BURHAN

Nombres complexes : géométrie et transformations : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes-et-geometrie/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : géométrie et transformations	Niveau examen	5

Exercice 1 3,5 pts

Rotation de centre A et quatre points cocycliques

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = (2-3i)^2$.

INDICE

Calcule $(4+i)^2 - 4(5+5i)$, puis développe $(2-3i)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (E).

INDICE

Utilise les formules des solutions avec une racine carrée $\delta = 2 - 3i$ de Δ.

3. 0,75 pts

On note A et B les points d'affixes $a = 1 + 2i$ et $b = 3 - i$, et R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que l'écriture complexe de R est $z' = iz + 3 + i$, puis vérifier que le point C d'affixe $c = 4 + 4i$ est l'image de B par R.

INDICE

Pars de $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a)$ et développe $a - ia$.

4. 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = i$. En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Traduis $R(B) = C$ par l'écriture de R de centre A.

5. 0,25 pts

Soit D le point d'affixe $d = 6 + 2i$. Vérifier que D est distinct de A, B, C, et justifier que A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Compare les affixes ; pour l'alignement, relis le quotient de la question 4.

6. 0,75 pts

Montrer que $\dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d} = \dfrac{5}{2}$. En déduire que les points A, B, C, D sont cocycliques.

INDICE

Calcule $\dfrac{c-b}{a-b}$ et $\dfrac{a-d}{c-d}$ séparément, avec le conjugué de chaque dénominateur.

7. `0,5 pts`

En utilisant la nature du triangle ABC, déterminer l'affixe du centre Ω de Γ et son rayon.

INDICE

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre son hypoténuse.

Exercice 2 3 pts

Rotation d'angle π/3 et triangle équilatéral

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout réel m, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (F_m) : $z^2 - 2mz + m^2 + 4 = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que, pour tout réel m, le discriminant de (F_m) est $\Delta = (4i)^2$.

INDICE

Calcule $b^2 - 4ac$ avec les coefficients de (F_m) : le paramètre doit disparaître.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (F_m). Pour $m = 2$, écrire la solution de partie imaginaire positive sous forme exponentielle.

INDICE

Les solutions sont conjuguées, de partie réelle m. Pour la forme exponentielle, factorise par le module.

3. 0,5 pts

On note A et B les points d'affixes $a = 2 + 2i$ et $b = 2 - 2i$, et R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Montrer que l'image C de B par R a pour affixe $c = 2 + 2\sqrt{3}$.

INDICE

Écris $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ avec $b - a = -4i$.

4. 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{c - a}{b - a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

INDICE

Relis l'égalité de la question 3, avec $b - a \neq 0$.

5. 0,75 pts

Soit I le point d'affixe 2. Montrer que $\dfrac{c - 2}{a - 2} = -\sqrt{3}\,i$. En déduire que les droites (IA) et (IC) sont perpendiculaires, et que $IC = \sqrt{3}\,IA$.

INDICE

Calcule $a - 2$ et $c - 2$, puis le quotient ; lis ensuite son module et sa nature.

6. 0,5 pts

Montrer que l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $|z - a| = |z - b|$ est l'axe réel. Vérifier que C et I appartiennent à Γ.

INDICE

Pose $z = x + iy$, avec x et y réels, et compare les carrés des deux modules.

Exercice 3 3,5 pts

Rotation, homothétie et médiatrice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On étudie dans $\mathbb{C}$ l'équation (H) : $z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (H) est $\Delta = (3-i)^2$.

INDICE

Calcule $(1+3i)^2 - 4(-4+3i)$, puis développe $(3-i)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (H).

INDICE

Prends $\delta = 3 - i$ comme racine carrée de Δ.

3. 0,5 pts

On note A et B les points d'affixes $a = 2 + i$ et $b = -1 + 2i$, et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Vérifier que $b = ia$. En déduire que $B = R(A)$, puis la nature du triangle OAB.

INDICE

L'écriture de R est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$.

4. 0,75 pts

Soit $C = R(B)$. Montrer que $c = -2 - i$, puis que $\dfrac{a-b}{c-b} = i$. En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Applique R à b. Puis compare $a - b$ à $i(c - b)$.

5. 0,5 pts

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Montrer que h a pour écriture $z' = 2z + 1 - 2i$, puis que $h(A) = A'$ d'affixe 5 et $h(C) = C'$ d'affixe $-3 - 4i$.

INDICE

Pars de $z' - b = 2(z - b)$.

6. 0,5 pts

Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 5| = |z + 3 + 4i|$. Montrer que O et B appartiennent à Γ. En déduire que Γ est la droite (OB).

INDICE

Reconnais une médiatrice, puis calcule les deux modules pour O et pour B.

7. `0,5 pts`

Soit G l'isobarycentre des points B, A', C'. Calculer z_G, puis vérifier que G appartient à Γ.

INDICE

Applique la formule de l'affixe du barycentre, puis compare z_G à b.

Exercice 4 3,75 pts

Rotation reconnue, ensemble de points et carré

Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe est orthonormé direct. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (2+3i)z - 5 + i = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = (4+i)^2$.

INDICE

Développe $(2+3i)^2$, retranche $4(-5+i)$, puis développe $(4+i)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (E).

INDICE

Prends $\delta = 4 + i$ comme racine carrée de Δ.

3. 0,75 pts

On note A et B les points d'affixes $a = -1 + i$ et $b = 3 + 2i$. Soit f la transformation qui, au point d'affixe z, associe le point d'affixe $z' = iz + 2i$. Montrer que f est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

INDICE

Écris $z' = \alpha z + \beta$: regarde le module et un argument de α, puis cherche le point invariant.

4. 0,5 pts

Soit C l'image de B par f, et D le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Vérifier que $c = -2 + 5i$, puis calculer l'affixe d de D.

INDICE

Applique l'écriture de f à b. Pour D, traduis l'égalité de vecteurs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

5. 0,75 pts

Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z, avec $z \neq b$, tels que $\dfrac{z-c}{z-b}$ soit imaginaire pur. Montrer que Γ est le cercle de diamètre $[BC]$ privé du point B. Préciser l'affixe de son centre Ω et son rayon.

INDICE

Traite à part le cas $M = C$. Pour M distinct de B et de C, lis l'argument du quotient comme un angle orienté de sommet M.

6. 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{a-c}{a-b} = i$ et $\dfrac{d-c}{d-b} = -i$. En déduire que A et D appartiennent à Γ.

INDICE

Multiplie chaque quotient par le conjugué de son dénominateur, puis relis la définition de Γ.

7. `0,5 pts`

En déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un carré.

INDICE

Un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux est un carré : cherche ces deux propriétés dans les questions 3 et 6.

Exercice 5 3,5 pts

Rotation de centre O, losange et cercle circonscrit

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On étudie dans $\mathbb{C}$ l'équation (G) : $z^2 - \left(\sqrt{3}+3i\right)z - 2 + 2\sqrt{3}\,i = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (G) est $\Delta = \left(\sqrt{3}-i\right)^2$.

INDICE

Développe $\left(\sqrt{3}+3i\right)^2$, retranche $4\left(-2+2\sqrt{3}\,i\right)$, puis développe $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (G), puis écrire chacune d'elles sous forme exponentielle.

INDICE

Prends $\delta = \sqrt{3}-i$. Pour la forme exponentielle, commence par le module de chaque solution.

3. 0,5 pts

On note A et B les points d'affixes $a = \sqrt{3}+i$ et $b = 2i$, et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Montrer que $R(A) = B$, puis que $OA = OB = AB$.

INDICE

L'écriture de R est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$: utilise les formes exponentielles de la question 2.

4. 0,5 pts

Soit C l'image de B par R. Montrer que $c = -\sqrt{3}+i$.

INDICE

Calcule $e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, puis passe à la forme algébrique.

5. 0,75 pts

Montrer que O est le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,1)$. En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

INDICE

Calcule l'affixe de ce barycentre. Traduis ensuite $a - b + c = 0$ par une égalité de vecteurs, puis compare OA et OC.

6. 0,5 pts

Montrer que B est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle OAC, et donner le rayon de Γ.

INDICE

Calcule les distances BO, BA et BC à l'aide de modules.

7. `0,5 pts`

Soit D le point d'affixe $d = 4i$. Vérifier que $D \in \Gamma$, puis montrer que $\dfrac{d-a}{0-a} = -\sqrt{3}\,i$. En déduire que le triangle OAD est rectangle en A.

INDICE

Calcule BD. Pour le quotient, multiplie par le conjugué du dénominateur.