BURHAN

Nombres complexes : géométrie et transformations (résumé)

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes-et-geometrie/resume

Chapitre	Semestre
Nombres complexes : géométrie et transformations	Semestre 2

Racines n-ièmes de l'unité

À retenir : L'essentiel

Une racine n-ième de l'unité est un nombre w tel que $w^n = 1$. Son module vaut forcément 1.

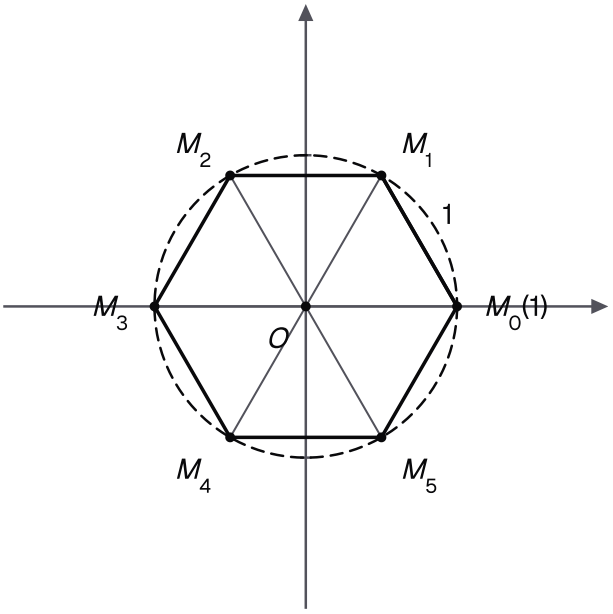
Il y en a exactement n. Leurs images se répartissent régulièrement sur le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition : Racine n-ième d'un nombre complexe ; racines n-ièmes de l'unité

Soient n un entier naturel, $n \geq 2$, et a un nombre complexe. On appelle **racine n-ième** de a tout nombre complexe w tel que $w^n = a$. Les racines n-ièmes de 1 sont appelées **racines n-ièmes de l'unité** ; on note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble.

Théorème : Les n racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \geq 2$ un entier. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ a exactement n éléments : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, notons M_k l'image de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$: ces points sont sur le cercle de centre O et de rayon 1. Pour $n \geq 3$, la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ envoie M_k sur M_{k+1} pour $0 \leq k \leq n-2$, et M_{n-1} sur M_0 : les points $M_0, \ldots, M_{n-1}$ sont les sommets d'un **polygone régulier** à n côtés inscrit dans ce cercle.



Exemple n = 6 : les images des racines sixièmes de l'unité sont les sommets d'un hexagone régulier.

deux racines carrées de l'unité

$$\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$$

trois racines cubiques de l'unité

$$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$$

quatre racines quatrièmes de l'unité

$$\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

écart angulaire entre deux images voisines

$$\frac{2\pi}{n}$$

Propriété : Propriétés de $\mathbb{U}_n$; le nombre j

Soit $n \geq 2$ un entier. On a $1 \in \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. Pour tous w et w' de $\mathbb{U}_n$: $ww' \in \mathbb{U}_n$, et $\frac{1}{w} = \overline{w}$, qui appartient à $\mathbb{U}_n$. La somme des n éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle. Pour $n = 3$, on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$: $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, $j^3 = 1, \overline{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Exemple : puissances de j

Pour réduire une puissance de j, divise l'exposant par 3 et garde le reste.

Ainsi $100 = 3 \times 33 + 1$, donc $j^{100} = \left(j^3\right)^{33} j = j$.

De même, $1 + j = -j^2$, car $1 + j + j^2 = 0$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Rappel : pour un entier $n \geq 2$ et un réel $r > 0$, on note $\sqrt[n]{r}$ l'unique réel positif dont la puissance n-ième vaut r.

Par exemple, $\sqrt[4]{81} = 3$.

Théorème : Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Soient $n \geq 2$ un entier et $a = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul, avec r réel strictement positif et θ réel. Posons $w_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$. Alors a a exactement n racines n-ièmes : les nombres $w_0 u$, $u \in \mathbb{U}_n$, c'est-à-dire les nombres $\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Pour $n \geq 3$, leurs images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Méthode : résoudre $z^n = a$

1. Vérifie que $a \neq 0$, puis écris $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$.
2. Pose $w_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$ et contrôle $w_0^n = a$ par la formule de Moivre.
3. Écris les n solutions : $\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, pour k entier de 0 à $n-1$.
4. Interprète : pour $n \geq 3$, un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Rédaction attendue : « On a $a \neq 0$ et $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. D'après le théorème des racines n-ièmes, l'équation admet exactement n solutions, qui sont … »

Attention : Piège : une seule solution trouvée

Diviser l'argument par n ne fournit qu'**une** solution. Les autres viennent en ajoutant $\dfrac{2k\pi}{n}$ à son argument.

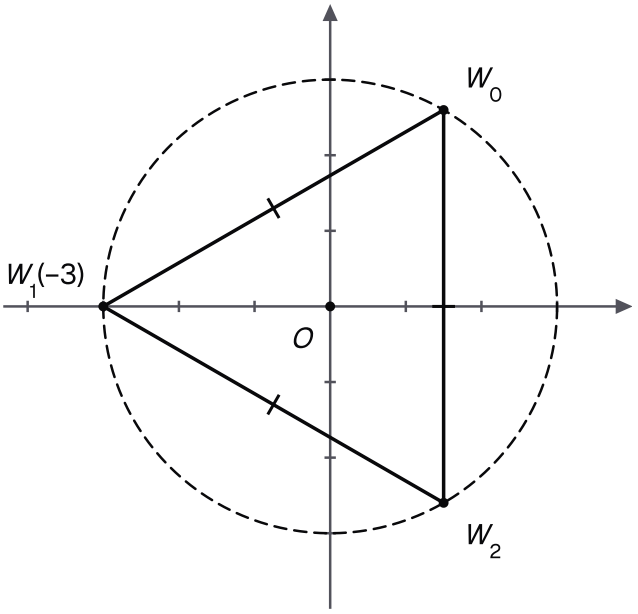
Compte-les : il en faut n, ni plus ni moins.

Exemple

On résout $z^3 = -27$. Ici $-27 = 27e^{i\pi}$, avec $27 > 0$ et $\sqrt[3]{27} = 3$.

Les trois solutions sont $3e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{i\pi} = -3$ et $3e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Sur le cercle de centre O et de rayon 3, leurs images dessinent un triangle équilatéral.



Les racines cubiques de −27 sur le cercle de rayon 3 : un triangle équilatéral dont un sommet est −3.

Remarque : Pourquoi a doit être non nul

L'hypothèse $a \neq 0$ compte. L'équation $z^n = 0$ n'a qu'une solution, $z = 0$, et non n.

De plus, 0 n'a pas d'argument : l'écriture $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ est impossible.

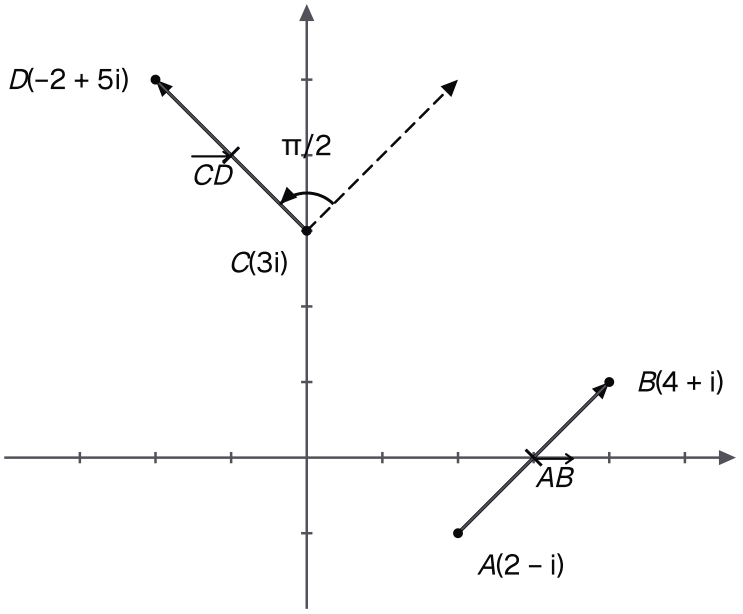
Angles, distances et quotients d'affixes

À retenir : L'essentiel

Le quotient $q = \dfrac{c-a}{b-a}$ porte deux informations. Son module donne le rapport $\dfrac{AC}{AB}$. Son argument donne l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Propriété : Angle orienté et quotient d'affixes

Soient A, B, C, D des points d'affixes a, b, c, d, avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) \ [2\pi]$ et $\left|\dfrac{d-c}{b-a}\right| = \dfrac{CD}{AB}$. En particulier, si $A \neq B$ et $A \neq C$: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \ [2\pi]$ et $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{AC}{AB}$.



Un angle entre deux vecteurs sans origine commune, lu sur le quotient (d − c)/(b − a) = i.

Propriété : Alignement et orthogonalité

Soient A, B, C des points d'affixes a, b, c, avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel. Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

points A, B, C alignés

$$q \in \mathbb{R}$$

droites (AB) et (AC) perpendiculaires

$$q \text{ imaginaire pur}$$

triangle ABC isocèle en A

$$|q| = 1$$

triangle ABC rectangle isocèle en A

$$q = i \text{ ou } q = -i$$

triangle ABC équilatéral

$$q = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } q = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Méthode : alignement, orthogonalité, nature d'un triangle

1. Vérifie que $A \neq B$ et $A \neq C$: le quotient existe.
2. Calcule $q = \dfrac{c-a}{b-a}$, sous forme algébrique ou exponentielle.
3. Lis le résultat dans la grille ci-dessus.
4. Conclus par une phrase géométrique.

Rédaction attendue : « Les points sont distincts et $\dfrac{c-a}{b-a} = i$. Donc $\dfrac{AC}{AB} = |i| = 1$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A. »

Attention : Piège : l'ordre des points

Le quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$ a pour argument $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, et non $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$.

Échanger B et C change le signe de l'angle.

Exemple

Soient $a = -2 + i$, $b = 1 + 2i$ et $c = -3 + 4i$. On a $b - a = 3 + i$ et $c - a = -1 + 3i$, tous deux non nuls.

Comme $i(3 + i) = -1 + 3i$, on obtient $\dfrac{c-a}{b-a} = i$.

Le triangle ABC est donc rectangle isocèle en A.

Remarque : Pourquoi les points doivent être distincts

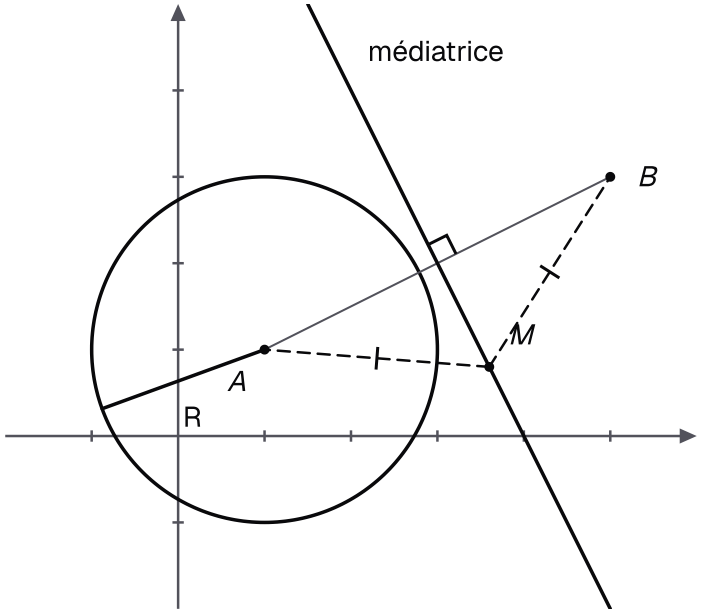
Si $B = A$, le dénominateur $b - a$ est nul et le quotient n'existe pas. Si $C = A$, le quotient vaut 0, qui n'a pas d'argument.

Vérifie donc les deux conditions avant de calculer.

Ensembles de points

Propriété : Cercle et médiatrice décrits par des modules

Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b, et R un réel strictement positif. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - a| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - a| = |z - b|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.



Deux ensembles décrits par des modules : un cercle de centre A, une médiatrice de [AB].

Méthode : déterminer un ensemble de points

1. Traduis la condition : $|z-a|$ est la distance AM ; l'argument d'un quotient est un angle.
2. Identifie la figure obtenue : cercle, médiatrice, droite ou demi-droite.
3. Retire les points interdits : dénominateur nul, nombre nul sans argument.
4. Sinon, pose $z=x+iy$, avec x et y réels, et cherche une équation cartésienne.

Rédaction attendue : « M appartient à l'ensemble si et seulement si $AM=BM$. C'est donc la médiatrice du segment $[AB]$. »

Exemple

La condition $|z-1+3i|=2$ s'écrit $|z-(1-3i)|=2$. C'est le cercle de centre le point d'affixe $1-3i$ et de rayon 2.

La condition $|z-4|=|z+2i|$ s'écrit $|z-4|=|z-(-2i)|$. Elle décrit la médiatrice du segment joignant les points d'affixes 4 et $-2i$.

Remarque : Le rayon R > 0

Le rayon doit être strictement positif.

Aucun point ne vérifie $|z-a|=-1$. Et $|z-a|=0$ ne décrit que le point A.

Affixe d'un barycentre

Rappel : si $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre G de (A, α) et (B, β) est l'unique point tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Propriété : Affixe du barycentre

Soient $n \geq 2$ un entier, $A_1, \ldots, A_n$ des points d'affixes $z_1, \ldots, z_n$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. Le barycentre G des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.

Exemple

Affectons $A(2 - i)$ du coefficient 1 et $B(-1 + 5i)$ du coefficient 2. La somme vaut 3, non nulle.

Le barycentre a pour affixe $\dfrac{(2 - i) + 2(-1 + 5i)}{3} = \dfrac{9i}{3} = 3i$.

L'isobarycentre de trois points a pour affixe $\dfrac{a + b + c}{3}$.

Attention : Piège : somme des coefficients nulle

Si la somme des coefficients est nulle, le barycentre n'existe pas. La formule diviserait par zéro.

Vérifie toujours cette somme d'abord.

Quatre points cocycliques

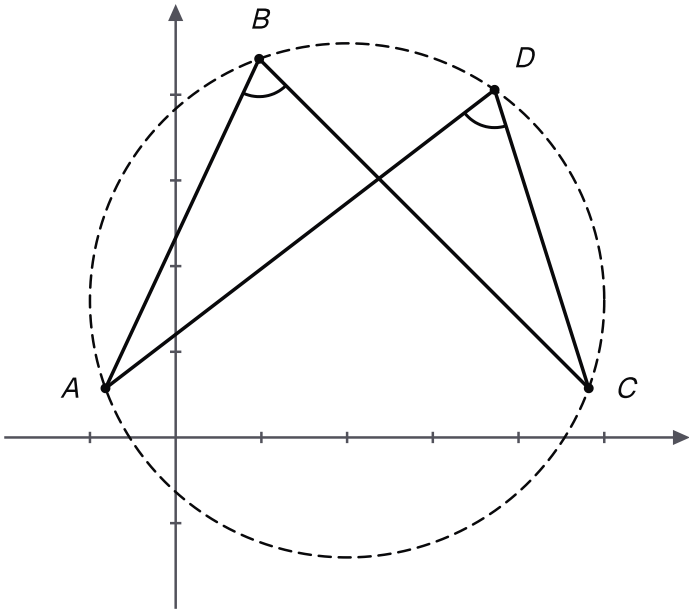
À retenir : L'essentiel

Pour prouver que quatre points sont sur un même cercle, tu montres qu'un certain produit de deux quotients est réel.

Mais ce produit est aussi réel pour quatre points alignés : le non-alignement se prouve à part.

Théorème : Cocyclicité de quatre points

Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts, d'affixes a, b, c, d, tels que A, B, C ne soient pas alignés. Les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle si et seulement si le nombre $\dfrac{c - b}{a - b} \times \dfrac{a - d}{c - d}$ est réel.



Quatre points sur un cercle : le segment [AC] est vu sous le même angle depuis B et depuis D.

Méthode : prouver une cocyclicité

1. Vérifie que les quatre points sont deux à deux distincts.
2. Montre que A, B, C ne sont pas alignés : $\dfrac{c-a}{b-a}$ n'est pas réel.
3. Calcule $Q = \dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d}$ et montre que Q est réel.
4. Conclus en citant les deux hypothèses du théorème.

Rédaction attendue : « Les points sont deux à deux distincts, A, B, C ne sont pas alignés et Q est réel. D'après le théorème de cocyclicité, A, B, C, D sont sur un même cercle. »

Attention : Piège : oublier le non-alignement

Un quotient Q réel ne suffit pas. Sans le non-alignement de A, B, C, ta conclusion n'est pas justifiée.

Exemple : Contre-exemple : quatre points alignés

Prends $a = 1, b = 2, c = 4$ et $d = 5$. Alors $Q = \dfrac{4-2}{1-2} \times \dfrac{1-5}{4-5} = (-2) \times 4 = -8$, qui est réel.

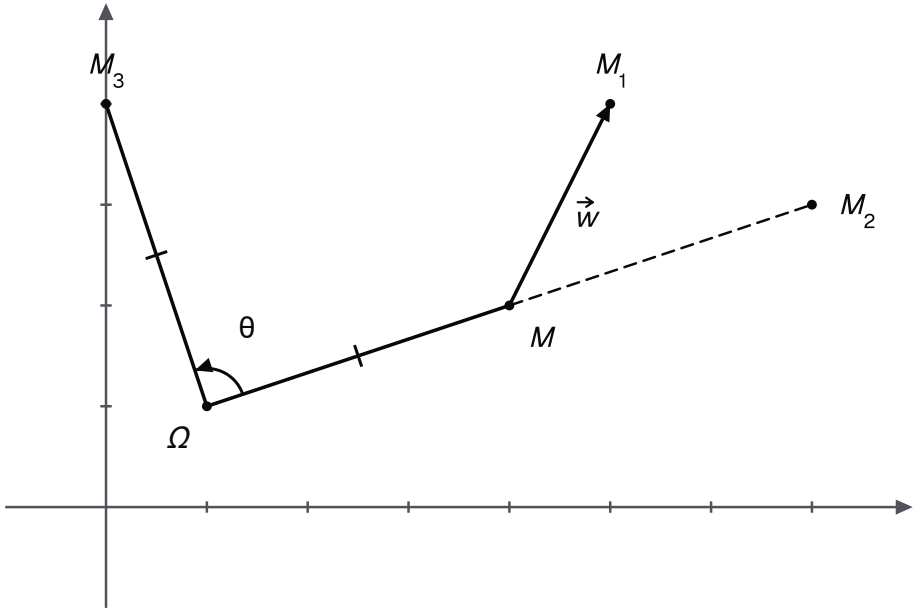
Pourtant ces quatre points sont sur l'axe réel : aucun cercle ne passe par eux.

Écritures complexes des transformations

Rappel : la rotation de centre Ω et d'angle θ laisse Ω fixe. Pour $M \neq \Omega$, son image M' vérifie $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Propriété : Écritures complexes des transformations usuelles

Soit M', d'affixe z', l'image du point M d'affixe z. Par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b : $z' = z + b$. Par l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k, réel non nul : $z' - \omega = k(z - \omega)$. Par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. La symétrie de centre Ω est l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 : $z' - \omega = -(z - \omega)$.



Un même point M et ses images par une translation, une homothétie de rapport 2 et une rotation de centre Ω.

translation de vecteur d'affixe b	homothétie de centre d'affixe ω et de rapport k
$z' = z + b$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
rotation de centre d'affixe ω et d'angle θ	**symétrie de centre d'affixe ω**
$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$	$z' - \omega = -(z - \omega)$

Propriété : Transformation d'écriture z' = αz + β

Soient α et β des nombres complexes avec $\alpha \neq 0$, et f la transformation du plan qui, au point d'affixe z, associe le point d'affixe $z' = \alpha z + \beta$. Si $\alpha = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe β. Si $\alpha \neq 1$, f a un unique point invariant Ω, d'affixe $\omega = \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$, et $z' - \omega = \alpha(z - \omega)$ pour tout z ; si de plus α est réel, f est l'homothétie de centre Ω et de rapport α ; si $|\alpha| = 1$, f est la rotation de centre Ω et d'angle $\arg \alpha$.

Méthode : reconnaître une transformation

1. Mets l'écriture sous la forme $z' = \alpha z + \beta$.

2. Si $\alpha = 1$, c'est la translation de vecteur d'affixe β.
3. Sinon, calcule $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$. Si α est réel, c'est l'homothétie de centre Ω et de rapport α. Si $|\alpha| = 1$, c'est la rotation de centre Ω et d'angle $\arg \alpha$.
4. Pour une image par une rotation donnée, pars de $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Rédaction attendue : « L'écriture est de la forme $z' = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = i$. Comme $\alpha \neq 1$ et $|\alpha| = 1$, f est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\dfrac{\beta}{1-\alpha}$. »

Attention : Piège : le centre oublié d'un côté

Dans l'écriture d'une rotation de centre Ω, l'affixe ω se retranche **des deux côtés** : à z' et à z. Écrire $z' = e^{i\theta}(z - \omega)$ décrit une autre transformation.

Exemple

Soit f d'écriture $z' = iz + 4$. On a $\alpha = i$, avec $\alpha \neq 1$ et $|i| = 1$. Le centre a pour affixe $\dfrac{4}{1-i} = 2 + 2i$, et l'angle mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Autre cas : la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ envoie le point d'affixe $3 + i$ sur le point d'affixe $1 - i(2 + i) = 2 - 2i$.

Remarque : Pourquoi α doit être différent de 1

Pour $z' = z + 3$, on a $\alpha = 1$: le quotient $\dfrac{\beta}{1-\alpha}$ n'a pas de sens. Cette translation n'a d'ailleurs aucun point invariant.

Vérifie $\alpha \neq 1$ avant de chercher un centre.

Composées de transformations

À retenir : L'essentiel

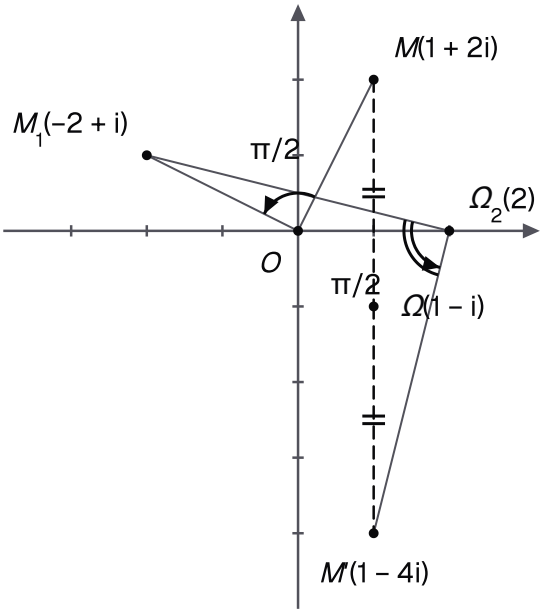
Composer deux transformations d'écritures $z \mapsto \alpha_1 z + \beta_1$ puis $z \mapsto \alpha_2 z + \beta_2$ donne une écriture du même type. Son coefficient est le produit $\alpha_1 \alpha_2$.

Pour deux rotations, les angles s'ajoutent. Une translation ne change pas le coefficient.

Avec un centre commun, une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport k donnent le coefficient $ke^{i\theta}$.

Propriété : Composée de deux rotations

Soient r_1 la rotation de centre Ω_1 et d'angle θ_1, et r_2 la rotation de centre Ω_2 et d'angle θ_2. Si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, la composée $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$. Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ est une translation.



Composer deux rotations d'angle π/2 donne une rotation d'angle π : ici, le symétrique par rapport à Ω.

Méthode : composer par substitution

1. Écris $z_1 = \alpha_1 z + \beta_1$ pour la transformation appliquée en premier.
2. Écris $z' = \alpha_2 z_1 + \beta_2$ pour la seconde.
3. Substitue : $z' = \alpha_1\alpha_2 z + \alpha_2\beta_1 + \beta_2$.
4. Reconnais la composée par la méthode précédente.

Rédaction attendue : « Dans $g \circ f$, on applique d'abord f. Pour tout z, $z' = \ldots$, donc $g \circ f$ est … »

Propriété : Composée d'une translation et d'une rotation ou d'une homothétie

Soit t une translation. Si r est une rotation d'angle θ, avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, les composées $t \circ r$ et $r \circ t$ sont des rotations d'angle θ. Si h est une homothétie de rapport k, avec $k \neq 1$, les composées $t \circ h$ et $h \circ t$ sont des homothéties de rapport k.

Attention : Piège : l'ordre de la composée

Dans $g \circ f$, c'est f qui agit en premier. En général, $g \circ f$ et $f \circ g$ n'ont pas la même écriture : respecte l'ordre écrit.

Propriété : Composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre

Soient r la rotation de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle θ, et h l'homothétie de même centre Ω et de rapport k, réel non nul. Alors $h \circ r = r \circ h$, et cette transformation a pour écriture complexe $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$. Elle laisse Ω invariant et, pour tout point M d'image M', $\Omega M' = |k|\,\Omega M$.

Exemple : l'ordre change le centre

Soient $r : z \mapsto iz$ et $t : z \mapsto z + 2$.

D'une part, $t \circ r : z \mapsto iz + 2$ est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ de centre d'affixe $\dfrac{2}{1-i} = 1 + i$.

D'autre part, $r \circ t : z \mapsto iz + 2i$ a pour centre le point d'affixe $-1 + i$. Les deux composées diffèrent.

Remarque : Angles de somme nulle

Deux rotations d'angles opposés ne donnent pas une rotation.

Avec $z_1 = iz$ puis $z' - 1 = -i(z_1 - 1)$, on trouve $z' = z + 1 + i$: une translation, car $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

Coin examen

À retenir : Ce qui t'attend

Point important : à l'examen, la partie géométrique s'enchaîne en questions courtes.

Tu écris une rotation donnée par son centre et son angle, puis tu calcules l'image d'un point. Ensuite, un quotient réel ou imaginaire pur sert à prouver un alignement, une orthogonalité ou la nature d'un triangle.

Une cocyclicité peut conclure la chaîne.

Méthode : Les hypothèses à citer

Avant chaque conclusion, vérifie l'hypothèse qui la rend légitime :

- un quotient d'affixes : les points sont distincts ;
- l'équation $z^n = a$: $a \neq 0$;
- une cocyclicité : quatre points deux à deux distincts, avec A, B, C non alignés ;
- un centre $\dfrac{\beta}{1-\alpha}$: $\alpha \neq 1$;
- une composée : l'ordre d'application ;
- un barycentre : une somme de coefficients non nulle.

Rédaction attendue : une hypothèse citée, un calcul exact, une phrase géométrique.