BURHAN

Nombres complexes : géométrie et transformations : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes-et-geometrie/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : géométrie et transformations	Niveau examen	5

Exercice 1 3,5 pts

Rotation de centre A et quatre points cocycliques

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = (2-3i)^2$.

INDICE

Calcule $(4+i)^2 - 4(5+5i)$, puis développe $(2-3i)^2$.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (4+i)^2 - 4(5+5i)\\ &= 16 + 8i - 1\\ &\quad - 20 - 20i\\ &= -5 - 12i.\end{aligned}$$

Carré. $(2-3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$.

Conclusion. $\Delta = (2-3i)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (E).

INDICE

Utilise les formules des solutions avec une racine carrée $\delta = 2 - 3i$ de Δ.

CORRIGÉ

Comme $\Delta \neq 0$ et que $\delta = 2 - 3i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, l'équation (E) a deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{4 + i + (2 - 3i)}{2}\\ &= 3 - i,\\ z_2 &= \frac{4 + i - (2 - 3i)}{2}\\ &= 1 + 2i.\end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de (E) sont $3 - i$ et $1 + 2i$.

3. 0,75 pts

On note A et B les points d'affixes $a = 1 + 2i$ et $b = 3 - i$, et R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que l'écriture complexe de R est $z' = iz + 3 + i$, puis vérifier que le point C d'affixe $c = 4 + 4i$ est l'image de B par R.

INDICE

Pars de $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a)$ et développe $a - ia$.

CORRIGÉ

Écriture de R. La rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} z' - a &= e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a) \\ &= i(z - a), \end{aligned}$$

soit $z' = iz + (1 - i)a$. Or :

$$\begin{aligned} &(1 - i)(1 + 2i) \\ &= 1 + 2i - i + 2 = 3 + i. \end{aligned}$$

Donc R a pour écriture $z' = iz + 3 + i$.

Image de B.

$$\begin{aligned} &i(3 - i) + 3 + i \\ &= 3i + 1 + 3 + i \\ &= 4 + 4i = c. \end{aligned}$$

Conclusion. R : $z' = iz + 3 + i$, et C est l'image de B par R.

4. 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{c - a}{b - a} = i$. En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Traduis $R(B) = C$ par l'écriture de R de centre A.

CORRIGÉ

Quotient. R a pour centre A et pour angle $\dfrac{\pi}{2}$, et $R(B) = C$: donc $c - a = i(b - a)$. Or $b - a = 2 - 3i \neq 0$, d'où :

$$\frac{c - a}{b - a} = i.$$

Nature. D'après la propriété du quotient d'affixes, $AC = AB \times |i| = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

5. 0,25 pts

Soit D le point d'affixe $d = 6 + 2i$. Vérifier que D est distinct de A, B, C, et justifier que A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Compare les affixes ; pour l'alignement, relis le quotient de la question 4.

CORRIGÉ

Points distincts. Les affixes $1 + 2i$, $3 - i$ et $4 + 4i$ sont deux à deux distinctes, et $6 + 2i$ diffère de chacune d'elles : D est distinct de A, B, C, eux-mêmes deux à deux distincts.

Non-alignement. Le quotient $\dfrac{c - a}{b - a} = i$ de la question 4 n'est pas réel. D'après la caractérisation de l'alignement, A, B, C ne sont pas alignés.

6. 0,75 pts

Montrer que $\dfrac{c - b}{a - b} \times \dfrac{a - d}{c - d} = \dfrac{5}{2}$. En déduire que les points A, B, C, D sont cocycliques.

INDICE

Calcule $\dfrac{c - b}{a - b}$ et $\dfrac{a - d}{c - d}$ séparément, avec le conjugué de chaque dénominateur.

CORRIGÉ

Premier quotient. $c - b = 1 + 5i$ et $a - b = -2 + 3i$, avec $|-2 + 3i|^2 = 13$:

$$\begin{aligned} \frac{c - b}{a - b} &= \frac{(1 + 5i)(-2 - 3i)}{13} \\ &= \frac{13 - 13i}{13} = 1 - i. \end{aligned}$$

Second quotient. $a - d = -5$ et $c - d = -2 + 2i$, avec $|-2 + 2i|^2 = 8$:

$$\begin{aligned} \frac{a - d}{c - d} &= \frac{-5(-2 - 2i)}{8} \\ &= \frac{5 + 5i}{4}. \end{aligned}$$

Produit.

$$\begin{aligned} &(1 - i) \times \frac{5 + 5i}{4} \\ &= \frac{5(1 - i)(1 + i)}{4} \\ &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Ce produit est réel.

Hypothèses. Les quatre points sont deux à deux distincts et A, B, C ne sont pas alignés (question 5).

Conclusion. D'après le théorème de cocyclicité, A, B, C, D sont sur un même cercle Γ : ils sont cocycliques.

7. 0,5 pts

En utilisant la nature du triangle ABC, déterminer l'affixe du centre Ω de Γ et son rayon.

INDICE

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre son hypoténuse.

CORRIGÉ

Cercle circonscrit. Le triangle ABC est rectangle en A (question 4) : son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse $[BC]$. Or Γ passe par A, B, C, non alignés, et un seul cercle passe par trois points non alignés : Γ est ce cercle.

Centre. Ω est le milieu de $[BC]$:

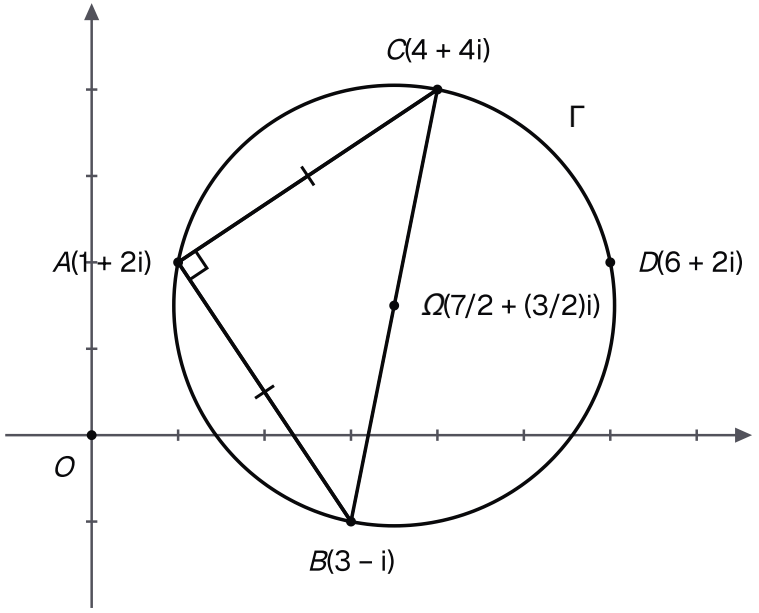
$$\omega = \frac{b+c}{2} = \frac{7+3i}{2}.$$

Rayon.

$$\frac{BC}{2} = \frac{|1+5i|}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Contrôle : $|d-\omega| = \left|\frac{5+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Conclusion. Ω a pour affixe $\frac{7+3i}{2}$, et le rayon de Γ vaut $\frac{\sqrt{26}}{2}$.



Le cercle Γ circonscrit au triangle rectangle isocèle ABC, de diamètre [BC], passe aussi par D.

Exercice 2 3 pts

Rotation d'angle π/3 et triangle équilatéral

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout réel m, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (F_m) : $z^2 - 2mz + m^2 + 4 = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que, pour tout réel m, le discriminant de (F_m) est $\Delta = (4i)^2$.

INDICE

Calcule $b^2 - 4ac$ avec les coefficients de (F_m) : le paramètre doit disparaître.

CORRIGÉ

Soit $m \in \mathbb{R}$. Les coefficients de (F_m) sont 1, $-2m$ et $m^2 + 4$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2m)^2 - 4\left(m^2 + 4\right) \\ &= 4m^2 - 4m^2 - 16 = -16.\end{aligned}$$

Et $(4i)^2 = 16i^2 = -16$.

Conclusion. Pour tout réel m, $\Delta = (4i)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (F_m). Pour $m = 2$, écrire la solution de partie imaginaire positive sous forme exponentielle.

INDICE

Les solutions sont conjuguées, de partie réelle m. Pour la forme exponentielle, factorise par le module.

CORRIGÉ

Solutions. Soit $m \in \mathbb{R}$. Comme $\Delta = -16 \neq 0$ et que $\delta = 4i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, (F_m) a deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2m + 4i}{2} = m + 2i, \\ z_2 &= \frac{2m - 4i}{2} = m - 2i.\end{aligned}$$

Cas $m = 2$. Les solutions sont $2 + 2i$ et $2 - 2i$; celle de partie imaginaire positive est $2 + 2i$, de module $|2 + 2i| = 2\sqrt{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}2 + 2i &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de (F_m) sont $m + 2i$ et $m - 2i$. Pour $m = 2$, la solution de partie imaginaire positive s'écrit $2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3. 0,5 pts

On note A et B les points d'affixes $a = 2 + 2i$ et $b = 2 - 2i$, et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Montrer que l'image C de B par R a pour affixe $c = 2 + 2\sqrt{3}$.

INDICE

Écris $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ avec $b - a = -4i$.

CORRIGÉ

La rotation R s'écrit $z' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - a)$. Comme $C = R(B)$ et $b - a = -4i$, on calcule d'abord :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-4i)$$
$$= -2i + 2\sqrt{3}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} c &= a + e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \\ &= 2 + 2i - 2i + 2\sqrt{3} \\ &= 2 + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

4. 0,5 pts

Montrer que $\frac{c - a}{b - a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

INDICE

Relis l'égalité de la question 3, avec $b - a \neq 0$.

CORRIGÉ

Quotient. On a $b - a = -4i \neq 0$ et, d'après la question 3, $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$. Donc :

$$\frac{c - a}{b - a} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Nature. D'après la propriété du quotient d'affixes, $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Conclusion. Isocèle en A avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ en A, le triangle ABC est équilatéral.

5. 0,75 pts

Soit I le point d'affixe 2. Montrer que $\dfrac{c-2}{a-2} = -\sqrt{3}\,i$. En déduire que les droites (IA) et (IC) sont perpendiculaires, et que $IC = \sqrt{3}\,IA$.

INDICE

Calcule $a-2$ et $c-2$, puis le quotient ; lis ensuite son module et sa nature.

CORRIGÉ

Points distincts. $a-2 = 2i \neq 0$ et $c-2 = 2\sqrt{3} \neq 0$: $I \neq A$ et $I \neq C$.

Quotient.

$$\frac{c-2}{a-2} = \frac{2\sqrt{3}}{2i} = \frac{\sqrt{3}}{i} = -\sqrt{3}\,i.$$

Orthogonalité. Ce quotient est imaginaire pur et non nul. D'après la caractérisation de l'orthogonalité, les droites (IA) et (IC) sont perpendiculaires.

Rapport. D'après la propriété du quotient d'affixes, $\dfrac{IC}{IA} = \left|-\sqrt{3}\,i\right| = \sqrt{3}$, donc $IC = \sqrt{3}\,IA$.

Conclusion. $\dfrac{c-2}{a-2} = -\sqrt{3}\,i$, les droites (IA) et (IC) sont perpendiculaires, et $IC = \sqrt{3}\,IA$.

6. `0,5 pts`

Montrer que l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $|z-a|=|z-b|$ est l'axe réel. Vérifier que C et I appartiennent à Γ.

INDICE

Pose $z=x+iy$, avec x et y réels, et compare les carrés des deux modules.

CORRIGÉ

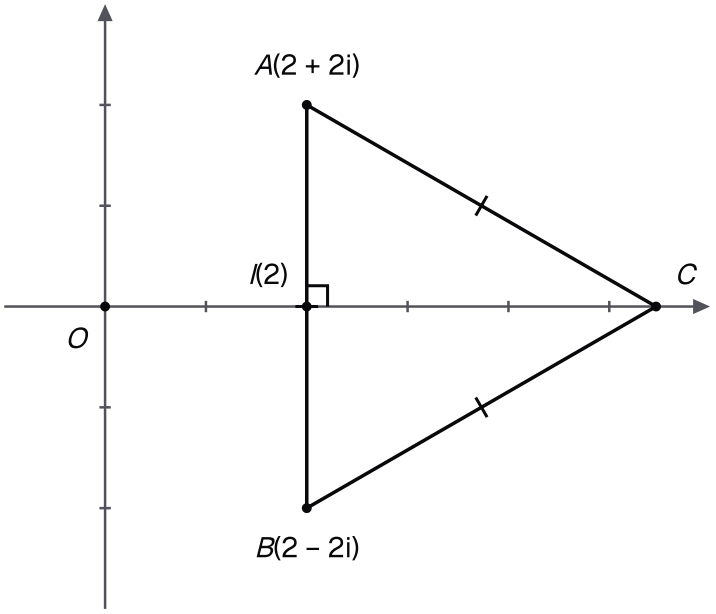
L'ensemble Γ. Soit M un point d'affixe $z=x+iy$, avec x et y réels. Alors :

$$|z-a|^2=(x-2)^2+(y-2)^2,$$
$$|z-b|^2=(x-2)^2+(y+2)^2.$$

Les modules étant positifs, $|z-a|=|z-b|$ équivaut à l'égalité de leurs carrés, c'est-à-dire à $(y-2)^2=(y+2)^2$, soit $8y=0$. La condition équivaut donc à $y=0$: Γ est l'axe réel.

Les points C et I. Les affixes $c=2+2\sqrt{3}$ et 2 sont réelles : $C\in\Gamma$ et $I\in\Gamma$.

Conclusion. Γ est l'axe réel, et les points C et I appartiennent à Γ.



Le triangle équilatéral ABC, la hauteur [IC] perpendiculaire à (IA) et l'axe réel qui joue le rôle de Γ.

Exercice 3 3,5 pts

Rotation, homothétie et médiatrice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On étudie dans $\mathbb{C}$ l'équation (H) : $z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (H) est $\Delta = (3-i)^2$.

INDICE

Calcule $(1+3i)^2 - 4(-4+3i)$, puis développe $(3-i)^2$.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (1+3i)^2 - 4(-4+3i)\\ &= 1 + 6i - 9\\ &\quad + 16 - 12i\\ &= 8 - 6i.\end{aligned}$$

Carré. $(3-i)^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$.

Conclusion. $\Delta = (3-i)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (H).

INDICE

Prends $\delta = 3 - i$ comme racine carrée de Δ.

CORRIGÉ

Comme $\Delta \neq 0$ et que $\delta = 3 - i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, l'équation (H) a deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1 + 3i + (3-i)}{2}\\ &= 2 + i,\\ z_2 &= \frac{1 + 3i - (3-i)}{2}\\ &= -1 + 2i.\end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de (H) sont $2 + i$ et $-1 + 2i$.

3. 0,5 pts

On note A et B les points d'affixes $a = 2 + i$ et $b = -1 + 2i$, et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Vérifier que $b = ia$. En déduire que $B = R(A)$, puis la nature du triangle OAB.

INDICE

L'écriture de R est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$.

CORRIGÉ

Égalité.

$$ia = i(2 + i) = 2i - 1 = b.$$

Image de A. R a pour écriture $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z = iz$. Donc $R(A)$ a pour affixe $ia = b$: $B = R(A)$.

Nature de OAB. Comme $a \neq 0$, on a $A \neq O$, et $\dfrac{b - 0}{a - 0} = i$. D'après la propriété du quotient d'affixes, $OB = OA$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion. Le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

4. 0,75 pts

Soit $C = R(B)$. Montrer que $c = -2 - i$, puis que $\dfrac{a - b}{c - b} = i$. En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Applique R à b. Puis compare $a - b$ à $i(c - b)$.

CORRIGÉ

Affixe de C.

$$c = ib = i(-1 + 2i) = -2 - i.$$

Quotient. $c - b = -1 - 3i \neq 0$, donc $C \neq B$. De plus $i(-1 - 3i) = 3 - i = a - b$. Donc :

$$\frac{a - b}{c - b} = i.$$

Nature. D'après la propriété du quotient d'affixes, $BA = BC$ et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

5. 0,5 pts

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Montrer que h a pour écriture $z' = 2z + 1 - 2i$, puis que $h(A) = A'$ d'affixe 5 et $h(C) = C'$ d'affixe $-3 - 4i$.

INDICE

Pars de $z' - b = 2(z - b)$.

CORRIGÉ

Écriture de h. L'homothétie de centre B et de rapport 2 s'écrit $z' - b = 2(z - b)$, soit :

$$z' = 2z - b = 2z + 1 - 2i.$$

Image de A.

$$2(2 + i) + 1 - 2i = 5.$$

Image de C.

$$\begin{aligned} &2(-2 - i) + 1 - 2i \\ &= -3 - 4i. \end{aligned}$$

Conclusion. $h(A) = A'$ d'affixe 5 et $h(C) = C'$ d'affixe $-3 - 4i$.

6. 0,5 pts

Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-5|=|z+3+4i|$. Montrer que O et B appartiennent à Γ. En déduire que Γ est la droite (OB).

INDICE

Reconnais une médiatrice, puis calcule les deux modules pour O et pour B.

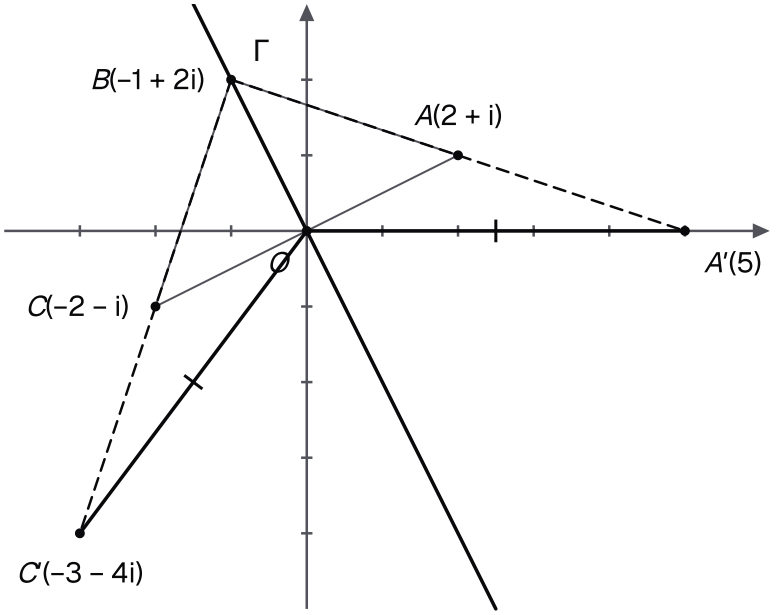
CORRIGÉ

Nature de Γ. Soit M un point d'affixe z. Comme $z+3+4i=z-(-3-4i)$, la condition s'écrit $A'M=C'M$. Or $A'\neq C'$, car $5\neq -3-4i$. Donc Γ est la médiatrice de $[A'C']$: c'est une droite.

Le point O. $|0-5|=5$ et $|0+3+4i|=5$: $O\in\Gamma$.

Le point B. $|b-5|=|-6+2i|=\sqrt{40}$ et $|b+3+4i|=|2+6i|=\sqrt{40}$: $B\in\Gamma$.

Conclusion. La droite Γ contient les deux points distincts O et B : $\Gamma=(OB)$.



Les images A' et C' par l'homothétie de centre B, et la droite Γ = (OB) à égale distance des deux.

7. 0,5 pts

Soit G l'isobarycentre des points B, A', C'. Calculer z_G, puis vérifier que G appartient à Γ.

INDICE

Applique la formule de l'affixe du barycentre, puis compare z_G à b.

CORRIGÉ

Affixe de G. Les coefficients valent 1, de somme $3 \neq 0$. D'après la formule de l'affixe du barycentre :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{b + 5 + (-3 - 4i)}{3} \\ &= \frac{1 - 2i}{3}. \end{aligned}$$

Position de G. Comme $b = -1 + 2i$, on a $\dfrac{1 - 2i}{3} = -\dfrac{1}{3} b$, soit $\overrightarrow{OG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

Conclusion. $G \in (OB) = \Gamma$.

Exercice 4 3,75 pts

Rotation reconnue, ensemble de points et carré

Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe est orthonormé direct. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (2+3i)z - 5 + i = 0$.

1. 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = (4+i)^2$.

INDICE

Développe $(2+3i)^2$, retranche $4(-5+i)$, puis développe $(4+i)^2$.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (2+3i)^2 - 4(-5+i)\\ &= 4 + 12i - 9\\ &\quad + 20 - 4i\\ &= 15 + 8i.\end{aligned}$$

Carré. $(4+i)^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i$.

Conclusion. $\Delta = (4+i)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (E).

INDICE

Prends $\delta = 4 + i$ comme racine carrée de Δ.

CORRIGÉ

Comme $\Delta \neq 0$ et que $\delta = 4+i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, l'équation (E) a deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2+3i+(4+i)}{2}\\ &= 3 + 2i,\\ z_2 &= \frac{2+3i-(4+i)}{2}\\ &= -1 + i.\end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de (E) sont $3+2i$ et $-1+i$.

3. 0,75 pts

On note A et B les points d'affixes $a = -1 + i$ et $b = 3 + 2i$. Soit f la transformation qui, au point d'affixe z, associe le point d'affixe $z' = iz + 2i$. Montrer que f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

INDICE

Écris $z' = \alpha z + \beta$: regarde le module et un argument de α, puis cherche le point invariant.

CORRIGÉ

Nature. L'écriture de f est $z' = \alpha z + \beta$, avec $\alpha = i$ et $\beta = 2i$. Comme $\alpha \neq 1$ et $|\alpha| = 1$, f est une rotation, d'angle

$$\arg i \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Centre. C'est l'unique point invariant de f, d'affixe :

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{2i}{1-i} &= \frac{2i(1+i)}{2} \\ &= -1 + i = a.\end{aligned}$$

Conclusion. f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4. 0,5 pts

Soit C l'image de B par f, et D le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Vérifier que $c = -2 + 5i$, puis calculer l'affixe d de D.

INDICE

Applique l'écriture de f à b. Pour D, traduis l'égalité de vecteurs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

CORRIGÉ

Affixe de C.

$$\begin{aligned}c = ib + 2i &= i(3 + 2i) + 2i \\ &= 3i - 2 + 2i = -2 + 5i.\end{aligned}$$

Affixe de D. $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire $b - a = d - c$. Avec $b - a = 4 + i$:

$$d = c + 4 + i = 2 + 6i.$$

5. 0,75 pts

Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z, avec $z \neq b$, tels que $\dfrac{z-c}{z-b}$ soit imaginaire pur. Montrer que Γ est le cercle de diamètre $[BC]$ privé du point B. Préciser l'affixe de son centre Ω et son rayon.

INDICE

Traite à part le cas $M = C$. Pour M distinct de B et de C, lis l'argument du quotient comme un angle orienté de sommet M.

CORRIGÉ

Soit M un point d'affixe z, avec $z \neq b$.

Cas $M = C$. Le quotient vaut 0, qui est imaginaire pur : $C \in \Gamma$.

Cas M distinct de B et de C. Le quotient, égal à $\dfrac{c-z}{b-z}$, est non nul. D'après la propriété du quotient d'affixes, son argument mesure l'angle $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right)$. Il est donc imaginaire pur si et seulement si

$$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi],$$

c'est-à-dire si le triangle MBC est rectangle en M, ou encore si M est sur le cercle de diamètre $[BC]$.

Bilan. B est exclu par définition, et C est à la fois dans Γ et sur ce cercle : Γ est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de B.

Centre et rayon. Le centre Ω est le milieu de $[BC]$:

$$\omega = \frac{b+c}{2} = \frac{1+7i}{2}.$$

Le rayon vaut :

$$\frac{BC}{2} = \frac{|-5+3i|}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Conclusion. Γ est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de B, de centre Ω d'affixe $\dfrac{1+7i}{2}$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

6. `0,5 pts`

Montrer que $\dfrac{a-c}{a-b}=i$ et $\dfrac{d-c}{d-b}=-i$. En déduire que A et D appartiennent à Γ.

INDICE

Multiplie chaque quotient par le conjugué de son dénominateur, puis relis la définition de Γ.

CORRIGÉ

Premier quotient. $a-c=1-4i$ et $a-b=-4-i$, avec $|-4-i|^2=17$:

$$\begin{aligned}\frac{a-c}{a-b}&=\frac{(1-4i)(-4+i)}{17}\\&=\frac{17i}{17}=i.\end{aligned}$$

Second quotient. $d-c=4+i$ et $d-b=-1+4i$, avec $|-1+4i|^2=17$:

$$\begin{aligned}\frac{d-c}{d-b}&=\frac{(4+i)(-1-4i)}{17}\\&=\frac{-17i}{17}=-i.\end{aligned}$$

Conclusion. On a $a\neq b$ et $d\neq b$, et ces deux quotients sont imaginaires purs. D'après la définition de Γ, $A\in\Gamma$ et $D\in\Gamma$.

7. 0,5 pts

En déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un carré.

INDICE

Un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux est un carré : cherche ces deux propriétés dans les questions 3 et 6.

CORRIGÉ

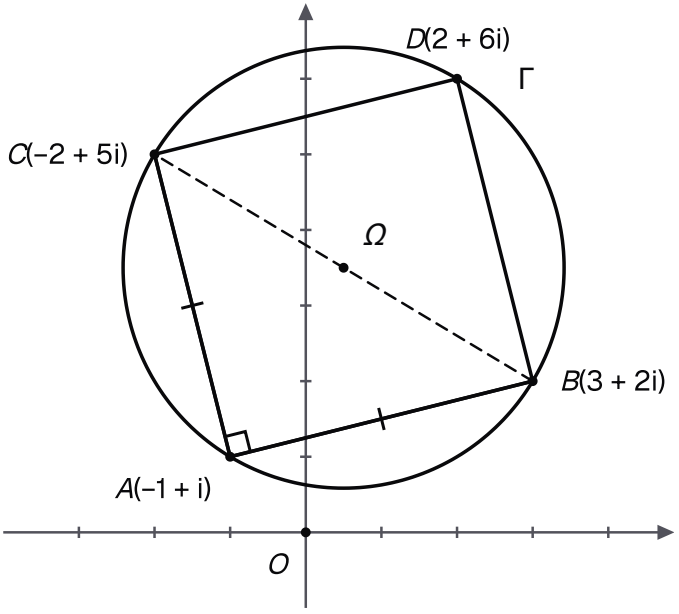
Parallélogramme. D'après la question 4, $ABDC$ est un parallélogramme.

Angle droit. Comme $A \neq B$ et $A \neq C$, le quotient $\dfrac{a-c}{a-b} = i$, imaginaire pur et non nul, montre que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle : $ABDC$ est un rectangle.

Côtés consécutifs. $C = f(B)$, où f est une rotation de centre A ; elle conserve la distance à A, donc $AC = AB$.

Conclusion. Un rectangle dont deux côtés consécutifs sont égaux est un carré : $ABDC$ est un carré.

Contrôle : le milieu de $[AD]$ a pour affixe $\dfrac{a+d}{2} = \dfrac{1+7i}{2} = \omega$.



Le carré ABDC et son cercle circonscrit Γ, de diamètre [BC] et de centre Ω.

Exercice 5 — 3,5 pts

Rotation de centre O, losange et cercle circonscrit

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On étudie dans $\mathbb{C}$ l'équation (G) : $z^2 - \left(\sqrt{3}+3i\right)z - 2 + 2\sqrt{3}\,i = 0$.

1. — 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de (G) est $\Delta = \left(\sqrt{3}-i\right)^2$.

INDICE

Développe $\left(\sqrt{3}+3i\right)^2$, retranche $4\left(-2+2\sqrt{3}\,i\right)$, puis développe $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$.

CORRIGÉ

Carré. $\left(\sqrt{3}+3i\right)^2 = 3 + 6\sqrt{3}\,i - 9 = -6 + 6\sqrt{3}\,i$.

Discriminant. $\Delta = \left(\sqrt{3}+3i\right)^2 - 4\left(-2+2\sqrt{3}\,i\right)$, donc :

$$\begin{aligned}\Delta &= -6 + 6\sqrt{3}\,i \\ &\quad + 8 - 8\sqrt{3}\,i \\ &= 2 - 2\sqrt{3}\,i.\end{aligned}$$

Comparaison. $\left(\sqrt{3}-i\right)^2 = 3 - 2\sqrt{3}\,i - 1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$.

Conclusion. $\Delta = \left(\sqrt{3}-i\right)^2$.

2. 0,5 pts

En déduire les solutions de (G), puis écrire chacune d'elles sous forme exponentielle.

INDICE

Prends $\delta = \sqrt{3} - i$. Pour la forme exponentielle, commence par le module de chaque solution.

CORRIGÉ

Solutions. Comme $\Delta \neq 0$ et que $\delta = \sqrt{3} - i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, l'équation (G) a deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3} + 3i + \left(\sqrt{3} - i\right)}{2} \\ &= \sqrt{3} + i, \\ z_2 &= \frac{\sqrt{3} + 3i - \left(\sqrt{3} - i\right)}{2} \\ &= 2i. \end{aligned}$$

Formes exponentielles. $\left|\sqrt{3} + i\right| = 2$, donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + i &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Enfin :

$$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Conclusion. Les solutions de (G) sont $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

3. 0,5 pts

On note A et B les points d'affixes $a = \sqrt{3} + i$ et $b = 2i$, et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Montrer que $R(A) = B$, puis que $OA = OB = AB$.

INDICE

L'écriture de R est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$: utilise les formes exponentielles de la question 2.

CORRIGÉ

Image de A. R a pour écriture $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} &e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i = b. \end{aligned}$$

Donc $R(A) = B$.

Distances à O. Une rotation de centre O conserve la distance à O : $OB = OA = |a| = 2$.

Distance AB. $AB = |b - a| = \left|-\sqrt{3} + i\right| = 2$.

Conclusion. Les trois distances valent 2. Donc $OA = OB = AB$.

4. 0,5 pts

Soit C l'image de B par R. Montrer que $c = -\sqrt{3} + i$.

INDICE

Calcule $e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, puis passe à la forme algébrique.

CORRIGÉ

On a $C = R(B)$ et $b = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Donc :

$$\begin{aligned} c &= e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

5. 0,75 pts

Montrer que O est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$. En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

INDICE

Calcule l'affixe de ce barycentre. Traduis ensuite $a - b + c = 0$ par une égalité de vecteurs, puis compare OA et OC.

CORRIGÉ

Barycentre. La somme des coefficients vaut $1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$: le barycentre existe. Son affixe est :

$$\begin{aligned} \frac{a - b + c}{1} &= \sqrt{3} + i - 2i \\ &\quad - \sqrt{3} + i \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est l'affixe de O : O est ce barycentre.

Parallélogramme. Ainsi $a - b + c = 0$, soit $a - 0 = b - c$: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$. Les points O, A, C ne sont pas alignés, car le quotient

$$\frac{c}{a} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

n'est pas réel. Donc $OABC$ est un parallélogramme.

Losange. $OA = |a| = 2$ et $OC = |c| = 2$: deux côtés consécutifs sont égaux.

Conclusion. $OABC$ est un losange.

6. 0,5 pts

Montrer que B est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle OAC, et donner le rayon de Γ.

INDICE

Calcule les distances BO, BA et BC à l'aide de modules.

CORRIGÉ

Distances.

$$\begin{aligned} BO &= |b| = 2, \\ BA &= |a - b| \\ &= \left|\sqrt{3} - i\right| = 2, \\ BC &= |c - b| \\ &= \left|-\sqrt{3} - i\right| = 2. \end{aligned}$$

Centre. Le point B est équidistant de O, A et C, qui ne sont pas alignés (question 5). Un seul cercle passe par ces trois points : le cercle Γ circonscrit au triangle OAC, de centre B.

Conclusion. B est le centre de Γ, et le rayon de Γ vaut 2.

7. 0,5 pts

Soit D le point d'affixe $d = 4i$. Vérifier que $D \in \Gamma$, puis montrer que $\dfrac{d-a}{0-a} = -\sqrt{3}\,i$. En déduire que le triangle OAD est rectangle en A.

INDICE

Calcule BD. Pour le quotient, multiplie par le conjugué du dénominateur.

CORRIGÉ

Le point D. $BD = |4i - 2i| = 2$: $D \in \Gamma$.

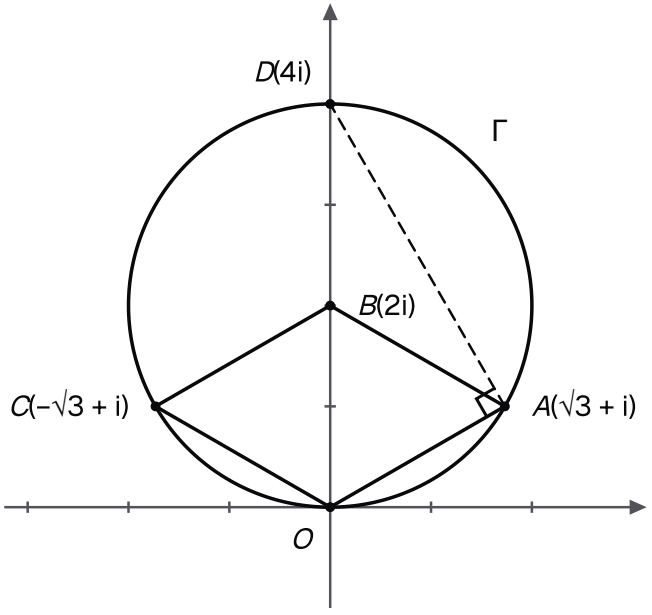
Quotient.

$$\begin{aligned}\frac{d-a}{0-a} &= \frac{-\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}-i} \\ &= \frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{\left(\sqrt{3}-3i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{4} \\ &= \frac{-4\sqrt{3}\,i}{4} = -\sqrt{3}\,i.\end{aligned}$$

Angle droit. Ce quotient est imaginaire pur et non nul, avec $A \neq O$ et $A \neq D$. D'après la caractérisation de l'orthogonalité, les droites (AO) et (AD) sont perpendiculaires.

Conclusion. Le triangle OAD est rectangle en A.

Contrôle : $b = \dfrac{0+d}{2}$, donc $[OD]$ est un diamètre de Γ.



Le losange OABC, le cercle Γ de centre B et de rayon 2, et l'angle droit en A du triangle OAD.