BURHAN

Nombres complexes : calcul et équations

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes/cours

Chapitre	Semestre
Nombres complexes : calcul et équations	Semestre 2

Forme algébrique et opérations

Un problème sans solution réelle

Cherche deux nombres dont la somme vaut 4 et le produit 29. Si l'un vaut x, l'autre vaut $4-x$. On veut donc $x(4-x)=29$, c'est-à-dire :

$$x^2-4x+29=0.$$

Le discriminant vaut $16-116=-100$. Il est négatif : aucun réel ne convient.

Les mathématiciens ont alors osé une idée : utiliser un nombre i dont le carré vaut -1.

Devine : Deux nombres de somme 4 et de produit 29

On calcule avec i comme avec un réel, en remplaçant i^2 par -1. Quel couple a pour somme 4 et pour produit 29 ?

A. $2+10i$ et $2-10i$

Faux.
Leur produit vaut $4+100=104$. Tu as pris 10, la racine de 100, sans diviser par 2.

B. $2+5i$ et $2-5i$

Juste.
La somme vaut 4, et le produit vaut $4-25i^2=4+25=29$.

C. $-2+5i$ et $-2-5i$

Faux.
Leur somme vaut -4, pas 4 : c'est l'oubli du signe moins devant b dans la formule du second degré.

Indice 1
Calcule d'abord la somme de chaque couple : elle élimine déjà un choix.
Indice 2
Pour le produit, utilise $(a+ib)(a-ib)=a^2-(ib)^2$ et $i^2=-1$.

Correction
Le couple $2+5i$ et $2-5i$ convient.

Somme. $(2+5i)+(2-5i)=4$.

Produit.

$$
\begin{aligned}
&(2+5i)(2-5i)\\
&=4-25i^2\\
&=4+25=29.
\end{aligned}
$$

Le nombre i permet donc de résoudre une équation sans solution réelle.

L'ensemble des nombres complexes

Définition : L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés **nombres complexes**, qui contient $\mathbb{R}$ et un nombre i tel que $i^2=-1$. Il est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul. Tout nombre complexe z s'écrit $z=a+ib$ avec a et b réels : une telle écriture est une **forme algébrique** de z.

Remarque

Ce résultat est admis. On ne construit pas $\mathbb{C}$ cette année.

On admet son existence, puis on démontre tout le reste à partir de $i^2=-1$ et des règles de calcul.

Exemple

Quelques formes algébriques :

- $-3+7i$, avec $a=-3$ et $b=7$;
- $\frac{5}{2}i$, avec $a=0$ et $b=\frac{5}{2}$;
- $\sqrt{6}$, avec $a=\sqrt{6}$ et $b=0$: tout réel est un nombre complexe.

Attention : a et b doivent être **réels**.

Une seule forme algébrique

Peut-on écrire un même nombre de deux façons, $a+ib$ et $a'+ib'$, avec a, b, a', b' réels et des parties différentes ? Pourquoi est-ce impossible ?

Si les parties imaginaires différaient, on pourrait isoler i comme quotient de deux réels. Or le carré d'un réel n'est jamais négatif.

Propriété : Unicité de la forme algébrique

Pour tous réels a, b, a', b' : si $a + ib = a' + ib'$, alors $a = a'$ et $b = b'$. La forme algébrique $z = a + ib$ d'un nombre complexe est donc unique : le réel a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et le réel b sa **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}(z)$. En particulier, $a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. Le nombre z est réel si $\mathrm{Im}(z) = 0$, et **imaginaire pur** si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Démonstration

Supposons $a + ib = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels. **Étape 1.** On en déduit $(b - b')\, i = a' - a$. **Étape 2.** Supposons par l'absurde $b \neq b'$. Alors $i = \dfrac{a' - a}{b - b'}$ est un réel, donc $i^2 \geq 0$. Or $i^2 = -1$: contradiction. Donc $b = b'$. **Étape 3.** L'égalité de l'étape 1 devient $a' - a = 0$, donc $a = a'$. **Conclusion.** Deux formes algébriques d'un même nombre ont les mêmes parties : la forme algébrique est unique. Le cas $a' = b' = 0$ donne : $a + ib = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On raisonne par l'absurde. Si i était réel, son carré serait positif ; or $i^2 = -1$. Cette contradiction interdit deux écritures différentes.

Désormais, une égalité entre formes algébriques donne **deux** égalités entre réels.

Vérifie : L'hypothèse de l'étape 2

À l'étape 2 de la preuve, on suppose $b \neq b'$. À quoi sert cette hypothèse ?

A. À obtenir directement que i est un réel.

Faux.
Que i soit réel est la conséquence absurde qu'on obtient, pas le rôle de l'hypothèse. Il faut d'abord pouvoir écrire i comme un quotient.

B. À obtenir directement l'égalité $a = a'$.

Faux.
L'égalité $a = a'$ vient à l'étape 3, une fois $b = b'$ établi.

C. À pouvoir diviser les deux membres par $b - b'$.

Juste.
Sans $b - b' \neq 0$, on ne peut pas isoler i dans $(b - b')\, i = a' - a$.

Indice 1

Relis l'égalité de l'étape 1 : comment isoler i ?

Correction

L'hypothèse $b \neq b'$ autorise la division par $b - b'$. On obtient :

$$i = \frac{a' - a}{b - b'}.$$

C'est un quotient de deux réels, donc un réel. Son carré serait positif, ce qui contredit $i^2 = -1$.

Exemple : Contre-exemple : des parties non réelles

L'hypothèse « a, b, a', b' réels » est indispensable. Prends $a = 1$ et $b = i$, qui n'est pas réel. Alors :

$$a + ib = 1 + i \times i = 1 - 1 = 0.$$

Avec $a' = 0$ et $b' = 0$, on a aussi $a' + ib' = 0$. Les deux écritures sont égales, et pourtant $a = 1$ et $a' = 0$ diffèrent.

Produit, inverse, produit nul

Pour multiplier deux formes algébriques, on développe comme dans $\mathbb{R}$, puis on remplace i^2 par -1.

Et pour l'inverse ? Pourquoi $a - ib$ apparaît-il ? Parce que $(a + ib)(a - ib)$ est un réel : il suffit ensuite de diviser par ce réel.

Propriété : Produit, inverse et quotient sous forme algébrique

Pour tous réels a, b, a', b' : $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$. Tout nombre complexe **non nul** $z = a + ib$, avec a et b réels, a un inverse : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$. Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z', on note $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$. Enfin, un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Démonstration

Étape 1. On développe avec les règles de calcul de $\mathbb{C}$ et $i^2 = -1$: $(a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$. **Étape 2.** Si $z = a + ib \neq 0$, alors a et b ne sont pas tous deux nuls, puisque $0 + i \times 0 = 0$; donc $a^2 + b^2 > 0$. **Étape 3.** Par l'étape 1, $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. Donc $(a + ib) \times \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2} = 1$: ce nombre est l'inverse de z. **Étape 4.** Si $uv = 0$ et $u \neq 0$, alors $v = \dfrac{1}{u} \times uv = 0$; la réciproque est immédiate.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour tous réels a et b, le produit suivant est un réel :

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Il est strictement positif dès que $z = a + ib$ est non nul : sinon $a = b = 0$, et z serait nul.

Multiplier par $a - ib$ transforme donc un dénominateur complexe en un réel non nul.

Vérifie : Le produit nul

À l'étape 4, on suppose $uv = 0$ et $u \neq 0$. Pourquoi peut-on multiplier l'égalité $uv = 0$ par $\frac{1}{u}$?

A. Parce que $u \neq 0$, donc u a un inverse.

Juste.

L'inverse d'un nombre non nul existe ; alors $v = \frac{1}{u} \times uv = 0$.

B. Parce que $uv = 0$, donc $\frac{1}{u}$ existe.

Faux.

L'égalité $uv = 0$ est ce qu'on exploite ; elle ne dit pas que u a un inverse.

C. Parce que tout nombre complexe a un inverse.

Faux.

Le nombre 0 n'a pas d'inverse : pour tout w, $0 \times w = 0 \neq 1$.

Indice 1

Quels nombres complexes ont un inverse, d'après l'énoncé ?

Correction

Comme $u \neq 0$, u a un inverse $\frac{1}{u}$. On multiplie l'égalité $uv = 0$ par $\frac{1}{u}$:

$$v = \frac{1}{u} \times uv = \frac{1}{u} \times 0 = 0.$$

Un produit nul a donc un facteur nul.

Méthode : écrire un quotient

Méthode : forme algébrique d'un quotient

Pour écrire $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, avec $z' = a' + ib'$:

1. **Contrôler** que $z' \neq 0$.
2. **Multiplier** le numérateur et le dénominateur par $a' - ib'$. Le dénominateur devient le réel $(a')^2 + (b')^2$.
3. **Développer** le numérateur, puis séparer partie réelle et partie imaginaire.

Rédaction attendue : « Comme $z' \neq 0$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a' - ib'$, donc… »

Exemple : Exemple rédigé

Écrivons $q = \frac{4 - 7i}{2 + 3i}$ sous forme algébrique. Le dénominateur $2 + 3i$ est non nul : multiplions-le, ainsi que le numérateur, par $2 - 3i$.

$$\begin{aligned} q &= \frac{(4-7i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\ &= \frac{8-12i-14i+21i^2}{4+9} \\ &= \frac{-13-26i}{13} = -1-2i. \end{aligned}$$

Vérification. On multiplie le résultat par le dénominateur : $(2+3i)(-1-2i) = -2-4i-3i-6i^2 = 4-7i$.

Plan complexe et conjugué

Un nombre, un point

Devine : Placer un nombre

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On associe au nombre $3-2i$ le point de coordonnées $(3\,;-2)$. Quel nombre associer au point $A(-1\,;4)$?

A. $4-i$

Faux.
Tu as échangé abscisse et ordonnée : c'est l'abscisse qui donne la partie réelle.

B. 3

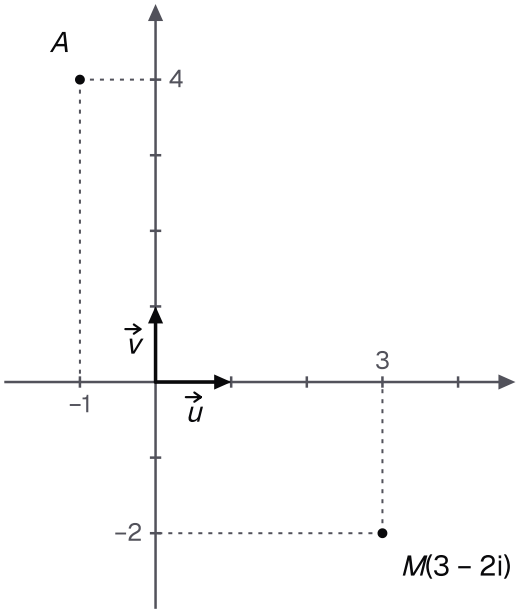
Faux.
On n'additionne pas les coordonnées : chacune devient une partie du nombre.

C. $-1+4i$

Juste.
L'abscisse -1 est la partie réelle, l'ordonnée 4 la partie imaginaire.

Indice 1
Dans $3-2i$, d'où vient le 3 ? Et le -2 ?

Correction
Le point $A(-1\,;4)$ est associé à $-1+4i$: l'abscisse donne la partie réelle et l'ordonnée la partie imaginaire, comme $(3\,;-2)$ pour $3-2i$.



Deux points du plan complexe repérés par les nombres lus sur les axes réel et imaginaire.

Définition : Image d'un nombre complexe, affixe d'un point et d'un vecteur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Au nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on associe le point $M(a\,;b)$, appelé **image** de z ; on dit que z est l'**affixe** du point M, notée z_M. De même, z est l'affixe du vecteur $\vec{w}(a\,;b)$, notée $z_{\vec{w}}$. Le plan muni de cette correspondance est le **plan complexe**.

Exemple

Le vecteur $\vec{w}(5\,;-1)$ a pour affixe $5 - i$.

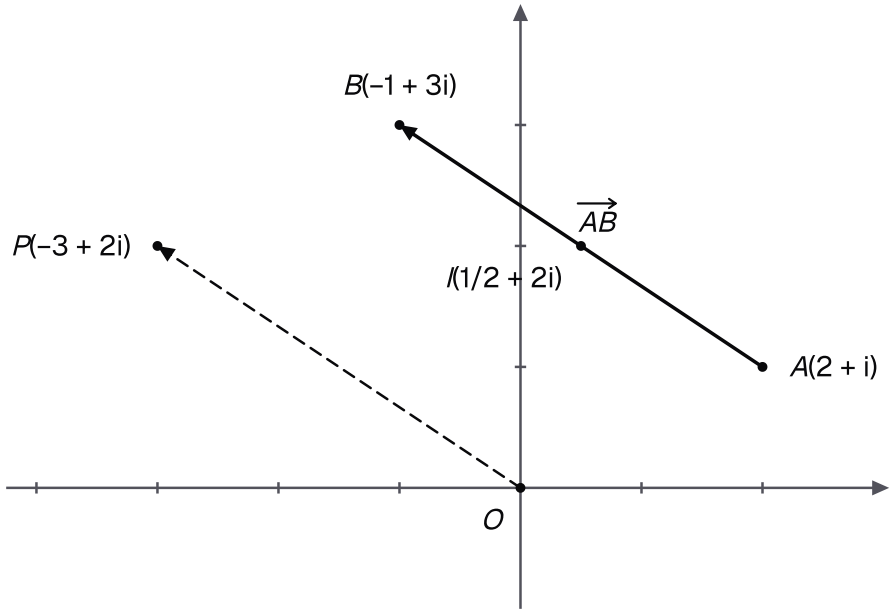
Le point B d'affixe $-2i$ est sur l'axe des ordonnées : $B(0\,;-2)$.

Affixe d'un vecteur, d'un milieu

Prends $A(2\,;1)$ et $B(-1\,;3)$: le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3\,;2)$, donc pour affixe $-3 + 2i$. Or :

$$\begin{aligned} z_B - z_A &= (-1 + 3i) - (2 + i) \\ &= -3 + 2i. \end{aligned}$$

Pourquoi ce n'est pas un hasard ? Les coordonnées d'un vecteur se calculent par différence, et l'affixe les range en partie réelle et partie imaginaire.



Le vecteur AB, son représentant issu de l'origine et le milieu I du segment, avec leurs affixes.

Propriété : Affixe d'un vecteur, d'un milieu ; opérations sur les vecteurs

Pour tous points A et B, tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ et tout réel k : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$, $z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$ et $z_{k\vec{w}} = k\, z_{\vec{w}}$. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstration

Notons $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$. **Étape 1.** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$, donc pour affixe $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = z_B - z_A$. **Étape 2.** Les coordonnées de $\vec{w} + \vec{w}'$ s'obtiennent en ajoutant celles de $\vec{w}$ et $\vec{w}'$, celles de $k\vec{w}$ en multipliant par le réel k : on lit les mêmes opérations sur les affixes. **Étape 3.** Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées, c'est-à-dire, par F02, la même affixe. **Étape 4.** I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, soit $z_I - z_A = \dfrac{1}{2}(z_B - z_A)$, d'où $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque opération sur les vecteurs agit sur les coordonnées, une à une. L'affixe reproduit exactement ce calcul.

Et deux vecteurs de même affixe sont égaux, grâce à l'unicité de la forme algébrique.

À toi : Un vecteur et un milieu

Soit A d'affixe $1 + 6i$ et B d'affixe $5 - 2i$. Donne l'affixe de $\overrightarrow{AB}$, puis celle du milieu I de $[AB]$.

Indice 1

Pour le vecteur : l'affixe de l'extrémité moins celle de l'origine.

Indice 2

Pour le milieu : la moyenne des deux affixes.

Réponse

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= (5-2i) - (1+6i) \\ &= 4 - 8i. \end{aligned}$$

Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe :

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{z_A + z_B}{2} \\ &= \frac{6+4i}{2} = 3 + 2i. \end{aligned}$$

Le conjugué

Devine : Un reflet

Le point $M(3\,;-2)$ est l'image de $3-2i$. Quel nombre a pour image le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses ?

A. $3+2i$

Juste.

Ce symétrique garde l'abscisse et change le signe de l'ordonnée : $(3\,;2)$.

B. $-3+2i$

Faux.

C'est l'image du symétrique par rapport à l'origine O : les deux coordonnées changent de signe.

C. $-3-2i$

Faux.

C'est l'image du symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : seule l'abscisse change de signe.

Indice 1

Le symétrique par rapport à l'axe des abscisses garde une coordonnée. Laquelle ?

Correction

Le symétrique de $M(3\,;-2)$ par rapport à l'axe des abscisses est $(3\,;2)$, image de $3+2i$. Seule la partie imaginaire a changé de signe.

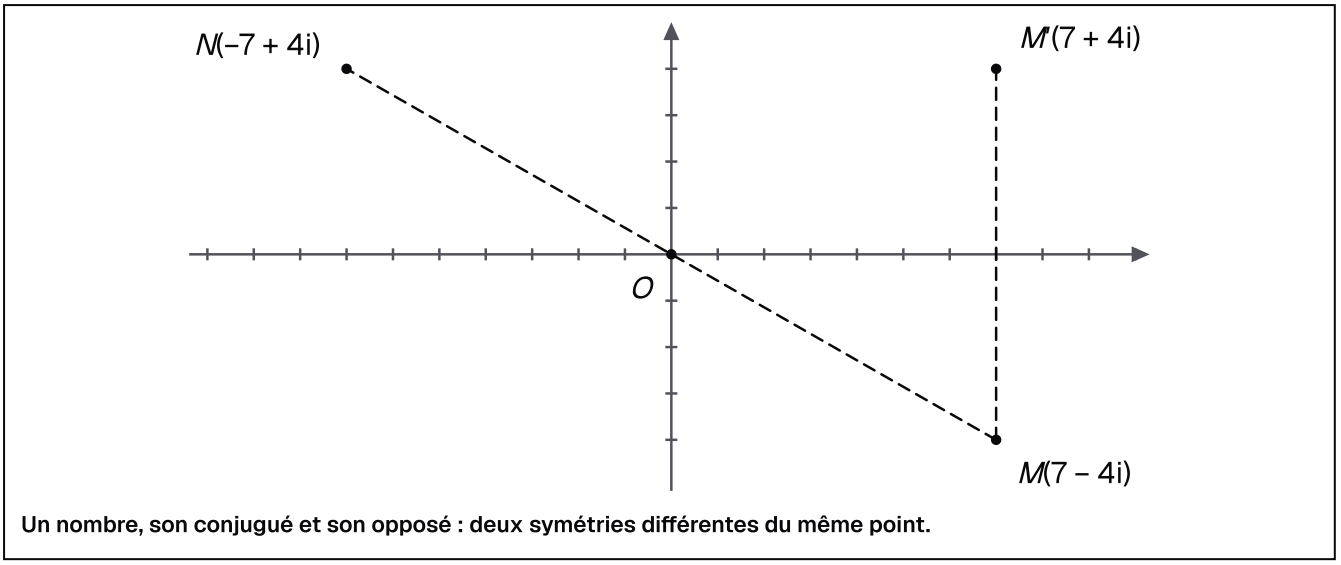
Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$. Dans le plan complexe, les images de z et de $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple

Par exemple, $\overline{7 - 4i} = 7 + 4i$, $\overline{-6i} = 6i$ et $\overline{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$: le conjugué d'un réel est lui-même.

Attention, le conjugué n'est pas l'opposé : $-(7 - 4i) = -7 + 4i$.



Un nombre, son conjugué et son opposé : deux symétries différentes du même point.

Calculer avec le conjugué

Remarque : Petit rappel : la récurrence

Pour prouver une propriété $P(n)$ pour tout entier naturel n :

1. **Initialisation.** On vérifie $P(0)$.
2. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$: on montre que $P(n)$ entraîne $P(n+1)$.
3. **Conclusion.** $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Le conjugué d'une somme est-il la somme des conjugués ? Et pour un produit ?

Pourquoi ces règles sont-elles vraies ? On écrit chaque nombre sous forme algébrique, on calcule les deux membres et on compare.

Propriété : Propriétés du conjugué

Pour tous nombres complexes z et z' : $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. Enfin, $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

Démonstration

Posons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels. **Étape 1.** $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$, et $\overline{z+z'} = (a+a') - i(b+b') = \overline{z} + \overline{z'}$. **Étape 2.** Par F03, $\overline{zz'} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$, et $\overline{z}\,\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$: ils sont égaux. **Étape 3.** Les puissances s'obtiennent par récurrence sur n : pour $n = 0$, les deux membres valent 1 ; puis $z^{n+1} = z^n z$ et l'étape 2. **Étape 4.** Si $z' \neq 0$, l'étape 2 appliquée à $z' \times \dfrac{1}{z'} = 1$ donne $\overline{z'} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = 1$; le quotient s'en déduit. **Étape 5.** Enfin $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2ib$.

Vérifie : Passer au rang suivant

L'étape 3 de la preuve traite les puissances par récurrence. Comment passe-t-on de $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ au rang $n+1$?

A. On écrit $z^{n+1} = z^n + z$ et on applique la règle de la somme.

Faux.
z^{n+1} est un produit, pas une somme : par exemple $2^3 = 8$ alors que $2^2 + 2 = 6$.

B. On écrit $z^{n+1} = z^n z$ et on applique la règle du produit.

Juste.
Alors $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n}\,\overline{z} = (\overline{z})^n\,\overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$.

C. On conjugue deux fois, puis on applique la règle $\overline{\overline{z}} = z$.

Faux.
Cette règle est vraie, mais elle ne relie pas le rang n au rang $n+1$.

Indice 1

Une puissance se construit en multipliant : z^{n+1} s'écrit avec z^n et z.

Correction

On écrit $z^{n+1} = z^n z$. La règle du produit (étape 2), puis l'hypothèse de récurrence, donnent :

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n}\,\overline{z} \\ &= (\overline{z})^n\,\overline{z} \\ &= (\overline{z})^{n+1}.\end{aligned}$$

Reconnaître un réel

Quand un nombre est-il égal à son conjugué ? Conjuguer change seulement le signe de la partie imaginaire.

Pourquoi est-ce un test pour reconnaître un réel ? Ce changement de signe ne modifie rien si, et seulement si, la partie imaginaire est nulle.

Propriété : Réels, imaginaires purs et conjugué

Pour tout nombre complexe z : z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$; z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Démonstration

Posons $z = a + ib$, avec a et b réels. **Étape 1.** $\overline{z} = z$ s'écrit $a - ib = a + ib$; par F02, cela équivaut à $-b = b$, c'est-à-dire $b = 0$: z est réel. **Étape 2.** $\overline{z} = -z$ s'écrit $a - ib = -a - ib$; par F02, cela équivaut à $a = -a$, c'est-à-dire $a = 0$: z est imaginaire pur.

À retenir : Ce qu'il faut retenir des deux preuves

Pour démontrer une propriété du conjugué, on pose $z = a + ib$, avec a et b réels, et on compare des formes algébriques, grâce à l'unicité.

Chaque condition sur le conjugué devient une condition sur a ou sur b.

Vérifie : Un produit toujours réel

Pour tout nombre complexe z, le produit $z\overline{z}$ est réel. Quel raisonnement le prouve correctement ?

A. Le conjugué de $z\overline{z}$ vaut $\overline{z}\,z$: ce nombre est égal à son conjugué, donc réel.

Juste.

On applique les règles du produit et du double conjugué, puis le test du réel.

B. z et $\overline{z}$ ont la même partie réelle : leur produit est réel, par l'unicité de la forme algébrique.

Faux.

Deux nombres de même partie réelle n'ont pas toujours un produit réel : $(1 + i)(1 + 2i) = -1 + 3i$.

C. Avec $z = a + ib$, le développement donne $z\overline{z} = a^2 - b^2$, qui est réel.

Faux.

Le calcul est faux : $(a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$. Le carré de i a été oublié.

Indice 1

Un nombre égal à son conjugué est réel.

Indice 2

Calcule le conjugué de $z\overline{z}$ avec les propriétés du conjugué.

Correction

Par les propriétés du conjugué :

$$\begin{aligned}\overline{z\overline{z}} &= \overline{z}\,\overline{\overline{z}} \\ &= \overline{z}\,z = z\overline{z}.\end{aligned}$$

Le nombre $z\overline{z}$ est égal à son conjugué : il est donc réel.

Module d'un nombre complexe

Distance à l'origine

Devine : Une distance

Le point M a pour affixe $6 - 8i$. Quelle est la distance OM ?

A. 14

Faux.
$6 + 8 = 14$: tu as ajouté les déplacements le long des axes. Le chemin direct est plus court.

B. 10

Juste.
Par Pythagore, $OM = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$.

C. 2

Faux.
On ne soustrait pas les coordonnées : on applique Pythagore dans le triangle rectangle formé avec les axes.

Indice 1

Dessine le triangle rectangle de sommets O, M et le point $(6\,;0)$.

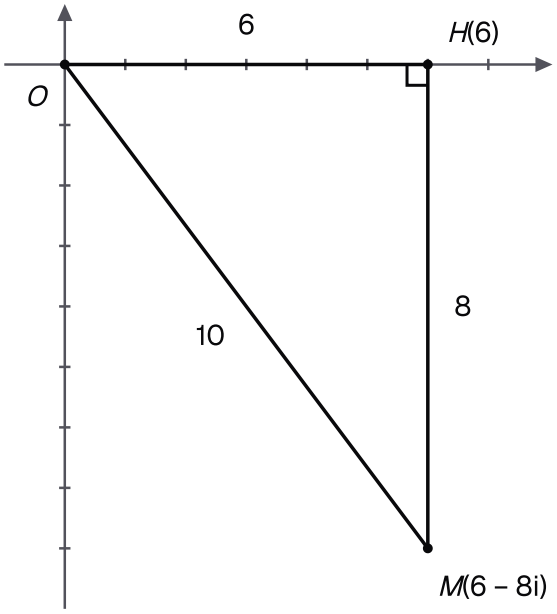
Correction

Le point M a pour coordonnées $(6\,;-8)$, donc :

$$\begin{aligned}OM &= \sqrt{6^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} = 10.\end{aligned}$$

Définition : Module d'un nombre complexe

Le **module** du nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si M est l'image de z, alors $|z| = OM$. Lorsque z est réel, son module est sa valeur absolue.



Le module de 6 – 8i lu comme une distance : l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 6 et 8.

Exemple

Par exemple :

$$\begin{aligned} |-20+21i| &= \sqrt{400+441} \\ &= \sqrt{841} = 29. \end{aligned}$$

Pour un réel, on retrouve la valeur absolue : $|-7| = 7$. Et $|3i| = 3$.

Module d'un produit

Compare : $|2-i| = \sqrt{5}$ et $|3+4i| = 5$. Puis :

$$(2-i)(3+4i) = 10+5i,$$

de module $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$: c'est le produit des modules.

Pourquoi est-ce toujours vrai ? Le carré du module s'écrit $z\overline{z}$, et le conjugué respecte les produits.

Propriété : Propriétés du module

Pour tous nombres complexes z et z' : $|z|^2 = z\,\overline{z}$; $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$; $|\overline{z}| = |-z| = |z|$; $|zz'| = |z|\,|z'|$; pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$. Si $z' \neq 0$: $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{\overline{z'}}{|z'|^2}$, $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Démonstration

Posons $z = a + ib$, avec a et b réels. **Étape 1.** Par F03, $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$. **Étape 2.** $|z| = 0$ équivaut à $a^2 + b^2 = 0$, donc à $a = b = 0$, car une somme de carrés de réels n'est nulle que si chacun l'est. **Étape 3.** $\overline{z}$ et $-z$ ont des parties de mêmes carrés que celles de z. **Étape 4.** Par

l'étape 1 et F07, $|zz'|^2 = zz'\,\overline{z}\,\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$; les modules étant positifs, $|zz'| = |z|\,|z'|$. Les puissances suivent par récurrence (pour $n = 0$, les deux membres valent 1). **Étape 5.** Si $z' \neq 0$: l'étape 1 donne $z' \times \dfrac{\overline{z'}}{|z'|^2} = 1$, et l'étape 4 donne $|z'| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = 1$; le quotient s'en déduit.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On raisonne sur le carré $|z|^2 = z\overline{z}$, pas sur la racine : on évite ainsi les racines carrées pendant le calcul.

On revient aux modules à la fin, parce qu'un module est un réel positif.

Vérifie : Un module nul

À l'étape 2, pourquoi $a^2 + b^2 = 0$ entraîne-t-il $a = b = 0$?

A. Parce qu'une somme de deux carrés n'est nulle que si chaque carré l'est, pour tous nombres.
Faux.
C'est faux pour des nombres non réels : $1^2 + i^2 = 0$. Le fait que a et b soient réels est indispensable.

B. Parce que $a^2 + b^2$ est un module, et qu'un module n'est jamais nul.
Faux.
$a^2 + b^2$ est le carré du module ; et un module peut être nul : c'est ce qu'on étudie.

C. Parce que a et b sont réels : deux carrés positifs de somme nulle sont nuls.
Juste.
Si $a^2 + b^2 = 0$ avec $a^2 \geq 0$ et $b^2 \geq 0$, alors $a^2 = b^2 = 0$.

Indice 1
Que sais-tu du signe du carré d'un réel ?

Correction
Comme a et b sont réels, $a^2 \geq 0$ et $b^2 \geq 0$. Une somme de deux réels positifs n'est nulle que si chacun est nul : $a^2 = b^2 = 0$, donc $a = b = 0$.

Pour des nombres non réels, c'est faux : $1^2 + i^2 = 0$.

Inégalité triangulaire

Et pour une somme ? Dans un triangle, un côté est plus court que le chemin par les deux autres.

Pourquoi l'inégalité triangulaire est-elle vraie ? On compare les carrés des deux membres, qui sont des réels positifs.

Théorème : Inégalité triangulaire

Pour tous nombres complexes z et z' : $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ et $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout nombre complexe $w = x + iy$, $\mathrm{Re}(w) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |w|$. **Étape 2.** Par F10 et F07, $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$. **Étape 3.** Par l'étape 1 et F10, $2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leq 2|z|\,|z'|$. Donc $|z+z'|^2 \leq \left(|z| + |z'|\right)^2$; les deux nombres étant positifs, $|z+z'| \leq |z| + |z'|$. **Étape 4.** Appliquée à $z = (z-z') + z'$, cette inégalité donne $|z| - |z'| \leq |z - z'|$; en échangeant z et z', on obtient $|z'| - |z| \leq |z' - z| = |z - z'|$ (F10). D'où la seconde inégalité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour comparer deux réels positifs, on compare leurs carrés.

Le terme $2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$ est le seul qui sépare $|z+z'|^2$ de $|z|^2 + |z'|^2$: tout revient à le majorer.

Vérifie : L'argument de l'étape 1

Quel argument justifie l'étape 1 : $x \leq \sqrt{x^2+y^2}$ pour tous réels x et y ?

A. $x \leq x^2 + y^2$, car un nombre est plus petit que son carré.

Faux.

Pour $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = 0$, on aurait $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{4}$.

B. $x \leq |x| = \sqrt{x^2}$, puis la racine carrée est croissante.

Juste.

On ajoute $y^2 \geq 0$ sous la racine, ce qui ne peut que l'augmenter.

C. x est positif, car c'est une partie d'un module.

Faux.

x est une partie réelle : elle peut être négative, par exemple pour $w = -2 + i$.

Indice 1

Compare d'abord x et $|x|$.

Correction

Soit x et y deux réels. On a $x \leq |x| = \sqrt{x^2}$.

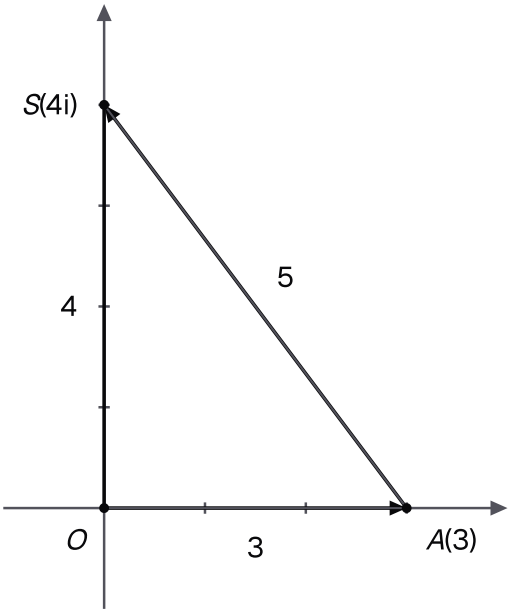
Comme $y^2 \geq 0$ et que la racine carrée est croissante sur les réels positifs, $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Attention : Le module d'une somme

Additionner deux nombres n'additionne pas leurs modules. Avec $z = 3$ et $z' = -3 + 4i$:

$$|z+z'| = |4i| = 4,$$
$$|z| + |z'| = 3 + 5 = 8.$$

On a seulement l'inégalité triangulaire. L'égalité des modules vaut pour les produits et les quotients.

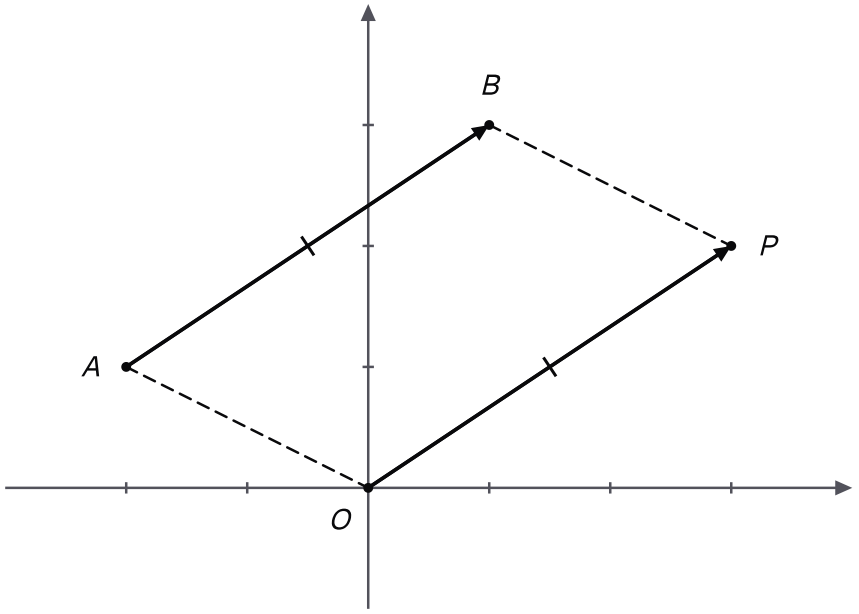


Avec z = 3 et z' = −3 + 4i, le côté OS mesure 4, bien moins que le détour 3 + 5 par A.

Distance de deux points

Comment calculer la distance de deux points quelconques ? Pourquoi un module suffit-il ? Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$: on le reporte depuis l'origine.

Et pourquoi un nombre de module 1 a-t-il un inverse si simple ? Tout vient de $z\overline{z} = |z|^2$.



Reporter le vecteur AB depuis l'origine : la distance AB devient la distance OP, un module.

Propriété : Distance de deux points

Pour tous points A et B du plan complexe : $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration

Par F05, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Soit M l'image de $z_B - z_A$: alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, et, par F09, $|z_B - z_A| = OM = AB$.

À toi : Un point sur un cercle

Soit A d'affixe $-1 + 2i$, B d'affixe $3 - i$ et C d'affixe $2 + 6i$. Calcule AB, puis dis si C est sur le cercle de centre A passant par B.

Indice 1

$AB = |z_B - z_A|$.

Indice 2

Ce cercle a pour rayon AB : compare AC à AB.

Réponse

Par la formule de la distance :

$$\begin{aligned} AB &= |(3 - i) - (-1 + 2i)| \\ &= |4 - 3i| = 5, \\ AC &= |(2 + 6i) - (-1 + 2i)| \\ &= |3 + 4i| = 5. \end{aligned}$$

Donc $AC = AB$: le point C est sur le cercle de centre A passant par B.

Les nombres de module 1

Propriété : Nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Son image dans le plan complexe est le cercle de centre O et de rayon 1. On a $1 \in \mathbb{U}$; pour tous z et z' de $\mathbb{U}$, $zz' \in \mathbb{U}$; pour tout z de $\mathbb{U}$, $z \neq 0$ et $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$, qui appartient à $\mathbb{U}$.

Démonstration

Étape 1. Par F09, $|z| = 1$ signifie $OM = 1$: l'image de $\mathbb{U}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. **Étape 2.** $|1| = 1$, et, par F10, si $|z| = |z'| = 1$, alors $|zz'| = 1$. **Étape 3.** Si $|z| = 1$, alors $z \neq 0$ et, par F10, $z\overline{z} = 1$; donc $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$, et $|\overline{z}| = |z| = 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir des deux preuves

Une distance AB se ramène à une distance à l'origine, donc à un module. Pour le cercle de rayon 1, tout repose sur la relation entre $z\overline{z}$ et $|z|^2$.

Vérifie : L'inverse d'un nombre de module 1

Soit $t = \dfrac{8 + 15i}{17}$. Quelle est la forme algébrique de l'inverse de t ?

A. $\dfrac{-8 - 15i}{17}$

Faux.

C'est l'opposé $-t$: le produit $t \times (-t) = -t^2$ ne vaut pas 1.

B. $\dfrac{17}{8} + \dfrac{17}{15}i$

Faux.

Tu as inversé chaque partie séparément. L'inverse d'une somme n'est pas la somme des inverses.

C. $\dfrac{8 - 15i}{17}$

Juste.

$|t| = \dfrac{\sqrt{64 + 225}}{17} = 1$, donc l'inverse de t est son conjugué.

Indice 1

Calcule d'abord $|t|$.

Indice 2

Pour un nombre de $\mathbb{U}$, l'inverse se lit sans calcul.

Correction

On a $|8 + 15i| = \sqrt{64 + 225} = 17$, donc $|t| = 1$ et $t \in \mathbb{U}$. Alors :

$$\frac{1}{t} = \overline{t} = \frac{8 - 15i}{17}.$$

Contrôle : $t\overline{t} = \dfrac{64 + 225}{289} = 1$.

Argument et forme trigonométrique

Repérer un point par un angle

Remarque : Petit rappel : angles orientés

Une mesure d'un angle orienté n'est définie qu'à un multiple de 2π près. Si θ en est une, les autres sont les $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\theta \equiv \theta' \ [2\pi]$ lorsque $\theta' - \theta$ est un multiple de 2π.

Devine : Un angle pour un point

Le point $M(0\,;3)$ est l'image de $3i$. Quelle est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$?

A. $\dfrac{\pi}{2}$

Juste.

M est sur la demi-droite des ordonnées positives : un quart de tour direct depuis $\vec{u}$.

B. $-\dfrac{\pi}{2}$

Faux.

C'est un quart de tour dans le sens indirect : il mène vers les ordonnées négatives, au point $(0\,;-3)$.

C. 0

Faux.

La mesure 0 correspond aux points de la demi-droite des abscisses positives, images des réels strictement positifs.

Indice 1

Place M : sur quel axe se trouve-t-il, et de quel côté ?

Correction

$M(0\,;3)$ est sur l'axe des ordonnées, du côté positif. L'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ mesure $\dfrac{\pi}{2}$, à 2π près.

L'argument

Définition : Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe **non nul**, d'image M. On appelle **argument** de z toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. Si θ est un argument de z, les arguments de z sont les réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; on écrit $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$. Le nombre 0 n'a **pas** d'argument.

Exemple

Quelques arguments :

- -6 a pour argument π : son image est sur la demi-droite des abscisses négatives ;
- $-2i$ a pour argument $-\dfrac{\pi}{2}$;
- $4 + 4i$ a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$, car son image $(4\,;4)$ est sur la bissectrice du premier quadrant.

Attention : Le nombre zéro

Un argument n'existe que pour un nombre complexe **non nul**. Si $M = O$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est nul et l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ n'existe pas.

Avant d'écrire un argument, vérifie que le nombre est non nul.

Forme trigonométrique

Remarque : Petit rappel : trigonométrie

Pour tout réel x :

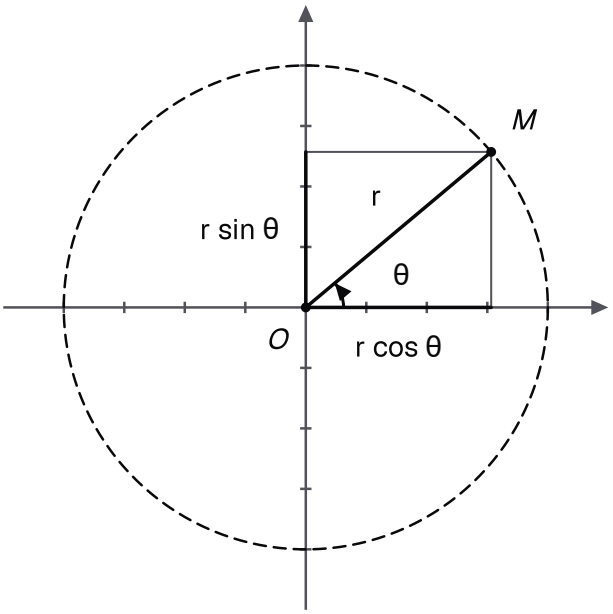
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Valeurs utiles :

- $\cos \dfrac{\pi}{6} = \sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\sin \dfrac{\pi}{6} = \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$;
- $\cos \dfrac{\pi}{4} = \sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Un nombre non nul est-il repéré par sa distance à O et par un angle ? Pourquoi ?

Son image M est sur le cercle de centre O et de rayon $r = OM$. Sur ce cercle, le cosinus et le sinus donnent les coordonnées de M.



Le point M repéré par sa distance r à l'origine et par l'angle θ ; ses deux coordonnées valent r cos θ et r sin θ.

Propriété : Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et θ un argument de z : c'est une **forme trigonométrique** de z. Réciproquement, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec r réel strictement positif et θ réel, alors $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

Démonstration

Soit $z = a + ib$ non nul, d'image M, $r = |z| = OM$ et θ un argument de z. **Étape 1.** Le point M est à la distance $r > 0$ de O et l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ mesure θ ; par définition du cosinus et du sinus, M a pour coordonnées $(r\cos\theta\,; r\sin\theta)$. **Étape 2.** Donc $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$, et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. **Étape 3.** Réciproquement, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = \sqrt{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = r$, et $M(r\cos\theta\,; r\sin\theta)$ est sur la demi-droite d'angle θ : $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On lit les coordonnées $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$ sur le cercle de rayon r.

Pour la réciproque, on calcule le module, puis on place le point sur la demi-droite d'angle θ.

Trouve l'erreur : Une écriture à examiner

Un élève affirme : « $z = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ a pour module -2 et pour argument $\dfrac{\pi}{5}$. » Qu'en penses-tu ?

A. Il a raison : on lit le module et l'argument dans l'écriture.

Faux.
Un module est positif : -2 ne peut pas être un module. L'écriture n'est pas une forme trigonométrique.

B. Il a tort : $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Faux.
Ce nombre est le conjugué de $-z$, pas z.

C. Il a tort : $z = 2\left(\cos\dfrac{6\pi}{5} + i\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)$.

Juste.
On a $-\cos\theta = \cos(\theta+\pi)$ et $-\sin\theta = \sin(\theta+\pi)$: on ajoute π à l'angle.

Indice 1
Un module peut-il être négatif ?
Indice 2
Exprime $-\cos\theta$ et $-\sin\theta$ avec l'angle $\theta+\pi$.

Correction
La réciproque de la forme trigonométrique exige $r > 0$. Ici le facteur est -2 : l'élève a tort.

Pour tout réel θ, $-\cos\theta = \cos(\theta+\pi)$ et $-\sin\theta = \sin(\theta+\pi)$. Donc :

$$z = 2\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right).$$

Comme $2 > 0$, le module de z est 2 et un argument est $\dfrac{6\pi}{5}$.

Méthode : changer de forme

Méthode : passer à la forme trigonométrique

Pour écrire $z = a + ib$ non nul sous forme trigonométrique :

1. **Calculer** $r = |z|$, après avoir vérifié $z \neq 0$.
2. **Factoriser** par r : $z = r\left(\dfrac{a}{r} + i\,\dfrac{b}{r}\right)$.
3. **Chercher** un réel θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.
4. **Conclure** : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r > 0$.

Rédaction attendue : « $|z| = \ldots$; on cherche θ tel que $\cos\theta = \ldots$ et $\sin\theta = \ldots$; donc $z = \ldots$ »

Exemple : Exemple rédigé

Soit $z = -5\sqrt{3} + 5i$. On a $z \neq 0$ et $|z| = \sqrt{75+25} = 10$.

On cherche θ tel que $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Avec $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, les deux égalités sont vraies.

Donc, avec $10 > 0$:

$$z = 10\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

À toi : une forme trigonométrique

Écris $z = 3 - 3i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique, en suivant la méthode.

Indice 1

Commence par le module : $|z| = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2}$.

Indice 2

Tu dois trouver $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Indice 3

Le sinus est négatif : l'angle se trouve entre $-\pi$ et 0.

Réponse

On a $z \neq 0$ et $|z| = \sqrt{9 + 27} = 6$.

On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{3\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. L'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ convient.

Donc, avec $6 > 0$:

$$z = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Attention : Un facteur négatif

L'écriture $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ n'est une forme trigonométrique que si $r > 0$.

Si le facteur réel est négatif, on le remplace par son opposé et on ajoute π à l'angle. Contrôle toujours le signe du facteur avant de lire un argument.

Calculer avec les arguments

Multiplier deux formes trigonométriques

Devine : Un produit

Soit $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$ et $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$. Que vaut, selon toi, $z_1 z_2$?

A. $6\left(\cos\dfrac{3\pi}{7}+i\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$

Juste.

Les modules se multiplient et les angles s'ajoutent : $\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{2\pi}{7}=\dfrac{3\pi}{7}$.

B. $5\left(\cos\dfrac{3\pi}{7}+i\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$

Faux.

Les modules se multiplient : $|z_1z_2|=2\times 3$, pas $2+3$.

C. $6\left(\cos\dfrac{2\pi^2}{49}+i\sin\dfrac{2\pi^2}{49}\right)$

Faux.

Tu as multiplié les angles. Ce sont eux qui s'ajoutent.

Indice 1

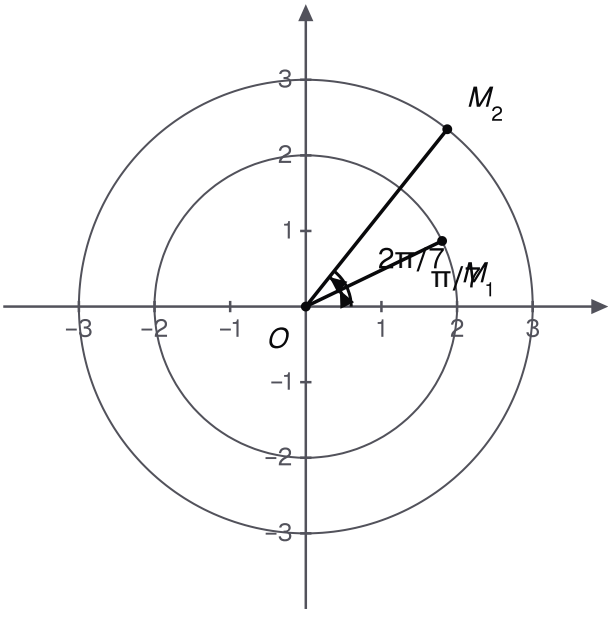
Le module d'un produit est le produit des modules.

Correction

On développe et on reconnaît les formules d'addition :

$$z_1z_2=6\left(\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

La démonstration qui suit justifie cette règle.



Les images de z1 et de z2 : sur les cercles de rayons 2 et 3, sous les angles π/7 et 2π/7 comptés depuis l'axe réel.

Remarque : Petit rappel : formules d'addition

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b \\ &\quad - \sin a \sin b, \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b \\ &\quad + \cos a \sin b.\end{aligned}$$

La règle des arguments

Pourquoi les arguments s'ajoutent-ils dans un produit ?

Quand on développe le produit de deux formes trigonométriques, les formules d'addition apparaissent. La partie réelle donne $\cos(\theta+\theta')$, la partie imaginaire $\sin(\theta+\theta')$.

Propriété : Argument d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance

Pour tous nombres complexes **non nuls** z et z' : $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$; $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \ [2\pi]$; $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$; pour tout entier relatif n, $\arg(z^n) \equiv n \arg z \ [2\pi]$.

Démonstration

Écrivons $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, avec $r>0$ et $r'>0$ (F15). **Étape 1.** Par F03 et les formules d'addition, $zz' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right] = rr'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$. Comme $rr'>0$, la réciproque de F15 donne $\arg(zz') \equiv \theta+\theta' \ [2\pi]$. **Étape 2.** $\dfrac{1}{z}$ est non nul, car $z \times \dfrac{1}{z} = 1$. De cette égalité et de $\arg 1 \equiv 0 \ [2\pi]$, l'étape 1 donne $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \ [2\pi]$; le quotient s'en déduit. **Étape 3.** Pour n entier naturel, récurrence : pour $n=0$, $\arg 1 \equiv 0 \ [2\pi]$; puis $z^{n+1} = z^n z$. Pour n négatif, $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$, où $z^{-n} \neq 0$ (F10), et l'étape 2.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Multiplier deux formes trigonométriques multiplie les modules et ajoute les angles, grâce aux formules d'addition.

Toutes les autres règles se déduisent de celle du produit.

Vérifie : Les puissances négatives

À l'étape 3, pour n négatif, la preuve note que $z^{-n} \neq 0$. Pourquoi en a-t-on besoin ?

A. Pour que la récurrence sur n puisse démarrer à $n=0$.
Faux.
La récurrence porte sur n entier naturel ; elle ne demande rien sur z^{-n}.

B. Pour appliquer la règle de l'inverse, qui vise un nombre non nul.
Juste.

On écrit $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$: il faut que z^{-n} ait un inverse et un argument.

C. Parce qu'un argument n'existe que pour un réel strictement positif.

Faux.

Tout nombre complexe non nul a un argument ; c'est la condition « non nul » qui compte.

Indice 1

Pour n négatif, comment la preuve écrit-elle z^n ?

Correction

Pour n négatif, $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$. La règle de l'inverse (étape 2) ne s'applique qu'à un nombre non nul.

Or $z^{-n} \neq 0$, car son module $|z|^{-n}$ est non nul. On obtient :

$$\begin{aligned} \arg\left(z^n\right) &\equiv -\arg\left(z^{-n}\right) \\ &\equiv n \arg z \ [2\pi]. \end{aligned}$$

Exemple

Soit $w_1 = \sqrt{3} + 3i$ et $w_2 = -2 + 2i$. On trouve :

- $|w_1| = 2\sqrt{3}$ et $\arg w_1 \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
- $|w_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg w_2 \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Les deux sont non nuls, donc la règle du quotient s'applique :

$$\left|\frac{w_1}{w_2}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Pour l'argument :

$$\begin{aligned} \arg \frac{w_1}{w_2} &\equiv \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \\ &\equiv -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]. \end{aligned}$$

Conjugué, opposé et argument

Attention : Et pour une somme ?

Les règles sur les arguments valent pour les produits, les quotients et les puissances, jamais pour les sommes.

Par exemple, 1 et i ont pour arguments 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, mais $1 + i$ a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$. Pour une somme, reviens à la forme algébrique.

Le conjugué d'un nombre est son reflet par rapport à l'axe des abscisses. Son angle change donc de signe.

Pourquoi ? Changer θ en $-\theta$ garde le cosinus et change le signe du sinus.

Propriété : Conjugué, opposé ; réels et imaginaires purs par l'argument

Pour tout nombre complexe **non nul** z : $\arg \overline{z} \equiv -\arg z \ [2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \ [2\pi]$. De plus, z est réel si et seulement si $\arg z \equiv 0 \ [\pi]$, et z est imaginaire pur si et seulement si $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$.

Démonstration

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r > 0$ (F15). **Étape 1.** $\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$; par la réciproque de F15, $\arg\overline{z} \equiv -\theta \ [2\pi]$. **Étape 2.** $-z = r\left(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right)$, donc $\arg(-z) \equiv \pi + \theta \ [2\pi]$. **Étape 3.** Par F02, z est réel si et seulement si $r\sin\theta = 0$, soit $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta \equiv 0 \ [\pi]$; z est imaginaire pur si et seulement si $\cos\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On transforme l'écriture jusqu'à obtenir une forme trigonométrique, puis on lit l'argument. Pour le caractère réel, on écrit que la partie imaginaire est nulle.

À toi : Argument d'un conjugué

Soit $z = -4\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$. Quel est un argument de $\overline{z}$?

A. $\dfrac{8\pi}{9}$

Juste.

$\arg z \equiv \dfrac{10\pi}{9}$, donc $\arg\overline{z} \equiv -\dfrac{10\pi}{9} \equiv \dfrac{8\pi}{9} \ [2\pi]$.

B. $-\dfrac{\pi}{9}$

Faux.

Le facteur -4 est négatif : $\dfrac{\pi}{9}$ n'est pas un argument de z. Il faut d'abord ajouter π.

C. $\dfrac{10\pi}{9}$

Faux.

C'est un argument de z lui-même ; celui du conjugué est son opposé.

Indice 1

Écris d'abord z sous forme trigonométrique, avec un facteur positif.

Correction

Le facteur -4 est négatif : on prend son opposé et on ajoute π à l'angle.

$$z = 4\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right).$$

Comme $4 > 0$, $\arg z \equiv \dfrac{10\pi}{9}\ [2\pi]$. L'argument du conjugué est l'opposé :

$$\arg\overline{z} \equiv -\frac{10\pi}{9} \equiv \frac{8\pi}{9}\ [2\pi],$$

car $-\dfrac{10\pi}{9} + 2\pi = \dfrac{8\pi}{9}$.

Notation exponentielle, Moivre et Euler

Une notation qui calcule

Devine : Deux nombres de module 1

Changer de forme est un geste d'examen. Pour commencer, soit a et b deux réels. Que vaut $(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$?

A. $\cos a\cos b + i\sin a\sin b$

Faux.

On ne multiplie pas terme à terme : le développement donne quatre produits.

B. $\cos(a+b) + i\sin(a+b)$

Juste.

Les angles s'ajoutent, comme les exposants dans $5^2 \times 5^3 = 5^5$.

C. $\cos(ab) + i\sin(ab)$

Faux.

Les angles s'ajoutent, ils ne se multiplient pas.

Indice 1

Utilise la règle des arguments d'un produit.

Correction

Les deux nombres ont pour module 1 et pour arguments a et b. Le produit a pour module 1 et pour argument $a + b$:

$$\begin{aligned}&(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)\\ &= \cos(a+b) + i\sin(a+b).\end{aligned}$$

Les angles s'ajoutent comme des exposants : d'où une notation en puissance.

La forme exponentielle, ou le module et un argument, est demandée dans 8 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025).

Définition : Notation exponentielle

Pour tout réel θ, on **note** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Tout nombre complexe non nul z, de module r et d'argument θ, s'écrit $z = re^{i\theta}$: c'est une **forme exponentielle** de z.

Exemple

Par exemple :

$$\begin{aligned} 4e^{i\frac{\pi}{3}} &= 4\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2 + 2\sqrt{3}\,i. \end{aligned}$$

Le réel -7 s'écrit $7e^{i\pi}$, avec $7 > 0$. Et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Calculer en notation exponentielle

La notation $e^{i\theta}$ est-elle une simple abréviation ? Pourquoi suit-elle les règles des puissances ?

Parce que chaque règle traduit un résultat déjà démontré sur les modules et les arguments.

Propriété : Calculs en notation exponentielle

Pour tous réels θ et θ' : $|e^{i\theta}| = 1$; $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$. Ainsi $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration

Étape 1. $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. **Étape 2.** Le calcul de l'étape 1 de F16, avec $r = r' = 1$, donne $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. **Étape 3.** En particulier $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$, donc $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}$; le quotient s'en déduit. **Étape 4.** Si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, ce nombre de module 1 a pour arguments θ et θ' (F15), donc $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$; la réciproque vient de la périodicité de $\cos$ et de $\sin$. **Étape 5.** Tout z de $\mathbb{U}$ est non nul, de module 1 : par F15, $z = e^{i\theta}$ pour tout argument θ de z. Inversement, $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ par l'étape 1.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La notation n'ajoute aucune règle nouvelle. Le produit vient de la règle des arguments, avec des modules égaux à 1.

Vérifie : Égalité de deux exponentielles

À l'étape 4, pourquoi $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ entraîne-t-il $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$, et non $\theta = \theta'$?

A. Parce que $\cos\theta = \cos\theta'$, ce qui donne $\theta = \theta'$.
Faux.

Des cosinus égaux ne donnent pas des angles égaux : $\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

B. Parce que l'écriture exponentielle est unique, donc $\theta = \theta'$.

Faux.

e^{i0} et $e^{2i\pi}$ valent tous deux 1, alors que $0 \neq 2\pi$.

C. Parce que θ et θ' sont deux arguments d'un même nombre.

Juste.

Deux arguments d'un même nombre diffèrent d'un multiple de 2π.

Indice 1

$e^{i\theta}$ et $e^{i(\theta+2\pi)}$ sont-ils égaux ?

Correction

Le nombre $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ est non nul, de module 1. Par la réciproque de la forme trigonométrique, θ et θ' en sont deux arguments.

Or deux arguments d'un même nombre diffèrent d'un multiple de 2π. Donc :

$$\theta \equiv \theta' \ [2\pi].$$

Formule de Moivre

Que vaut $\left(e^{i\theta}\right)^3$? C'est le produit de trois facteurs égaux :

$$e^{i\theta}e^{i\theta}e^{i\theta} = e^{3i\theta}.$$

Pourquoi cela marche-t-il pour toute puissance ? On ajoute un facteur à chaque rang : c'est une récurrence (initialisation, hérédité, conclusion), comme pour les puissances du conjugué.

Théorème : Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier relatif n : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, c'est-à-dire $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Démonstration

Étape 1 (n entier naturel, récurrence). *Initialisation* : pour $n = 0$, les deux membres valent 1. *Hérédité* : si $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, alors, par F19, $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{in\theta}e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$. *Conclusion* : l'égalité vaut pour tout entier naturel n. **Étape 2 (n entier négatif).** Posons $n = -m$, avec m entier naturel. Par l'étape 1 et F19, $\left(e^{i\theta}\right)^n = \dfrac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^m} = \dfrac{1}{e^{im\theta}} = e^{-im\theta} = e^{in\theta}$. **Conclusion.** Par définition de $e^{i\theta}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout entier relatif n.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La récurrence porte sur une égalité de nombres, pas sur des arguments seuls.

> Le cas n négatif ne demande pas de nouvelle récurrence : il passe par l'inverse.

Vérifie : Dans l'hérédité

Dans l'hérédité, quel résultat permet d'écrire $e^{in\theta}e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$?

A. L'hypothèse de récurrence, au rang n.

Faux.

Elle sert juste avant, pour remplacer $\left(e^{i\theta}\right)^n$ par $e^{in\theta}$.

B. La règle du produit de deux exponentielles.

Juste.

$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$, avec $a = n\theta$ et $b = \theta$.

C. Les formules d'Euler, pour $\cos$ et $\sin$.

Faux.

Elles n'interviennent pas dans cette preuve : elles viennent juste après.

Indice 1

Le membre de gauche est un produit de deux exponentielles.

Correction

L'hypothèse de récurrence donne $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{in\theta}e^{i\theta}$.

La règle du produit, avec les angles $n\theta$ et θ, donne ensuite :

$$e^{in\theta}e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}.$$

Exemple : Exemple rédigé

Soit $z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i$. On a $z \neq 0$ et $|z| = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2}$.

Pour $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $z = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Par la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} z^6 &= \left(2\sqrt{2}\right)^6 e^{4i\pi} \\ &= 512, \end{aligned}$$

car $\left(2\sqrt{2}\right)^6 = 512$ et $e^{4i\pi} = 1$.

Formules d'Euler

Et si l'on ajoute $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$? Pourquoi obtient-on un cosinus ?

Ces deux nombres sont conjugués : leur somme vaut deux fois la partie réelle.

Propriété : Formules d'Euler

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration

Par F19, $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$. Par F07, $e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} = 2\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\right) = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = 2i\operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\right) = 2i\sin\theta$. On divise par 2, puis par $2i$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On reconnaît un nombre et son conjugué. Les formules de $z+\overline{z}$ et de $z-\overline{z}$ font le reste.

Vérifie : Obtenir le sinus

Comment la preuve obtient-elle la formule de $\sin\theta$?

A. Elle divise $e^{i\theta}-e^{-i\theta}$ par 2.

Faux.

On obtiendrait $i\sin\theta$, pas $\sin\theta$: le facteur i est oublié.

B. Elle prend la partie réelle de $e^{i\theta}-e^{-i\theta}$.

Faux.

Cette partie réelle vaut $\cos\theta - \cos\theta = 0$.

C. Elle divise $e^{i\theta}-e^{-i\theta}$ par $2i$.

Juste.

Car $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\right) = 2i\sin\theta$.

Indice 1

Que vaut $z-\overline{z}$ pour $z = e^{i\theta}$?

Correction

On a $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Par les propriétés du conjugué :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}-e^{-i\theta} &= e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} \\ &= 2i\operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\right) \\ &= 2i\sin\theta. \end{aligned}$$

On divise par $2i$:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Angle moitié et linéarisation

Factoriser par l'angle moitié

Devine : Le module d'une somme

Quel est le module de $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$?

A. 1

Juste.

$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de module 1.

B. 2

Faux.

2 est la somme des modules ; le module d'une somme ne s'obtient pas ainsi (inégalité triangulaire).

C. 0

Faux.

La somme serait nulle si $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ valait -1, ce qui demanderait l'angle π.

Indice 1

Écris $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sous forme algébrique.

Correction

On a $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc :

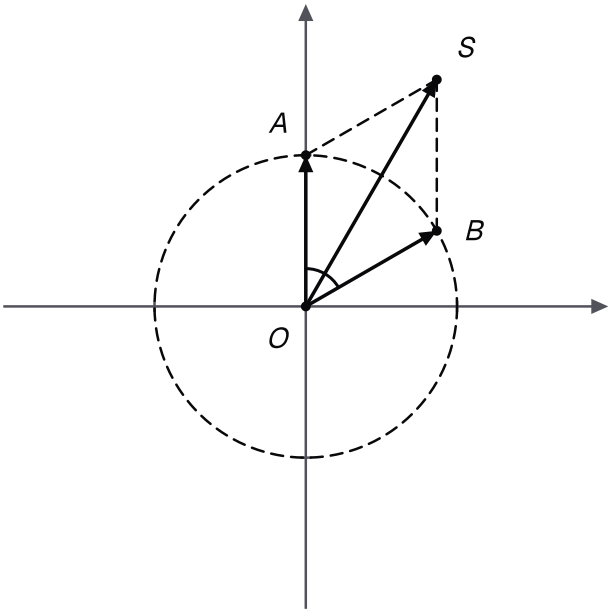
$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Son module vaut $\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$.

Le calcul a demandé la forme algébrique : la suite donne un raccourci.

Pour une somme $e^{ia} + e^{ib}$, on met en facteur l'angle moyen $\dfrac{a+b}{2}$. Pourquoi ?

Les deux termes deviennent alors symétriques autour de cet angle. Leur somme se transforme en cosinus par la formule d'Euler.



La somme de deux nombres de module 1 est la diagonale d'un losange, portée par l'angle moyen.

Propriété : Factorisation par l'angle moitié

Pour tous réels a et b : $e^{ia}+e^{ib}=2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$ et $e^{ia}-e^{ib}=2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$. En particulier, pour tout réel θ, $1+e^{i\theta}=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration

Posons $m=\dfrac{a+b}{2}$ et $d=\dfrac{a-b}{2}$: alors $a=m+d$ et $b=m-d$. **Étape 1.** Par F19, $e^{ia}=e^{im}e^{id}$ et $e^{ib}=e^{im}e^{-id}$. **Étape 2.** Donc $e^{ia}+e^{ib}=e^{im}\left(e^{id}+e^{-id}\right)$ et $e^{ia}-e^{ib}=e^{im}\left(e^{id}-e^{-id}\right)$. **Étape 3.** Par F21, $e^{id}+e^{-id}=2\cos d$ et $e^{id}-e^{-id}=2i\sin d$, d'où les deux formules. **Étape 4.** Le cas particulier s'obtient avec $a=\theta$ et $b=0$, car $e^{i0}=1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit $a=m+d$ et $b=m-d$, avec l'angle moyen m et le demi-écart d, puis on met e^{im} en facteur.

Euler transforme ensuite $e^{id}+e^{-id}$ en $2\cos d$, et $e^{id}-e^{-id}$ en $2i\sin d$.

Vérifie : Le cas particulier

À l'étape 4, quel choix de a et b donne la formule de $1+e^{i\theta}$?

A. $a=1$ et $b=\theta$, car le premier terme vaut 1.
Faux.

Tu as confondu le nombre 1 et l'angle : $e^{i\times 1}\neq 1$.

B. $a=\theta$ et $b=\pi$, car $e^{i\pi}$ est réel.

Faux.

$e^{i\pi}=-1$: on obtiendrait $e^{i\theta}-1$, pas $1+e^{i\theta}$.

C. $a=\theta$ et $b=0$, car e^{i0} vaut 1.

Juste.

Alors $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{\theta}{2}$.

Indice 1

Quel angle b donne $e^{ib}=1$?

Correction

On prend $a=\theta$ et $b=0$: comme $e^{i0}=1$, on a $e^{ia}+e^{ib}=1+e^{i\theta}$.

La formule donne alors, pour tout réel θ :

$$1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Méthode : un paramètre et un signe

Méthode : module et argument par l'angle moitié

Pour une expression qui dépend d'un réel θ :

1. **Écrire** l'expression comme $e^{ia}+e^{ib}$ ou $e^{ia}-e^{ib}$.
2. **Factoriser** par $e^{i\frac{a+b}{2}}$ (angle moitié).
3. **Étudier le signe** du facteur réel sur l'intervalle donné.
4. **Conclure** : s'il est strictement positif, c'est le module ; s'il est strictement négatif, le module est son opposé et on ajoute π à l'argument ; s'il est nul, l'expression est nulle et n'a pas d'argument.

Rédaction attendue : « Pour θ dans l'intervalle donné, ce facteur est strictement positif (ou strictement négatif), donc… »

Exemple : Exemple rédigé

Soit $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ et $w=e^{3i\theta}+e^{i\theta}$.

Factorisation. L'angle moyen vaut 2θ et le demi-écart θ :

$$w=2\cos\theta\,e^{2i\theta}.$$

Signe. Sur cet intervalle, $\cos\theta<0$. Comme $e^{i\pi}=-1$, on écrit :

$$w=(-2\cos\theta)\,e^{i(2\theta+\pi)},$$

avec $-2\cos\theta > 0$.

Conclusion. $|w| = -2\cos\theta$ et $\arg w \equiv 2\theta + \pi\ [2\pi]$.

Linéariser

Devine : Un carré à développer

On pose $u = e^{i\theta}$ et $v = e^{-i\theta}$, de sorte que $uv = 1$. Que vaut $(u+v)^2$?

A. $e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}$

Juste.
$u^2 = e^{2i\theta}$, $v^2 = e^{-2i\theta}$ et le double produit vaut $2uv = 2$.

B. $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}$

Faux.
Le double produit $2uv$ a disparu : $(u+v)^2 \neq u^2 + v^2$.

C. $e^{i\theta^2} + 2 + e^{-i\theta^2}$

Faux.
$\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta}$ par Moivre : c'est l'angle qui double, il n'est pas élevé au carré.

Indice 1
Développe $(u+v)^2$ avec l'identité remarquable, puis utilise $uv = 1$.

Correction
On développe :

$$\begin{aligned}(u+v)^2 &= u^2 + 2uv + v^2 \\ &= e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}.\end{aligned}$$

Avec Euler, cela vaut $2\cos(2\theta) + 2$. Comme $u + v = 2\cos\theta$, on obtient, pour tout réel θ :

$$4\cos^2\theta = 2 + 2\cos(2\theta).$$

Une expression **linéarisée** n'a plus de puissance de $\cos$ ou de $\sin$: seulement des $\cos(k\theta)$ et des $\sin(k\theta)$.

Pourquoi est-ce possible ? Euler écrit $\cos\theta$ avec des exponentielles, et leurs puissances ajoutent les angles.

Les exposants restent explicites, au plus 4, et se développent pas à pas.

Propriété : Linéarisation et développement : exposants 2 et 3

Pour tout réel θ : $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$, $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, $\cos^3\theta = \dfrac{3\cos\theta + \cos(3\theta)}{4}$ et $\sin^3\theta = \dfrac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$: ce sont des **linéarisations**. Inversement, $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$: ce sont des **développements**.

Démonstration

Étape 1. Par F21, $\cos^3\theta = \dfrac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3}{8}$. L'identité $(u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$ et F19 donnent $\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3 = \left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) = 2\cos(3\theta)+6\cos\theta$. **Étape 2.** De même, $\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3 = 2i\sin(3\theta)-6i\sin\theta$ et $(2i)^3 = -8i$, d'où $\sin^3\theta$. Pour les carrés, $\left(e^{i\theta}\pm e^{-i\theta}\right)^2 = 2\cos(2\theta)\pm 2$; on divise par 4 et par $(2i)^2=-4$. **Étape 3.** Posons $c=\cos\theta$ et $s=\sin\theta$. Par F20, $\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = (c+is)^3 = \left(c^3-3cs^2\right)+i\left(3c^2s-s^3\right)$. Par F02, on identifie ; puis on remplace s^2 par $1-c^2$, et c^2 par $1-s^2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour linéariser, on passe par Euler, on développe avec une identité explicite, puis on rassemble $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$.

Pour développer $\cos(3\theta)$, on part de Moivre et on identifie parties réelles et imaginaires.

Vérifie : Le droit d'identifier

À l'étape 3, on identifie les parties réelles de $\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)$ et de $\left(c^3-3cs^2\right)+i\left(3c^2s-s^3\right)$. Pourquoi est-ce permis ?

A. Parce que $(c+is)^3$ est un nombre réel.

Faux.
C'est un nombre complexe en général : pour $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, il vaut i.

B. Parce que c, s, $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ sont réels.

Juste.
Les deux écritures sont alors des formes algébriques : leur unicité permet d'identifier.

C. Parce que $\cos(3\theta)$ est toujours égal à $\cos^3\theta$.

Faux.
C'est faux : pour $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\cos\pi=-1$ alors que $\cos^3\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{8}$.

Indice 1
L'unicité de la forme algébrique exige des parties réelles. Lesquelles sont en jeu ?

Correction
Les nombres $\cos(3\theta)$, $\sin(3\theta)$, c^3-3cs^2 et $3c^2s-s^3$ sont réels, car c et s le sont. Les deux membres sont donc des formes algébriques.

Leur unicité donne :

$$\cos(3\theta) = c^3-3cs^2,$$
$$\sin(3\theta) = 3c^2s-s^3.$$

Méthode : linéariser et développer

Méthode : linéariser ou développer

Linéariser.

1. Remplacer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par les formules d'Euler.
2. Développer avec une identité explicite.
3. Rassembler $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$ en $2\cos(k\theta)$ ou $2i\sin(k\theta)$.

Développer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$.

1. Écrire $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ (Moivre).
2. Développer.
3. Identifier les parties réelles et imaginaires.

Rédaction attendue : « D'après les formules d'Euler, … ; en développant, … ; donc, pour tout réel θ, … »

Exemple : Exemples rédigés

Linéariser $\sin^2\theta\cos\theta$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On pose $u=e^{i\theta}$ et $v=e^{-i\theta}$, de sorte que $uv=1$. Par les formules d'Euler :

$$\sin^2\theta=-\frac{u^2-2+v^2}{4},$$
$$\cos\theta=\frac{u+v}{2}.$$

Comme $uv=1$, $(u^2-2+v^2)(u+v)=u^3-u-v+v^3$. Or $u^3+v^3=2\cos(3\theta)$ et $u+v=2\cos\theta$. Donc :

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta\cos\theta\\&=-\frac{2\cos(3\theta)-2\cos\theta}{8}\\&=\frac{\cos\theta-\cos(3\theta)}{4}.\end{aligned}$$

Développer $\sin(4\theta)$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$, $c=\cos\theta$ et $s=\sin\theta$. Par la formule de Moivre, $\cos(4\theta)+i\sin(4\theta)=(c+is)^4$. On calcule pas à pas :

$$(c+is)^2=c^2-s^2+2ics,$$

puis :

$$\begin{aligned}(c+is)^4=&\left(c^2-s^2\right)^2-4c^2s^2\\&+4ics\left(c^2-s^2\right).\end{aligned}$$

Comme c et s sont réels, les parties imaginaires donnent :

$$\sin(4\theta) = 4cs\left(c^2 - s^2\right).$$

Second degré à coefficients réels et racines carrées

Du réel au complexe

Remarque : Petit rappel : le second degré dans les réels

Soit a, b, c des réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a :

- deux solutions si $\Delta > 0$;
- une seule si $\Delta = 0$;
- aucune si $\Delta < 0$.

Tout repose sur la forme canonique : pour tout réel x,

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Devine : Un discriminant négatif

Pour $z^2 + 10z + 34 = 0$, on trouve $\Delta = 100 - 136 = -36$, et $-36 = (6i)^2$. En imitant la formule réelle, quelles solutions obtiens-tu dans $\mathbb{C}$?

A. $-5 + 3i$ et $-5 - 3i$

Juste.
$\dfrac{-10 \pm 6i}{2} = -5 \pm 3i.$

B. $5 + 3i$ et $5 - 3i$

Faux.
La formule commence par $-b = -10$: le signe de b a été oublié.

C. $-10 + 6i$ et $-10 - 6i$

Faux.
Il manque la division par $2a = 2$.

Indice 1

Dans la formule du cas réel, remplace le nombre dont le carré vaut Δ par $6i$: $z = \dfrac{-b \pm 6i}{2a}$.

Correction

On obtient $z = \dfrac{-10 - 6i}{2} = -5 - 3i$ ou $z = \dfrac{-10 + 6i}{2} = -5 + 3i$.

Vérification pour $-5 + 3i$:

$$
\begin{aligned}
&(-5+3i)^2 + 10(-5+3i) + 34 \\
&= 16 - 30i - 50 + 30i + 34 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Coefficients réels

La forme canonique ne dépend pas du signe de Δ. Pourquoi la formule marche-t-elle encore si $\Delta < 0$?

Il suffit d'écrire Δ comme un carré, $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$, puis de factoriser une différence de deux carrés.

Théorème : Équation du second degré à coefficients réels

Soient a, b, c des réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a : si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; si $\Delta = 0$, une seule solution, $-\dfrac{b}{2a}$; si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées $\dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Dans tous les cas, pour tout z de $\mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, où z_1 et z_2 sont les solutions, égales lorsque $\Delta = 0$.

Démonstration

Étape 1 (forme canonique). Comme $a \neq 0$, pour tout z : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$. **Étape 2.** Posons $\delta = \sqrt{\Delta}$ si $\Delta \geq 0$ et $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta < 0$: dans les deux cas, $\delta^2 = \Delta$. **Étape 3.** Alors $az^2 + bz + c = a\left(z + \dfrac{b+\delta}{2a}\right)\left(z + \dfrac{b-\delta}{2a}\right) = a(z - z_1)(z - z_2)$, avec $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$. **Étape 4.** Comme $a \neq 0$, l'équation équivaut à $(z - z_1)(z - z_2) = 0$; la règle du produit nul (FO3) donne les solutions z_1 et z_2. Si $\Delta > 0$, δ est un réel non nul : z_1 et z_2 sont réels et distincts. Si $\Delta = 0$, $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Si $\Delta < 0$, $z_2 = \overline{z_1}$, car a et b sont réels (FO7).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On factorise une différence de deux carrés dès qu'on a un nombre δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Ensuite, la règle du produit nul donne les solutions.

Vérifie : Des solutions conjuguées

À l'étape 4, pourquoi a-t-on $z_2 = \overline{z_1}$ lorsque $\Delta < 0$?

A. Parce que Δ est négatif, ce qui suffit toujours à rendre les solutions conjuguées.
Faux.
La condition sur les coefficients est oubliée : avec des coefficients non réels, $\Delta < 0$ ne suffit pas.

B. Parce que a et b sont réels, et que $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ est imaginaire pur.

Juste.

Alors $\overline{z_1} = \dfrac{-b-\overline{\delta}}{2a} = \dfrac{-b+\delta}{2a} = z_2$.

C. Parce que $a \neq 0$, ce qui permet de diviser par $2a$ dans les deux formules.

Faux.

$a \neq 0$ sert à diviser ; il ne dit rien des conjugués.

Indice 1

Calcule le conjugué de $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$: que deviennent a, b et δ ?

Correction

Comme a et b sont réels, $\overline{z_1} = \dfrac{-b-\overline{\delta}}{2a}$.

Or $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ est imaginaire pur, donc $\overline{\delta} = -\delta$. Ainsi :

$$\overline{z_1} = \frac{-b+\delta}{2a} = z_2.$$

Exemple **: Contre-exemples : deux hypothèses**

Coefficients réels. Prends $z^2 - iz = 0$: $a = 1, b = -i, c = 0$. Alors $\Delta = (-i)^2 - 0 = -1$ est un réel négatif.

Pourtant les solutions sont 0 et i : elles ne sont pas conjuguées, puisque $\overline{i} = -i$.

Condition $a \neq 0$. Soit $m \in \mathbb{R}$ et l'équation $(m-1)z^2 + 2z + 1 = 0$. Si $m = 1$, elle devient $2z + 1 = 0$: une seule solution, $-\dfrac{1}{2}$, et la formule du second degré n'a pas de sens.

On traite toujours à part les valeurs du paramètre qui annulent a.

Racines carrées

Devine : Un carré égal à 18i

Lequel de ces nombres a pour carré $18i$?

A. $3 - 3i$

Faux.

$(3-3i)^2 = 9 - 18i - 9 = -18i$: le signe de la partie imaginaire compte.

B. $3i\sqrt{2}$

Faux.

$\left(3i\sqrt{2}\right)^2 = -18$: tu as cherché une racine de 18 et ajouté i.

C. $3 + 3i$

Juste.

$(3+3i)^2 = 9 + 18i + 9i^2 = 18i$.

Indice 1
Élève chaque proposition au carré.

Correction
$(3+3i)^2 = 9+18i+9i^2 = 18i$. Les deux autres donnent $-18i$ et -18.

Définition : Racine carrée d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe. On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = Z$. La notation $\sqrt{x}$ reste réservée aux réels x positifs.

Exemple

Quelques racines carrées :

- -9 a pour racines carrées $3i$ et $-3i$;
- 4 a pour racines carrées 2 et -2 ; seule 2 s'écrit $\sqrt{4}$;
- le nombre 0 n'a qu'une racine carrée : 0.

Exactement deux racines

Pourquoi un nombre non nul a-t-il toujours exactement deux racines carrées ?

Si δ convient, $-\delta$ aussi, puisque $(-\delta)^2 = \delta^2$. Et deux carrés égaux donnent un produit nul.

Théorème : Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul Z a exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre. Si $Z = re^{i\theta}$ avec r réel strictement positif et θ réel, ce sont $\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$. Le nombre 0 a une seule racine carrée : 0.

Démonstration
Soit $Z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$. **Étape 1.** Posons $\delta_0 = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$. Par F19, $\delta_0^2 = r\,e^{i\theta} = Z$, et $(-\delta_0)^2 = \delta_0^2 = Z$. Comme $\delta_0 \neq 0$, les nombres δ_0 et $-\delta_0$ sont distincts. **Étape 2.** Si $\delta^2 = Z$, alors $\delta^2 - \delta_0^2 = (\delta - \delta_0)(\delta + \delta_0) = 0$; un produit nul a un facteur nul (F03), donc $\delta = \delta_0$ ou $\delta = -\delta_0$. **Étape 3.** Si $\delta^2 = 0$, alors $|\delta|^2 = |\delta^2| = 0$ (F10), donc $\delta = 0$: 0 a une seule racine carrée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autre, on écrit :

$$\delta^2 - \delta_0^2 = (\delta - \delta_0)(\delta + \delta_0).$$

Le produit nul fait le reste : à cette étape, aucun radical n'est nécessaire.

Vérifie : Deux racines distinctes

À l'étape 1, pourquoi les nombres δ_0 et $-\delta_0$ sont-ils distincts ?

A. Parce que l'un est positif et l'autre négatif.

Faux.

On ne compare pas des nombres complexes non réels : δ_0 n'a pas de signe en général.

B. Parce que $\delta_0 \neq 0$, et seul 0 est égal à son opposé.

Juste.

Si $\delta_0 = -\delta_0$, alors $2\delta_0 = 0$, donc $\delta_0 = 0$.

C. Parce que leurs carrés sont deux nombres différents.

Faux.

Leurs carrés sont égaux : tous deux valent Z.

Indice 1

Un nombre égal à son opposé : que vaut-il ?

Correction

Si $\delta_0 = -\delta_0$, alors $2\delta_0 = 0$, donc $\delta_0 = 0$.

Or $\delta_0 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ a pour module $\sqrt{r} > 0$: il est non nul. Les deux nombres sont donc distincts.

Méthode : racines carrées sous forme algébrique

Méthode : racines carrées sous forme algébrique

Pour $Z = A + iB$ non nul, on cherche $\delta = x + iy$, avec x et y réels.

1. **Identifier** dans $\delta^2 = Z$: $x^2 - y^2 = A$ et $2xy = B$ (unicité de la forme algébrique).
2. **Ajouter** l'égalité des modules : $x^2 + y^2 = |Z|$.
3. **En déduire** x^2 et y^2.
4. **Choisir les signes** de x et y avec le signe de $B = 2xy$.
5. **Conclure** par deux racines opposées, et vérifier $\delta^2 = Z$.

Rédaction attendue : « Soit $\delta = x + iy$; $\delta^2 = Z$ équivaut à… ; donc les racines carrées de Z sont… »

Exemple : Exemple rédigé

Cherchons les racines carrées de $Z = -15 + 8i$. Soit $\delta = x + iy$, avec x et y réels. On a $|Z| = \sqrt{225 + 64} = 17$.

Si $\delta^2 = Z$, alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

donc $x^2 = 1$ et $y^2 = 16$. Comme $2xy = 8 > 0$, x et y ont le même signe.

Les racines carrées sont $1 + 4i$ et $-1 - 4i$. Vérification :

$$\begin{aligned} (1 + 4i)^2 &= 1 + 8i - 16 \\ &= -15 + 8i. \end{aligned}$$

À toi : deux racines carrées

Cherche les racines carrées de $Z = -45 + 28i$, en suivant la méthode.

Indice 1
Calcule $|Z| = \sqrt{45^2 + 28^2}$: c'est un entier.
Indice 2
Le système donne $x^2 - y^2 = -45$ et $x^2 + y^2 = 53$.
Indice 3
$2xy = 28 > 0$: x et y ont le même signe.

Réponse
Soit $\delta = x + iy$, avec x et y réels. On a $|Z| = \sqrt{2025 + 784} = \sqrt{2809} = 53$.

Si $\delta^2 = Z$, alors $x^2 - y^2 = -45$ et $x^2 + y^2 = 53$. Donc $x^2 = \dfrac{53 - 45}{2} = 4$ et $y^2 = \dfrac{53 + 45}{2} = 49$.

Comme $2xy = 28 > 0$, x et y ont le même signe : les racines carrées sont $2 + 7i$ et $-2 - 7i$.

Vérification : $(2 + 7i)^2 = 4 + 28i - 49 = -45 + 28i$.

Attention : Un radical mal placé

Le radical est réservé aux réels positifs. N'écris jamais la racine carrée d'un réel négatif ni d'un nombre complexe non réel.

Écris plutôt $-49 = (7i)^2$, puis parle d'**une** racine carrée δ du discriminant.

Second degré à coefficients complexes

Un discriminant complexe

Devine : Une racine carrée de 8 - 6i

Cette section prépare la question la plus fréquente du chapitre. Pour une équation à coefficients complexes, on trouve $\Delta = 8 - 6i$. Lequel de ces nombres a pour carré Δ ?

A. $3 + i$

Faux.
$(3+i)^2 = 8 + 6i$: le signe de la partie imaginaire compte.

B. $\sqrt{8} - i\sqrt{6}$

Faux.
On ne prend pas la racine de chaque partie : $\left(\sqrt{8} - i\sqrt{6}\right)^2 = 2 - 8\sqrt{3}\,i$.

C. $3 - i$

Juste.
$(3-i)^2 = 9 - 6i + i^2 = 8 - 6i$.

Indice 1
Élève chaque proposition au carré, avec $i^2 = -1$.

Correction
On a $(3-i)^2 = 9 - 6i + i^2 = 8 - 6i$. Le nombre $3 - i$ est donc une racine carrée de Δ ; $-3 + i$ en est une autre.

Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ figure dans 15 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), et une équation à paramètre dans 14 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025).

Pour les coefficients réels, le signe de Δ ne servait qu'à fabriquer δ. Pourquoi la même formule vaut-elle avec des coefficients complexes ?

Tout nombre complexe a une racine carrée δ. Le reste de la preuve est identique.

Théorème : Équation du second degré à coefficients complexes

Soient a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, et δ une racine carrée de Δ. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation sont $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$; elles sont distinctes si $\Delta \neq 0$, et égales à $-\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$. Pour tout z de $\mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Démonstration

Étape 1 (forme canonique). Comme $a \neq 0$, pour tout z de $\mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$. **Étape 2.** Puisque $\delta^2 = \Delta$, on factorise une différence de deux carrés : $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2 = \left(z + \dfrac{b+\delta}{2a}\right)\left(z + \dfrac{b-\delta}{2a}\right) = (z - z_1)(z - z_2)$. **Étape 3.** Donc $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$;

comme $a \neq 0$, l'équation équivaut à $(z - z_1)(z - z_2) = 0$, c'est-à-dire, par la règle du produit nul (F03), à $z = z_1$ ou $z = z_2$. **Étape 4.** $z_1 = z_2$ équivaut à $\delta = 0$, c'est-à-dire à $\Delta = 0$ (F26), et alors $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La forme canonique vaut pour tous coefficients complexes, avec $a \neq 0$. L'hypothèse $\delta^2 = \Delta$ sert à écrire une différence de deux carrés.

Vérifie : Deux solutions égales

À l'étape 4, pourquoi $z_1 = z_2$ équivaut-il à $\Delta = 0$?

A. Parce que $z_2 - z_1 = \dfrac{\delta}{a}$, nul seulement si $\delta = 0$.

Juste.

Et $\delta = 0$ équivaut à $\Delta = \delta^2 = 0$.

B. Parce que deux solutions égales ont une somme nulle.

Faux.

Leur somme vaut $-\dfrac{b}{a}$, qui n'est pas nulle en général.

C. Parce que seul $\Delta = 0$ a une racine carrée connue.

Faux.

Tout nombre complexe a une racine carrée : ce n'est pas le point.

Indice 1

Calcule $z_2 - z_1$ avec les deux formules.

Correction

On calcule la différence des deux solutions :

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= \frac{-b + \delta}{2a} - \frac{-b - \delta}{2a} \\ &= \frac{\delta}{a}. \end{aligned}$$

Ce nombre est nul si et seulement si $\delta = 0$. Or $\delta = 0$ équivaut à $\Delta = 0$, puisque $\Delta = \delta^2$ et que $\delta^2 = 0$ entraîne $\delta = 0$ (produit nul).

Somme et produit des solutions

Les deux solutions ne diffèrent que par le signe devant δ. Pourquoi leur somme et leur produit sont-ils si simples ?

En les ajoutant, δ disparaît. En les multipliant, δ n'apparaît plus que par son carré.

Propriété : Somme et produit des solutions

Soient a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$, et z_1, z_2 les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, comptées deux fois lorsqu'elles sont égales. Alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$. Réciproquement, pour tous nombres complexes S, P, u et v : on a $u + v = S$ et $uv = P$ si et seulement si, pour tout z de $\mathbb{C}$, $z^2 - Sz + P = (z - u)(z - v)$.

Démonstration

Étape 1. Par F27, $z_1 + z_2 = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$. **Étape 2.** Pour tous u, v et tout z : $(z - u)(z - v) = z^2 - (u + v)z + uv$. Si $u + v = S$ et $uv = P$, on obtient $z^2 - Sz + P = (z - u)(z - v)$ pour tout z. **Étape 3.** Réciproquement, supposons cette égalité vraie pour tout z. En $z = 0$, elle donne $P = uv$. En $z = 1$, elle donne $1 - S + P = 1 - (u + v) + uv$, d'où $S = u + v$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le sens direct se lit sur les formules des solutions. La réciproque n'identifie pas de coefficients : elle évalue l'égalité en deux valeurs bien choisies.

Vérifie : Le produit des solutions

À l'étape 1, pourquoi le numérateur $b^2 - \delta^2$ vaut-il $4ac$?

A. Parce que $\delta = b$, donc $b^2 - \delta^2 = 0 + 4ac$.

Faux.

δ est une racine carrée de Δ, pas b ; sinon le numérateur serait nul.

B. Parce que $\delta^2 = 4ac$, par la forme canonique.

Faux.

Tu as confondu δ^2 avec $4ac$: c'est $\Delta = b^2 - 4ac$ qui vaut δ^2.

C. Parce que $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Juste.

Donc $b^2 - \delta^2 = b^2 - \big(b^2 - 4ac\big) = 4ac$.

Indice 1

Que vaut δ^2, par définition de δ ?

Correction

Par définition, $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$. Donc $b^2 - \delta^2 = 4ac$, et :

$$z_1 z_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Exemple : somme et produit donnés

Cherchons deux nombres u et v de somme $2i$ et de produit 3.

Équation. Par la somme et le produit des solutions, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2iz + 3 = (z-u)(z-v)$. Par la règle du produit nul, u et v sont les solutions de $z^2 - 2iz + 3 = 0$.

Résolution. On a :

$$\begin{aligned}\Delta &= (2i)^2 - 12 \\ &= -16 = (4i)^2,\end{aligned}$$

d'où $z = \dfrac{2i - 4i}{2} = -i$ ou $z = \dfrac{2i + 4i}{2} = 3i$.

Contrôle. $3i + (-i) = 2i$ et $3i \times (-i) = -3i^2 = 3$.

Ici Δ est un réel négatif, mais les coefficients ne sont pas réels : les solutions ne sont pas conjuguées.

Méthode et rédaction

Attention : Pas de signe pour un nombre non réel

Lorsque les coefficients ne sont pas tous réels, on ne discute jamais selon le signe de Δ : le discriminant peut ne pas être réel.

On cherche une racine carrée δ de Δ, et la formule s'applique dans tous les cas.

Méthode : second degré à coefficients complexes

1. **Identifier** a, b, c et vérifier $a \neq 0$.
2. **Calculer** $\Delta = b^2 - 4ac$. Si l'énoncé donne une expression de Δ, la **vérifier** en développant.
3. **Trouver** une racine carrée δ de Δ : forme évidente, méthode des racines carrées ou forme exponentielle.
4. **Écrire** $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$, puis simplifier.
5. **Contrôler** avec $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Rédaction attendue : « $\Delta = \delta^2$ avec $\delta = \ldots$, donc l'équation a deux solutions : … »

Exemple : Exemple rédigé

Résolvons $z^2 - (4-i)z + 5 - 5i = 0$. Ici $a = 1$, $b = -(4-i)$ et $c = 5 - 5i$.

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (4-i)^2 - 4(5-5i)\\ &= 15 - 8i - 20 + 20i\\ &= -5 + 12i.\end{aligned}$$

Racine carrée. Par la méthode des racines carrées, $\delta = 2+3i$ convient : $(2+3i)^2 = -5+12i$.

Solutions. Comme $a = 1 \neq 0$:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{4 - i - (2+3i)}{2}\\ &= 1 - 2i,\\ z_2 &= \frac{4 - i + 2 + 3i}{2}\\ &= 3 + i.\end{aligned}$$

Contrôle. $z_1 + z_2 = 4 - i$ et $z_1 z_2 = 3 + i - 6i - 2i^2 = 5 - 5i$.

À toi : terminer une résolution

On considère $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$, et l'énoncé donne $\Delta = -3 + 4i$. Vérifie que $\delta = 1 + 2i$ convient, écris les deux solutions, puis contrôle-les par leur somme et leur produit.

Indice 1
Calcule $(1+2i)^2$.
Indice 2
Ici $-b = 3 + 4i$ et $2a = 2$: $z = \dfrac{3 + 4i \pm (1+2i)}{2}$.
Indice 3
Le produit doit valoir $\dfrac{c}{a} = -1 + 5i$.

Réponse
Vérification. $(1+2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i = \Delta$.

Solutions. Comme $a = 1 \neq 0$:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{3 + 4i - (1+2i)}{2}\\ &= 1 + i,\\ z_2 &= \frac{3 + 4i + 1 + 2i}{2}\\ &= 2 + 3i.\end{aligned}$$

Contrôle. $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ et $z_1 z_2 = 2 + 3i + 2i + 3i^2 = -1 + 5i$.

Exemple **: Coin examen : une équation à paramètre**

Point important : quand l'énoncé fournit le discriminant, la question demande de le vérifier. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et l'équation (E), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 2ie^{i\theta} z - 2e^{2i\theta} = 0.$$

1. Vérifier que $\Delta = \left(2e^{i\theta}\right)^2$ (0,25 point).

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(2ie^{i\theta}\right)^2 + 8e^{2i\theta} \\ &= -4e^{2i\theta} + 8e^{2i\theta} \\ &= \left(2e^{i\theta}\right)^2.\end{aligned}$$

2. Résoudre (E) (0,5 point). Comme $a = 1 \neq 0$ et que $\delta = 2e^{i\theta}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, les solutions sont :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2ie^{i\theta} - 2e^{i\theta}}{2} \\ &= (-1+i)e^{i\theta}, \\ z_2 &= \frac{2ie^{i\theta} + 2e^{i\theta}}{2} \\ &= (1+i)e^{i\theta}.\end{aligned}$$

3. Forme exponentielle (0,75 point). On a $-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc :

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)}, \\ z_2 &= \sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}.\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{2} > 0$, ce sont des formes exponentielles.

Contrôle. $z_1 + z_2 = 2ie^{i\theta}$ et $z_1 z_2 = (i^2-1)e^{2i\theta} = -2e^{2i\theta}$.

Équations de degré trois

Une solution connue

Devine : Chercher une solution

Soit $P(z) = z^3 - (4+3i)z^2 + (13+12i)z - 39i$. Lequel de ces nombres est une solution de $P(z) = 0$?

A. $3i$

Juste.
$P(3i) = -27i + (36+27i) + (-36+39i) - 39i = 0$.

B. $-3i$

Faux.
Les coefficients ne sont pas réels : les solutions ne vont pas forcément par paires conjuguées.
Le calcul donne $P(-3i) = 72 - 24i$.

C. 3

Faux.
Le terme $-39i$ fait penser à un facteur 3, mais on teste toujours par le calcul : $P(3) = 30 - 30i$.

Indice 1
Pour tester une valeur, calcule P en ce point, terme à terme.
Indice 2

$(3i)^2 = -9$ et $(3i)^3 = -27i$.

Correction
On remplace z par $3i$:

$$\begin{aligned} P(3i) &= (3i)^3 \\ &\quad - (4+3i)(3i)^2 \\ &\quad + (13+12i)(3i) \\ &\quad - 39i \\ &= -27i + (36+27i) \\ &\quad + (-36+39i) \\ &\quad - 39i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $3i$ est une solution de $P(z) = 0$.

Si $P(z_0) = 0$, on peut écrire, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = P(z) - P(z_0)$.

Pourquoi le facteur $z - z_0$ apparaît-il ? Chaque différence $z^k - z_0^k$ le contient, pour k égal à 1, 2 ou 3.

Propriété : Factorisation par une solution connue

Soit $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, avec a, b, c, d complexes et $a \neq 0$. Si z_0 est un nombre complexe tel que $P(z_0) = 0$, alors, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = (z - z_0)\left(az^2 + \beta z + \gamma\right)$, avec $\beta = az_0 + b$ et $\gamma = az_0^2 + bz_0 + c$.

Démonstration
Comme $P(z_0) = 0$, pour tout z : $P(z) = P(z) - P(z_0) = a\left(z^3 - z_0^3\right) + b\left(z^2 - z_0^2\right) + c(z - z_0)$. **Étape 1.** On factorise : $z^3 - z_0^3 = (z - z_0)\left(z^2 + z_0 z + z_0^2\right)$ et $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. **Étape 2.** Donc $P(z) = (z - z_0)\left[a\left(z^2 + z_0 z + z_0^2\right) + b(z + z_0) + c\right]$. **Étape 3.** En regroupant, le crochet vaut $az^2 + (az_0 + b)z + \left(az_0^2 + bz_0 + c\right)$, c'est-à-dire $az^2 + \beta z + \gamma$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On soustrait $P(z_0) = 0$ pour faire apparaître des différences de puissances. Chacune se factorise par $z - z_0$.

Les coefficients β et γ se lisent ensuite dans le crochet.

Vérifie : L'identité de l'étape 1

Quelle identité la preuve utilise-t-elle à l'étape 1 ?

A. $z^3 - z_0^3 = (z - z_0)^3$

Faux.
Pour $z = 2$ et $z_0 = 1$: $8 - 1 = 7$, alors que $(2-1)^3 = 1$.

B. $z^3 - z_0^3 = (z - z_0)\left(z^2 + z_0 z + z_0^2\right)$
Juste.
En développant : $z^3 + z_0 z^2 + z_0^2 z - z_0 z^2 - z_0^2 z - z_0^3 = z^3 - z_0^3$.

C. $z^3 - z_0^3 = (z - z_0)\left(z^2 - z_0 z + z_0^2\right)$
Faux.
Pour $z = 2$ et $z_0 = 1$, le membre de droite vaut 3, pas 7. Ce signe moins appartient à la factorisation de $z^3 + z_0^3$.

Indice 1
Teste chaque identité avec $z = 2$ et $z_0 = 1$.

Correction
On vérifie en développant : pour tous z et z_0 de $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}&(z - z_0)\left(z^2 + z_0 z + z_0^2\right)\\ &= z^3 - z_0^3.\end{aligned}$$

Avec $z = 2$ et $z_0 = 1$, les deux membres valent 7.

Méthode : degré trois

Méthode : équation de degré trois

1. **Trouver** une solution z_0 : la vérifier si l'énoncé la donne, ou chercher z_0 réel ou imaginaire pur en séparant parties réelle et imaginaire.
2. **Factoriser** : $P(z) = (z - z_0)\left(az^2 + \beta z + \gamma\right)$, avec $\beta = az_0 + b$ et $\gamma = az_0^2 + bz_0 + c$.
3. **Résoudre** l'équation du second degré obtenue.
4. **Conclure** par l'ensemble des solutions, sans oublier z_0.

Rédaction attendue : « Comme $P(z_0) = 0$, on a, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = (z - z_0)(\dots)$; donc $P(z) = 0$ équivaut à… »

Exemple : Exemple rédigé

Reprenons P avec $z_0 = 3i$, $a = 1$, $b = -(4 + 3i)$ et $c = 13 + 12i$.

Coefficients. On trouve $\beta = 3i - 4 - 3i = -4$ et :

$$\begin{aligned}\gamma &= (3i)^2 - (4 + 3i)(3i)\\ &\quad + 13 + 12i\\ &= -9 + (9 - 12i) + 13 + 12i\\ &= 13.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - 3i)\left(z^2 - 4z + 13\right).$$

Second facteur. $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$, d'où $z = 2 - 3i$ ou $z = 2 + 3i$.

Conclusion. Les solutions de $P(z) = 0$ sont $3i$, $2 - 3i$ et $2 + 3i$.

Exemple : Exemple rédigé : une solution imaginaire pure

Cherchons une solution imaginaire pure de $R(z) = 0$, où :

$$\begin{aligned} R(z) = z^3 &+ (-2 + 3i)z^2 \\ &+ (10 - 6i)z + 30i. \end{aligned}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} R(iy) = \big(2y^2 &+ 6y\big) \\ &+ i\big(-y^3 - 3y^2 \\ &+ 10y + 30\big), \end{aligned}$$

où les deux parenthèses sont des réels. Par l'unicité de la forme algébrique, $R(iy) = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} 2y^2 + 6y = 0 \\ -y^3 - 3y^2 + 10y + 30 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $y = 0$ ou $y = -3$.

- Pour $y = 0$, la seconde vaut 30 : on rejette ce cas.
- Pour $y = -3$, elle vaut $27 - 27 - 30 + 30 = 0$.

Conclusion. $-3i$ est la seule solution imaginaire pure de $R(z) = 0$.

À retenir : Le mot du prof

Tu sais maintenant résoudre dans $\mathbb{C}$ toute équation du second degré, même à paramètre, et une équation de degré trois dont une solution est connue. C'est le cœur de la partie algébrique de l'exercice d'examen.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Nombres complexes : calcul et équations » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)