modules. On a $|1+2i| = |1-2i| = \sqrt{5}$, donc :

$$|1+2i|+|1-2i| = 2\sqrt{5}.$$

Conclusion. Comme $2 < 2\sqrt{5}$, ajouter les modules des termes ne donne pas le module de leur somme. L'erreur à éviter est de calculer le module d'une somme terme à terme : on a seulement l'inégalité triangulaire, stricte ici.

Exercice 6

Forme trigonométrique et argument

Pour chaque nombre non nul, donne une forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$.

1.

$z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$.

INDICE

Calcule $r = |z_1|$, puis $\dfrac{-2\sqrt{3}}{r}$ et $\dfrac{-2}{r}$. Cherche un angle dont ce sont le cosinus et le sinus. Les deux sont négatifs : l'angle est dans le troisième quart du cercle.

CORRIGÉ

Module. $|z_1| = \sqrt{12+4} = 4$; en particulier $z_1 \neq 0$.

Mise en facteur.

$$z_1 = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$

Angle. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Comme $4 > 0$, une forme trigonométrique de z_1 est :

$$z_1 = 4\Big(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\Big),$$

et $\arg z_1 \equiv -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

2.

$z_2 = 3 - 3i$.

INDICE

Le module vaut $\sqrt{3^2+3^2}$. Mets-le en facteur. Le cosinus et le sinus cherchés sont opposés : place le point sur le cercle trigonométrique pour trouver le quadrant.

CORRIGÉ

Module. $|z_2| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Mise en facteur.

$$z_2 = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Angle. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Conclusion. Comme $3\sqrt{2} > 0$, une forme trigonométrique de z_2 est :

$$z_2 = 3\sqrt{2}\Big(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Big),$$

et $\arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

3.

$z_3 = -5i$.

INDICE

Le module d'un imaginaire pur bi est $|b|$. Mets ce module en facteur. Il reste $-i$: quel angle a pour cosinus 0 et pour sinus -1 ?

CORRIGÉ

Module. $|z_3| = 5$ et $z_3 = 5(0 - i)$.

Angle. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Conclusion. Comme $5 > 0$, une forme trigonométrique de z_3 est :

$$z_3 = 5\Big(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Big),$$

et $\arg z_3 \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

4.

Soit $u = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$. Explique pourquoi cette écriture n'est pas une forme trigonométrique de u, puis donne une forme trigonométrique de u.

INDICE

Regarde le signe du facteur placé devant la parenthèse. Écris -1 comme $\cos\pi + i\sin\pi$. Utilise ensuite $\cos(a+\pi) = -\cos a$ et $\sin(a+\pi) = -\sin a$.

CORRIGÉ

Pourquoi l'écriture ne convient pas. Une forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ exige $r > 0$; ici le facteur vaut $-2 < 0$.

Absorption du signe. Pour tout réel a, $\cos(a+\pi) = -\cos a$ et $\sin(a+\pi) = -\sin a$. Avec $a = \dfrac{\pi}{7}$ et $\dfrac{\pi}{7} + \pi = \dfrac{8\pi}{7}$:

$$\begin{aligned} u &= 2\left(-\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. L'écriture proposée a un facteur négatif. Une forme trigonométrique de u est $2\left(\cos\dfrac{8\pi}{7} + i\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)$: $|u| = 2$ et $\arg u \equiv \dfrac{8\pi}{7}\ [2\pi]$.

5.

Peut-on donner un argument du nombre $z_1 + \overline{z_1} + 4\sqrt{3}$?

INDICE

Calcule d'abord $z_1 + \overline{z_1}$, qui vaut $2\,\mathrm{Re}(z_1)$. Ajoute ensuite $4\sqrt{3}$. Avant d'écrire un argument, vérifie une condition sur le nombre obtenu.

CORRIGÉ

On a $z_1 + \overline{z_1} = 2\,\mathrm{Re}(z_1) = -4\sqrt{3}$, donc :

$$z_1 + \overline{z_1} + 4\sqrt{3} = 0.$$

Conclusion. Le nombre 0 n'a pas d'argument : la réponse est non.

Exercice 7

Notation exponentielle et formule de Moivre

On pose $u = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{-i\frac{\pi}{10}}$.

1.

Donne une forme exponentielle de uv.

INDICE

Multiplie les modules entre eux. Pour les exponentielles, utilise $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$. Attention au signe de l'angle de v.

CORRIGÉ

D'après la règle du produit en notation exponentielle, on multiplie les modules et on ajoute les angles :

$$\begin{aligned} uv &= 2 \times 3 \times e^{i\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10}\right)} \\ &= 6e^{i\frac{\pi}{10}}, \end{aligned}$$

car $\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\pi}{10}$.

Conclusion. $uv = 6e^{i\frac{\pi}{10}}$.

2.

Donne une forme exponentielle de $\dfrac{u}{v}$ et de $\overline{u}$.

INDICE

Pour le quotient, divise les modules et soustrais les angles. Soustraire un angle négatif revient à ajouter. Pour le conjugué, souviens-toi que $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$.

CORRIGÉ

Quotient. Comme $v \neq 0$, la règle du quotient divise les modules et soustrait les angles :

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10}\right)} \\ &= \frac{2}{3}e^{i\frac{3\pi}{10}}. \end{aligned}$$

Conjugué. Le facteur 2 est réel et, pour tout réel a, $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$. Donc $\overline{u} = 2\,\overline{e^{i\frac{\pi}{5}}}$.

Conclusion. $\dfrac{u}{v} = \dfrac{2}{3}e^{i\frac{3\pi}{10}}$ et $\overline{u} = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$.

3.

Calcule u^5 et écris le résultat sous forme algébrique.

INDICE

Élève le module à la puissance 5. Pour l'exponentielle, applique la formule de Moivre. Il reste à reconnaître $e^{i\pi}$.

CORRIGÉ

D'après la formule de Moivre, $\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = e^{i\pi}$. Donc :

$$\begin{aligned} u^5 &= 2^5 e^{i\pi} \\ &= 32(\cos\pi + i\sin\pi) \\ &= -32. \end{aligned}$$

Conclusion. $u^5 = -32$.

4.

Calcule $\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^{12}$ sous forme algébrique.

INDICE

La formule de Moivre s'applique directement : l'angle est multiplié par 12. Simplifie $\dfrac{12\pi}{8}$. Lis ensuite le cosinus et le sinus de l'angle obtenu.

CORRIGÉ

D'après la formule de Moivre, l'angle est multiplié par 12, et $\dfrac{12\pi}{8} = \dfrac{3\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} &\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{12} \\ &= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} \\ &= 0 + i\times(-1). \end{aligned}$$

Conclusion. Sous forme algébrique, ce nombre vaut $-i$.

Exercice 8

Racines carrées et équation à coefficients réels

On rappelle que la notation $\sqrt{x}$ est réservée aux réels positifs.

1.

Détermine les racines carrées de $Z = 15 - 8i$ sous forme algébrique.

INDICE

Cherche $\delta = x + iy$ avec x et y réels. Écris $x^2 - y^2$ et $2xy$, puis ajoute l'égalité des modules $x^2 + y^2 = |Z|$. Le signe de $2xy$ fixe les signes de x et de y.

CORRIGÉ

Soit $\delta = x + iy$ avec x et y réels, tel que $\delta^2 = Z$.

Conditions nécessaires. Par unicité de la forme algébrique, $x^2 - y^2 = 15$ et $2xy = -8$. De plus $|\delta|^2 = |Z|$, avec $|Z| = \sqrt{225 + 64} = 17$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ x^2 + y^2 = 17 \\ \quad\quad xy = -4 \end{cases}$$

Résolution. On en tire $x^2 = 16$ et $y^2 = 1$. Comme $xy < 0$, x et y sont de signes contraires : $\delta = 4 - i$ ou $\delta = -4 + i$.

Vérification. Ces conditions sont seulement nécessaires. Or $(4 - i)^2 = 16 - 8i + i^2 = 15 - 8i$, et comme $(-4 + i)^2 = (4 - i)^2$, le nombre $-4 + i$ convient aussi.

Conclusion. Z est non nul, il a donc exactement deux racines carrées. Les racines carrées de Z sont $4 - i$ et $-4 + i$.

2.

Détermine les racines carrées de $W = 9e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

INDICE

Utilise le théorème des racines carrées d'un nombre non nul écrit $re^{i\theta}$ avec $r > 0$. Prends la racine carrée du module. Divise l'angle par 2.

CORRIGÉ

On a $W = re^{i\theta}$ avec $r = 9 > 0$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$; en particulier $W \neq 0$.

D'après le théorème des racines carrées d'un nombre complexe non nul, les racines carrées de W sont $\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ et son opposé. Ici :

$$\sqrt{9}\, e^{i\frac{\pi}{5}} = 3e^{i\frac{\pi}{5}}.$$

Conclusion. Les racines carrées de W sont $3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $-3e^{i\frac{\pi}{5}}$.

3.

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 29 = 0$.

INDICE

Les coefficients sont réels : calcule Δ et regarde son signe. Si $\Delta < 0$, écris Δ comme le carré d'un imaginaire pur. Ne prends jamais le radical d'un nombre négatif.

CORRIGÉ

Les coefficients 1, 4 et 29 sont réels, avec $1 \neq 0$.

Discriminant.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 29 = -100.$$

Donc $\Delta < 0$, et $\sqrt{-\Delta} = 10$.

Solutions. D'après le théorème du second degré à coefficients réels, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{-4 - 10i}{2} = -2 - 5i,$$
$$\frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i.$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \{-2 - 5i,\ -2 + 5i\}$.

4.

Déduis-en une factorisation de $z^2 + 4z + 29$ pour tout z de $\mathbb{C}$, puis vérifie-la.

INDICE

Le même théorème donne la factorisation $a(z - z_1)(z - z_2)$. Ici $a = 1$. Pour vérifier, regroupe $z + 2$ et utilise $(z + 2)^2 - (5i)^2$.

CORRIGÉ

D'après le même théorème, le trinôme se factorise à l'aide de ses deux racines $-2 - 5i$ et $-2 + 5i$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &z^2 + 4z + 29 \\ &= (z + 2 + 5i)(z + 2 - 5i). \end{aligned}$$

Vérification. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &(z + 2 + 5i)(z + 2 - 5i) \\ &= (z + 2)^2 - (5i)^2 \\ &= z^2 + 4z + 4 + 25 \\ &= z^2 + 4z + 29. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre complexe z, $z^2 + 4z + 29 = (z + 2 + 5i)(z + 2 - 5i)$.