BURHAN

Nombres complexes : géométrie et transformations : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes-et-geometrie/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : géométrie et transformations	Entraînement	8

Exercice 1

Un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 2

On étudie dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -64$.

1.

Écris -64 sous forme exponentielle.

INDICE

Le nombre -64 est un réel strictement négatif : repère son module et un argument.

2.

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -64$. Donne les solutions sous forme exponentielle, puis algébrique.

INDICE

Ici $\sqrt[6]{64} = 2$. Divise l'argument par 6, puis ajoute $\dfrac{2k\pi}{6}$.

3.

Vérifie par un calcul direct que $\left(\sqrt{3} + i\right)^6 = -64$.

INDICE

Calcule d'abord le carré, puis élève-le au cube.

4.

Montre que les images de ces solutions sont les sommets d'un hexagone régulier, et calcule la longueur de son côté.

INDICE

Utilise l'interprétation géométrique du théorème, puis exprime w_1 à partir de w_0.

Exercice 2

Calculer avec j

On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On rappelle que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

1.

Montre que $1 + j = -j^2$, puis que $\dfrac{1}{1+j} = -j$.

INDICE

Isole $1 + j$ dans $1 + j + j^2 = 0$, puis utilise $j \times j^2 = 1$.

2.

Calcule $(1 + j)^6$ et $(2 + j)\left(2 + j^2\right)$.

INDICE

Pour le premier, utilise la question 1. Pour le second, développe et regroupe $j + j^2$.

3.

Calcule j^{2027}.

INDICE

Effectue la division euclidienne de 2027 par 3.

4.

On note U, V, W les points d'affixes $1, j, j^2$. Montre que le triangle UVW est équilatéral.

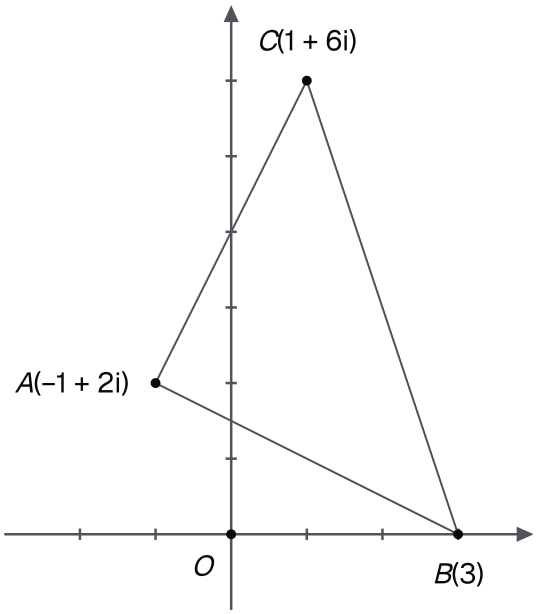
INDICE

Vérifie que les points sont distincts, puis calcule $\dfrac{j^2 - 1}{j - 1}$ en factorisant le numérateur.

Exercice 3

Triangle rectangle isocèle et médiatrice

On considère les points A, B, C d'affixes $a = -1 + 2i$, $b = 3$ et $c = 1 + 6i$.



Les points A, B et C de l'exercice, sommets d'un triangle.

1.

Calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$ et déduis-en la nature du triangle ABC.

INDICE

Calcule $b-a$ et $c-a$, puis le quotient en multipliant par le conjugué du dénominateur.

2.

Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |z-1-6i|$. Détermine Δ, puis montre que $A \in \Delta$.

INDICE

Interprète chaque module comme une distance à B ou à C.

3.

Soit I le milieu de $[BC]$. Calcule son affixe, puis montre que Δ est la droite (AI).

INDICE

Le milieu de $[BC]$ est sur sa médiatrice ; une droite est déterminée par deux de ses points distincts.

4.

Montre que $AI = \dfrac{BC}{2}$.

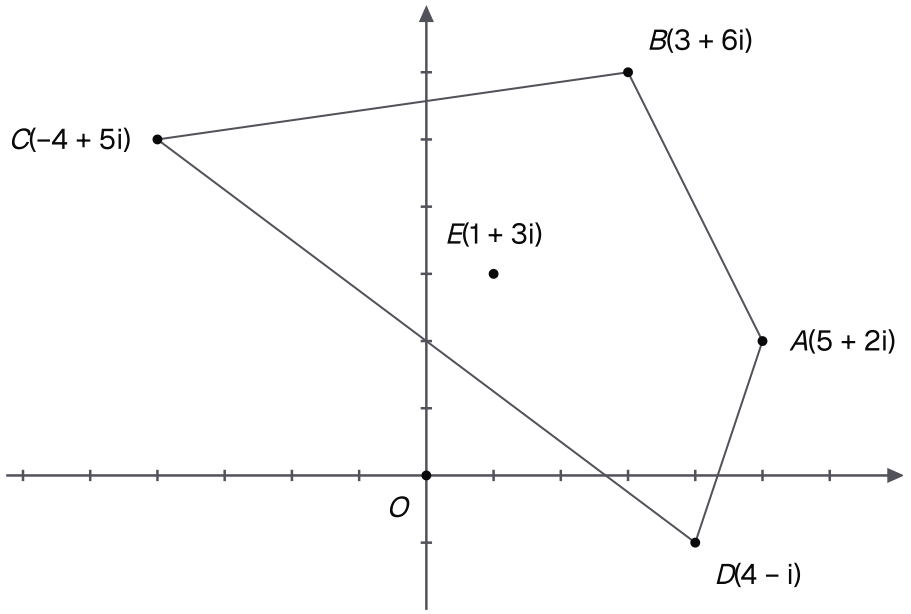
INDICE

Calcule les deux longueurs par des modules.

Exercice 4

Quatre points sur un cercle, et un cinquième

On considère les points A, B, C, D, E d'affixes $a = 5 + 2i$, $b = 3 + 6i$, $c = -4 + 5i$, $d = 4 - i$ et $e = 1 + 3i$.



Les cinq points de l'énoncé et le quadrilatère ABCD qu'ils dessinent.

1.

Montre que A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique et regarde sa partie imaginaire.

2.

Calcule $Q = \dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d}$, puis conclus sur les points A, B, C, D.

INDICE

Calcule séparément les deux quotients sous forme algébrique, puis vérifie que les quatre points sont distincts.

3.

Les points A, B, C, E sont-ils cocycliques ?

INDICE

Remplace d par e dans le second quotient ; le théorème est une équivalence.

4.

Contrôle ces deux conclusions en calculant la distance de chaque point au point Ω d'affixe $2i$.

INDICE

Calcule $|z - 2i|$ pour chacun des cinq points.

Exercice 5

Image et antécédent par une rotation d'angle π/3

Soit r la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note A le point d'affixe $a = 3 + i$.

1.

Écris l'écriture complexe de r.

INDICE

Le centre intervient des deux côtés de l'écriture.

2.

Calcule l'affixe a' du point $A' = r(A)$.

INDICE

Calcule $a - \omega$, puis multiplie par $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

3.

Montre que le triangle $\Omega A A'$ est équilatéral.

INDICE

Calcule le quotient $\dfrac{a' - \omega}{a - \omega}$.

4.

Détermine l'affixe du point N tel que $r(N) = B$, où B est le point d'affixe $1 + 3i$.

INDICE

Isole $z - \omega$ en multipliant les deux membres par $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 6

Deux rotations d'angle –π/2 composées

Soient r_1 la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et r_2 la rotation de centre B d'affixe $3i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1.

Écris les écritures complexes de r_1 et de r_2.

INDICE

Utilise $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ et l'écriture d'une rotation de centre donné.

2.

Montre que $r_2 \circ r_1$ a pour écriture $z' = -z - 3 + 3i$, puis identifie cette transformation.

INDICE

Applique r_1 d'abord, puis r_2. Repère ensuite α.

3.

Écris l'écriture complexe de $r_1 \circ r_2$. Les composées $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$ sont-elles égales ?

INDICE

Cette fois, r_2 agit en premier.

4.

Soit t la translation de vecteur d'affixe 2. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ t$.

INDICE

Substitue $z + 2$ dans l'écriture de r_1, puis calcule le centre.

Exercice 7

Rotation et homothétie de même centre

Soit Ω le point d'affixe $\omega = 2 - i$. On note r la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et h l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.

1.

Montre que $f = h \circ r$ a pour écriture $z' - \omega = -2i(z - \omega)$, puis développe cette écriture.

INDICE

Applique r d'abord : $z_1 - \omega = -i(z - \omega)$.

2.

Calcule l'affixe de l'image O' de O par f, puis vérifie que $\Omega O' = 2\,\Omega O$.

INDICE

Remplace z par 0, puis calcule deux modules.

3.

Vérifie que $r \circ h$ a la même écriture que $h \circ r$.

INDICE

Applique h d'abord, puis r.

4.

Soit t la translation de vecteur d'affixe $1 + i$. Montre que $t \circ h$ est une homothétie, et donne son rapport et son centre.

INDICE

Écris h sous la forme $z' = 2z + \beta$, puis ajoute $1 + i$.

Exercice 8

Un barycentre et un cercle

On considère les points A et B d'affixes $a = 1 + 2i$ et $b = 5 + 4i$.

1.

Calcule l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, -1)$.

INDICE

Vérifie la somme des coefficients avant d'appliquer la formule.

2.

Soit M un point d'affixe z. Montre que le vecteur $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ a pour affixe $2(z_G - z)$.

INDICE

Écris l'affixe de chaque vecteur, puis utilise $2z_G = 3a - b$.

3.

Déduis-en l'ensemble Γ des points M tels que $\left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\| = 4$.

INDICE

La norme d'un vecteur est le module de son affixe.

4.

Le point O appartient-il à Γ ? Et le point L d'affixe $1 + i$?

INDICE

Calcule la distance de chaque point à G.