BURHAN

Nombres complexes : géométrie et transformations : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes-et-geometrie/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : géométrie et transformations	Entraînement	8

Exercice 1

Un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 2

On étudie dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -64$.

1.

Écris -64 sous forme exponentielle.

INDICE

Le nombre -64 est un réel strictement négatif : repère son module et un argument.

CORRIGÉ

Le nombre -64 est un réel strictement négatif : $|-64| = 64$ et $-64 = 64 \times (-1)$, avec $-1 = e^{i\pi}$.

Conclusion.

$$-64 = 64e^{i\pi}.$$

2.

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -64$. Donne les solutions sous forme exponentielle, puis algébrique.

INDICE

Ici $\sqrt[6]{64} = 2$. Divise l'argument par 6, puis ajoute $\dfrac{2k\pi}{6}$.

CORRIGÉ

Racine sixième de 64**.** $2 > 0$ et $2^6 = 64$, donc $\sqrt[6]{64} = 2$.

Forme des solutions. Comme $-64 \neq 0$ et $-64 = 64e^{i\pi}$, le théorème des racines n-ièmes, avec $n = 6$, donne exactement six solutions : les nombres w_k définis pour $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ par

$$w_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)}.$$

Formes algébriques.

- $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$;
- $w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$;
- $w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$;
- $w_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$;
- $w_4 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$;
- $w_5 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$.

Conclusion. Les solutions de $z^6 = -64$ sont $\sqrt{3} + i$, $2i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$ et $\sqrt{3} - i$.

3.

Vérifie par un calcul direct que $\left(\sqrt{3}+i\right)^{6}=-64$.

INDICE

Calcule d'abord le carré, puis élève-le au cube.

CORRIGÉ

Carré.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+i\right)^{2} &= 3+2\sqrt{3}\,i-1\\ &= 2+2\sqrt{3}\,i.\end{aligned}$$

Puissance quatrième.

$$\begin{aligned}&\left(2+2\sqrt{3}\,i\right)^{2}\\ &= 4+8\sqrt{3}\,i-12\\ &= -8+8\sqrt{3}\,i.\end{aligned}$$

Puissance sixième. On multiplie la puissance quatrième par le carré :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{3}+i\right)^{6}\\ &= \left(-8+8\sqrt{3}\,i\right)\\ &\quad\times\left(2+2\sqrt{3}\,i\right)\\ &= -16-16\sqrt{3}\,i\\ &\quad+16\sqrt{3}\,i-48\\ &= -64.\end{aligned}$$

Conclusion. $\left(\sqrt{3}+i\right)^{6}=-64$.

4.

Montre que les images de ces solutions sont les sommets d'un hexagone régulier, et calcule la longueur de son côté.

INDICE

Utilise l'interprétation géométrique du théorème, puis exprime w_1 à partir de w_0.

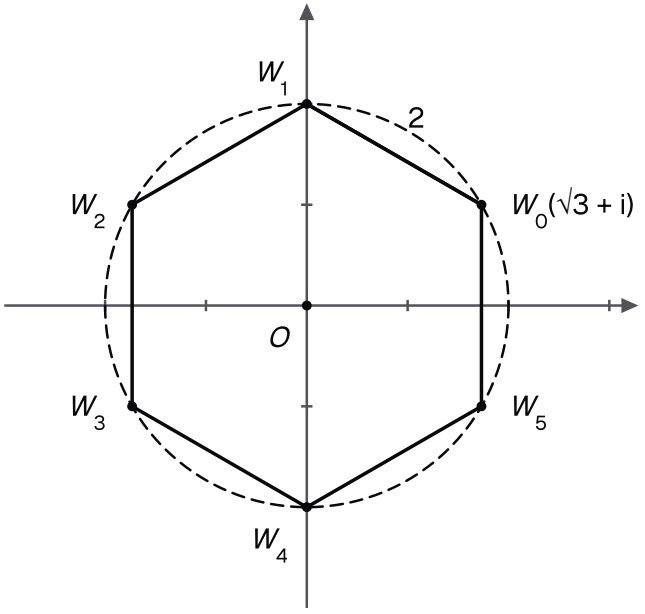
CORRIGÉ

Hexagone. D'après le théorème des racines n-ièmes, avec $n = 6$, les images des six solutions sont les sommets d'un polygone régulier à six côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 : un hexagone régulier.

Côté. Les images de w_0 et w_1 sont deux sommets consécutifs, avec $w_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} w_0$. Or $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ a pour module 1. Donc :

$$\begin{aligned} |w_1 - w_0| &= |w_0| \left| e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right| \\ &= 2 \times 1 = 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Les images des solutions sont les sommets d'un hexagone régulier de côté 2.



Les six solutions de $z^6 = -64$: un hexagone régulier de côté 2 inscrit dans le cercle de rayon 2.

Exercice 2

Calculer avec j

On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On rappelle que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

1.

Montre que $1 + j = -j^2$, puis que $\dfrac{1}{1+j} = -j$.

INDICE

Isole $1 + j$ dans $1 + j + j^2 = 0$, puis utilise $j \times j^2 = 1$.

CORRIGÉ

Première égalité. De $1 + j + j^2 = 0$, on tire :

$$1 + j = -j^2.$$

Seconde égalité. Comme $j \times j^2 = j^3 = 1$, on a $j^2 \neq 0$ et $\dfrac{1}{j^2} = j$. En particulier $1 + j = -j^2 \neq 0$, et :

$$\frac{1}{1+j} = -\frac{1}{j^2} = -j.$$

2.

Calcule $(1 + j)^6$ et $(2 + j)\left(2 + j^2\right)$.

INDICE

Pour le premier, utilise la question 1. Pour le second, développe et regroupe $j + j^2$.

CORRIGÉ

Puissance sixième. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}(1 + j)^6 &= \left(-j^2\right)^6 = j^{12} \\ &= \left(j^3\right)^4 = 1.\end{aligned}$$

Produit. On développe, puis on utilise $j + j^2 = -1$ et $j^3 = 1$:

$$\begin{aligned}&(2 + j)\left(2 + j^2\right) \\ &= 4 + 2\left(j + j^2\right) + j^3 \\ &= 4 - 2 + 1 = 3.\end{aligned}$$

Conclusion. $(1 + j)^6 = 1$ et $(2 + j)\left(2 + j^2\right) = 3$.

3.

Calcule j^{2027}.

INDICE

Effectue la division euclidienne de 2027 par 3.

CORRIGÉ

La division euclidienne de 2027 par 3 donne $2027 = 3 \times 675 + 2$. Comme $j^3 = 1$:

$$\begin{aligned}j^{2027} &= \left(j^3\right)^{675} j^2 \\ &= j^2.\end{aligned}$$

4.

On note U, V, W les points d'affixes 1, j, j^2. Montre que le triangle UVW est équilatéral.

INDICE

Vérifie que les points sont distincts, puis calcule $\dfrac{j^2-1}{j-1}$ en factorisant le numérateur.

CORRIGÉ

Points distincts. $\mathbb{U}_3=\{1,j,j^2\}$ compte trois éléments distincts, donc $j\neq 1$ et $j^2\neq 1$: $U\neq V$ et $U\neq W$.

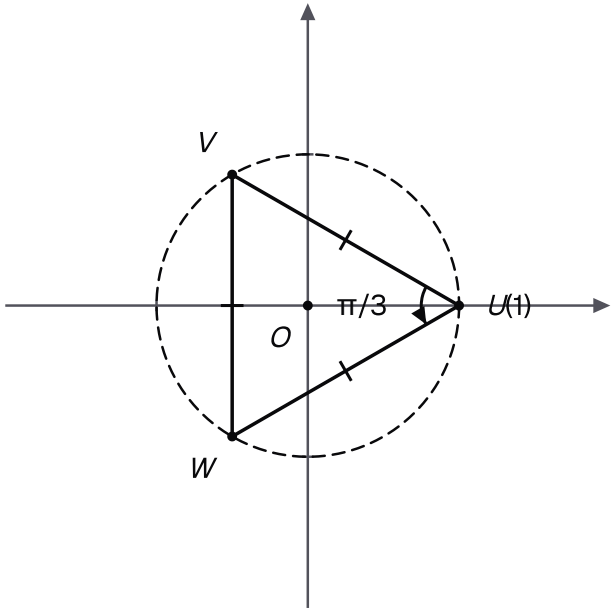
Quotient. On factorise $j^2-1=(j-1)(j+1)$, puis on utilise la question 1 :

$$\frac{j^2-1}{j-1}=1+j=-j^2.$$

Forme exponentielle. Comme $-1=e^{i\pi}$ et $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$:

$$\begin{aligned}-j^2&=e^{i\pi}e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{7\pi}{3}}\\&=e^{i\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété du quotient d'affixes, $UW=UV$ et $\left(\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Isocèle en U avec un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ en U, le triangle UVW est équilatéral.

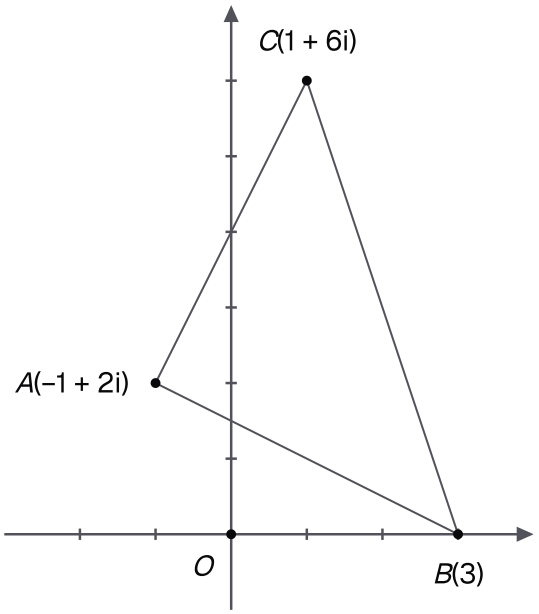


Le triangle UVW : deux côtés égaux issus de U et un angle π/3 entre eux.

Exercice 3

Triangle rectangle isocèle et médiatrice

On considère les points A, B, C d'affixes $a = -1 + 2i$, $b = 3$ et $c = 1 + 6i$.



Les points A, B et C de l'exercice, sommets d'un triangle.

1.

Calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$ et déduis-en la nature du triangle ABC.

INDICE

Calcule $b - a$ et $c - a$, puis le quotient en multipliant par le conjugué du dénominateur.

CORRIGÉ

Points distincts. $b - a = 4 - 2i \neq 0$ et $c - a = 2 + 4i \neq 0$: $A \neq B$ et $A \neq C$.

Quotient. On multiplie par le conjugué $4 + 2i$ du dénominateur, avec $|4 - 2i|^2 = 20$:

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{(2+4i)(4+2i)}{20} \\ &= \frac{20i}{20}. \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{c-a}{b-a} = i$.

Nature. D'après la propriété du quotient d'affixes, $\dfrac{AC}{AB} = |i| = 1$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion. $AC = AB$ et l'angle en A est droit : ABC est rectangle isocèle en A.

2.

Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |z-1-6i|$. Détermine Δ, puis montre que $A \in \Delta$.

INDICE

Interprète chaque module comme une distance à B ou à C.

CORRIGÉ

Nature de Δ. Soit M un point d'affixe z. Comme $z-1-6i = z-c$, la condition s'écrit $BM = CM$. De plus $B \neq C$, car $b \neq c$. Donc Δ est la médiatrice de $[BC]$.

Le point A.

$$\begin{aligned} |a-3| &= |-4+2i| \\ &= 2\sqrt{5}, \\ |a-1-6i| &= |-2-4i| \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. Δ est la médiatrice de $[BC]$, et $AB = AC$: $A \in \Delta$.

3.

Soit I le milieu de $[BC]$. Calcule son affixe, puis montre que Δ est la droite (AI).

INDICE

Le milieu de $[BC]$ est sur sa médiatrice ; une droite est déterminée par deux de ses points distincts.

CORRIGÉ

Affixe de I.

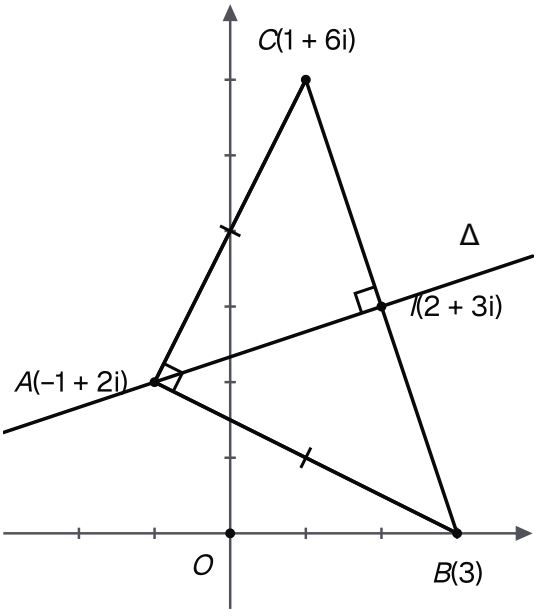
$$\begin{aligned} z_I &= \frac{b+c}{2} = \frac{4+6i}{2} \\ &= 2+3i. \end{aligned}$$

Position de I. Le milieu de $[BC]$ appartient à la médiatrice de $[BC]$: $I \in \Delta$.

Droite (AI). $z_I - a = 3+i \neq 0$, donc $A \neq I$. La droite Δ contient les deux points distincts A (question 2) et I ; or une droite est déterminée par deux de ses points distincts.

Conclusion.

$$\Delta = (AI).$$



Le triangle rectangle isocèle en A et la droite Δ = (AI), médiatrice de [BC].

4.

Montre que $AI = \dfrac{BC}{2}$.

INDICE

Calcule les deux longueurs par des modules.

CORRIGÉ

D'après la question 3, $z_I - a = 3 + i$. Donc :

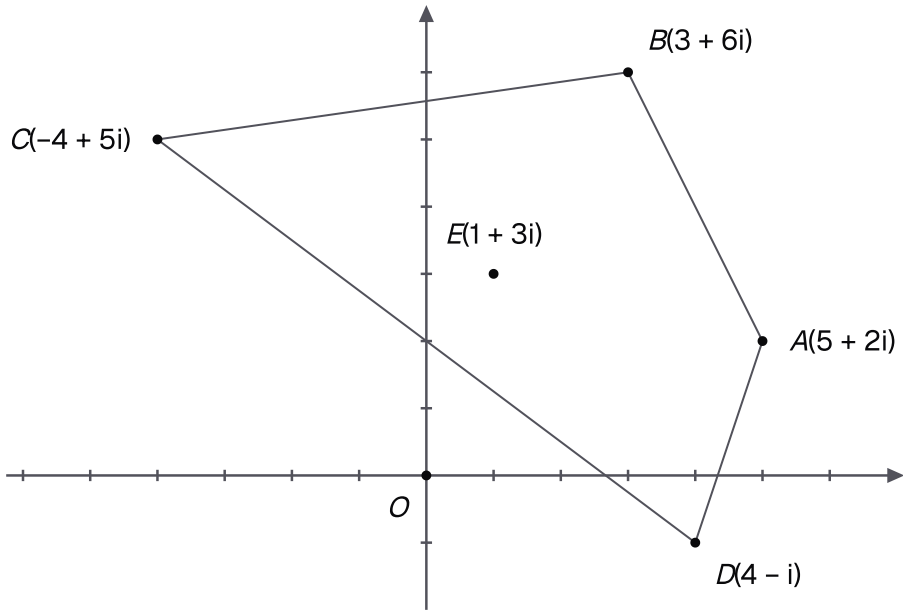
$$\begin{aligned} AI &= |3 + i| = \sqrt{10}, \\ BC &= |c - b| \\ &= |-2 + 6i| \\ &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Conclusion. $BC = 2AI$, c'est-à-dire $AI = \dfrac{BC}{2}$.

Exercice 4

Quatre points sur un cercle, et un cinquième

On considère les points A, B, C, D, E d'affixes $a = 5 + 2i$, $b = 3 + 6i$, $c = -4 + 5i$, $d = 4 - i$ et $e = 1 + 3i$.



Les cinq points de l'énoncé et le quadrilatère ABCD qu'ils dessinent.

1.

Montre que A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique et regarde sa partie imaginaire.

CORRIGÉ

Points distincts. $b - a = -2 + 4i \neq 0$ et $c - a = -9 + 3i \neq 0$: $A \neq B$ et $A \neq C$.

Quotient. Avec $|-2 + 4i|^2 = 20$:

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{(-9+3i)(-2-4i)}{20} \\ &= \frac{30+30i}{20} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

Conclusion. La partie imaginaire du quotient est non nulle : il n'est pas réel. D'après la caractérisation de l'alignement, A, B, C ne sont pas alignés.

2.

Calcule $Q = \dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d}$, puis conclus sur les points A, B, C, D.

INDICE

Calcule séparément les deux quotients sous forme algébrique, puis vérifie que les quatre points sont distincts.

CORRIGÉ

Premier quotient.

$$\begin{aligned}\frac{c-b}{a-b} &= \frac{-7-i}{2-4i} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.\end{aligned}$$

Second quotient.

$$\begin{aligned}\frac{a-d}{c-d} &= \frac{1+3i}{-8+6i} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.\end{aligned}$$

Produit.

$$\begin{aligned}Q &= -\frac{1+3i}{2} \times \frac{1-3i}{10} \\ &= -\frac{1+9}{20} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Le nombre Q est réel.

Hypothèses. Les affixes a, b, c, d sont deux à deux distinctes, et A, B, C ne sont pas alignés (question 1).

Conclusion. D'après le théorème de cocyclicité, les points A, B, C, D sont sur un même cercle.

3.

Les points A, B, C, E sont-ils cocycliques ?

INDICE

Remplace d par e dans le second quotient ; le théorème est une équivalence.

CORRIGÉ

Hypothèses. L'affixe e diffère de a, b et c, et A, B, C ne sont pas alignés.

Quotient. On pose $Q' = \dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-e}{c-e}$. D'abord :

$$\begin{aligned} \frac{a-e}{c-e} &= \frac{4-i}{-5+2i} \\ &= \frac{-22-3i}{29}. \end{aligned}$$

Avec la question 2 :

$$\begin{aligned} Q' &= -\frac{1+3i}{2} \times \frac{-22-3i}{29} \\ &= \frac{13+69i}{58}. \end{aligned}$$

Sa partie imaginaire est non nulle : Q' n'est pas réel.

Conclusion. Le théorème de cocyclicité est une équivalence : A, B, C, E ne sont pas cocycliques.

4.

Contrôle ces deux conclusions en calculant la distance de chaque point au point Ω d'affixe $2i$.

INDICE

Calcule $|z - 2i|$ pour chacun des cinq points.

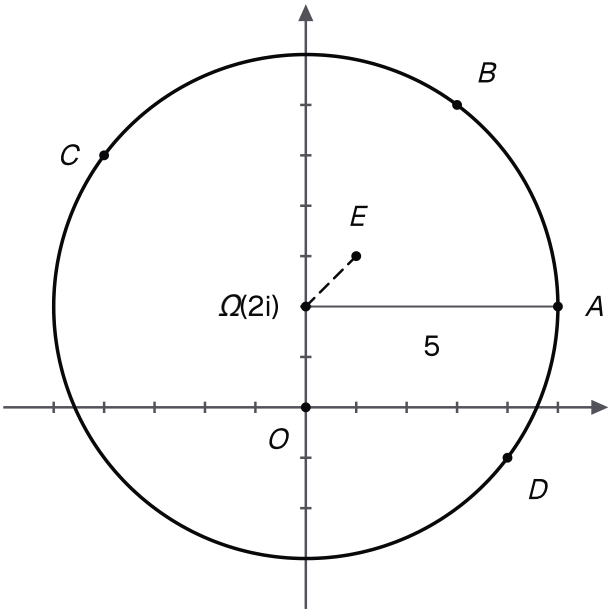
CORRIGÉ

Pour un point M d'affixe z, $\Omega M = |z - 2i|$. Donc :

$$\begin{aligned}\Omega A &= |5| = 5,\\ \Omega B &= |3 + 4i| = 5,\\ \Omega C &= |-4 + 3i| = 5,\\ \Omega D &= |4 - 3i| = 5,\\ \Omega E &= |1 + i| = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Points A, B, C, D. Ils sont sur le cercle de centre Ω et de rayon 5, ce qui confirme la question 2.

Point E. Ce cercle est le seul qui passe par A, B, C, non alignés. Comme $\Omega E = \sqrt{2} \neq 5$, E n'est pas sur ce cercle, ce qui confirme la question 3.



Le contrôle par les distances : A, B, C et D sur le cercle de centre Ω(2i) et de rayon 5, E à l'intérieur.

Exercice 5

Image et antécédent par une rotation d'angle π/3

Soit r la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note A le point d'affixe $a = 3 + i$.

1.

Écris l'écriture complexe de r.

INDICE

Le centre intervient des deux côtés de l'écriture.

CORRIGÉ

D'après les écritures complexes des transformations usuelles, avec $\omega = 1 + i$ et l'angle $\dfrac{\pi}{3}$, la rotation r s'écrit :

$$z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - \omega).$$

Conclusion. r a pour écriture complexe $z' - (1 + i) = e^{i\frac{\pi}{3}}\big(z - (1 + i)\big)$.

2.

Calcule l'affixe a' du point $A' = r(A)$.

INDICE

Calcule $a - \omega$, puis multiplie par $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

CORRIGÉ

On a $a - \omega = 3 + i - (1 + i) = 2$, et $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Donc :

$$\begin{aligned} a' &= \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega) \\ &= 1 + i + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 2 + \left(1 + \sqrt{3}\right)i. \end{aligned}$$

3.

Montre que le triangle $\Omega A A'$ est équilatéral.

INDICE

Calcule le quotient $\dfrac{a' - \omega}{a - \omega}$.

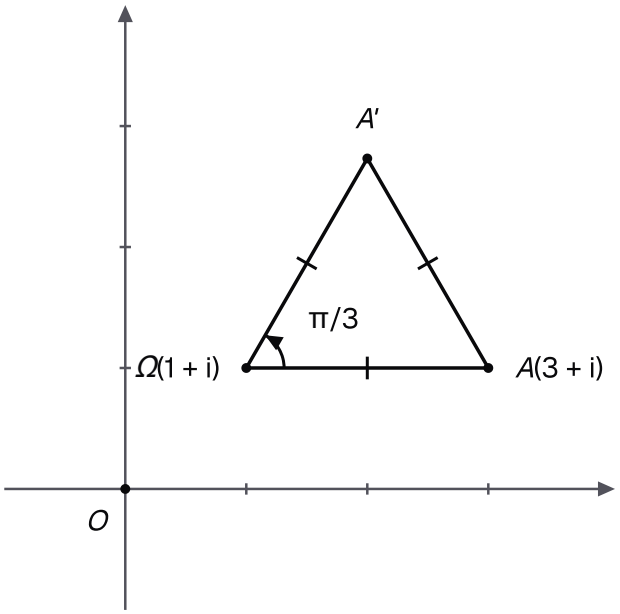
CORRIGÉ

On a $a - \omega = 2 \neq 0$, donc $A \neq \Omega$. Par définition de r, $a' - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$, donc :

$$\frac{a' - \omega}{a - \omega} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

D'après la propriété du quotient d'affixes, $\Omega A' = \Omega A$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Conclusion. Isocèle en Ω avec un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ en Ω, le triangle $\Omega A A'$ est équilatéral.



Le point A' tourne autour de Ω d'un angle π/3 : le triangle ΩAA' a ses trois côtés égaux.

4.

Détermine l'affixe du point N tel que $r(N) = B$, où B est le point d'affixe $1 + 3i$.

INDICE

Isole $z - \omega$ en multipliant les deux membres par $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

CORRIGÉ

Soit N un point d'affixe z. On a $r(N) = B$ si et seulement si

$$1 + 3i - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - \omega).$$

Or $1 + 3i - \omega = 2i$. On multiplie les deux membres par $e^{-i\frac{\pi}{3}} \neq 0$: la condition équivaut à

$$\begin{aligned} z - \omega &= e^{-i\frac{\pi}{3}} \times 2i \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) 2i \\ &= \sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

Donc $z = \omega + \sqrt{3} + i$, soit :

$$z = 1 + \sqrt{3} + 2i.$$

Contrôle : $e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{3} + i\right) = 2i$.

Conclusion. Le point N a pour affixe $1 + \sqrt{3} + 2i$.

Exercice 6

Deux rotations d'angle –π/2 composées

Soient r_1 la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et r_2 la rotation de centre B d'affixe $3i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

1.

Écris les écritures complexes de r_1 et de r_2.

INDICE

Utilise $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ et l'écriture d'une rotation de centre donné.

CORRIGÉ

On utilise $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Rotation de centre O. $r_1 : z' = -iz$.

Rotation de centre B. Le centre a pour affixe $3i$:

$$\begin{aligned} z' - 3i &= -i(z - 3i) \\ &= -iz - 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $r_1 : z' = -iz$ et $r_2 : z' = -iz - 3 + 3i$.

2.

Montre que $r_2 \circ r_1$ a pour écriture $z' = -z - 3 + 3i$, puis identifie cette transformation.

INDICE

Applique r_1 d'abord, puis r_2. Repère ensuite α.

CORRIGÉ

Écriture. Soit M un point d'affixe z. On applique d'abord r_1 : $z_1 = -iz$. Puis r_2 :

$$\begin{aligned} z' &= -iz_1 - 3 + 3i \\ &= (-i)(-i)z - 3 + 3i \\ &= -z - 3 + 3i. \end{aligned}$$

Nature. Ici $\alpha = -1$, réel et différent de 1 : $r_2 \circ r_1$ est l'homothétie de rapport -1, c'est-à-dire la symétrie de centre le point d'affixe

$$\frac{-3 + 3i}{1 - (-1)} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

C'est bien une rotation : celle de même centre et d'angle $-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -\pi$.

3.

Écris l'écriture complexe de $r_1 \circ r_2$. Les composées $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$ sont-elles égales ?

INDICE

Cette fois, r_2 agit en premier.

CORRIGÉ

Écriture. Cette fois, r_2 agit en premier : $z_1 = -iz - 3 + 3i$. Puis r_1 :

$$\begin{aligned} z' &= -iz_1 \\ &= -z + 3i + 3 \\ &= -z + 3 + 3i. \end{aligned}$$

Nature. Ici encore $\alpha = -1$: $r_1 \circ r_2$ est la symétrie de centre le point d'affixe $\dfrac{3+3i}{2}$.

Conclusion. Les deux centres diffèrent, donc $r_1 \circ r_2 \neq r_2 \circ r_1$.

4.

Soit t la translation de vecteur d'affixe 2. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ t$.

INDICE

Substitue $z + 2$ dans l'écriture de r_1, puis calcule le centre.

CORRIGÉ

Écriture. On applique d'abord t : $z_1 = z + 2$. Puis r_1 :

$$z' = -i(z+2) = -iz - 2i.$$

Nature. Ici $\alpha = -i$, avec $\alpha \neq 1$ et $|\alpha| = 1$: $r_1 \circ t$ est une rotation, d'angle $\arg(-i) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Centre. Avec $1 - \alpha = 1 + i$, son centre a pour affixe :

$$\begin{aligned} \frac{-2i}{1+i} &= \frac{-2i(1-i)}{2} \\ &= -1 - i. \end{aligned}$$

Conclusion. $r_1 \circ t$ est la rotation de centre le point d'affixe $-1 - i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 7

Rotation et homothétie de même centre

Soit Ω le point d'affixe $\omega = 2 - i$. On note r la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et h l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.

1.

Montre que $f = h \circ r$ a pour écriture $z' - \omega = -2i(z - \omega)$, puis développe cette écriture.

INDICE

Applique r d'abord : $z_1 - \omega = -i(z - \omega)$.

CORRIGÉ

Écriture de f. Soit M un point d'affixe z. On applique d'abord r : $z_1 - \omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - \omega) = -i(z - \omega)$. Puis h :

$$\begin{aligned} z' - \omega &= 2(z_1 - \omega) \\ &= -2i(z - \omega). \end{aligned}$$

Développement. On obtient $z' = -2iz + 2i\omega + \omega$. Comme $(1 + 2i)(2 - i) = 4 + 3i$:

$$\begin{aligned} z' &= -2iz + (1 + 2i)\omega \\ &= -2iz + 4 + 3i. \end{aligned}$$

2.

Calcule l'affixe de l'image O' de O par f, puis vérifie que $\Omega O' = 2\,\Omega O$.

INDICE

Remplace z par 0, puis calcule deux modules.

CORRIGÉ

Image de O. On remplace z par 0 :

$$z_{O'} = 4 + 3i.$$

Distances.

$$\begin{aligned} \Omega O' &= |4 + 3i - (2 - i)| \\ &= |2 + 4i| = 2\sqrt{5}, \\ \Omega O &= |-2 + i| = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\Omega O' = 2\sqrt{5} = 2\,\Omega O$.

3.

Vérifie que $r \circ h$ a la même écriture que $h \circ r$.

INDICE

Applique h d'abord, puis r.

CORRIGÉ

Soit M un point d'affixe z. On applique d'abord h : $z_1 - \omega = 2(z - \omega)$. Puis r :

$$\begin{aligned} z' - \omega &= -i(z_1 - \omega) \\ &= -2i(z - \omega). \end{aligned}$$

C'est l'écriture de $h \circ r$ obtenue à la question 1.

Conclusion. $r \circ h = h \circ r$, comme l'annonce la propriété des composées de même centre.

4.

Soit t la translation de vecteur d'affixe $1 + i$. Montre que $t \circ h$ est une homothétie, et donne son rapport et son centre.

INDICE

Écris h sous la forme $z' = 2z + \beta$, puis ajoute $1 + i$.

CORRIGÉ

Écriture de h. $z' - \omega = 2(z - \omega)$, soit $z' = 2z - \omega = 2z - 2 + i$.

Composée. On applique d'abord h, puis t, qui ajoute $1 + i$:

$$\begin{aligned} z' &= 2z - 2 + i + 1 + i \\ &= 2z - 1 + 2i. \end{aligned}$$

Nature. Ici $\alpha = 2$, réel et différent de 1 : $t \circ h$ est une homothétie de rapport 2, de centre le point d'affixe

$$\frac{-1 + 2i}{1 - 2} = 1 - 2i.$$

Conclusion. $t \circ h$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre le point d'affixe $1 - 2i$.

Exercice 8

Un barycentre et un cercle

On considère les points A et B d'affixes $a = 1 + 2i$ et $b = 5 + 4i$.

1.

Calcule l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, -1)$.

INDICE

Vérifie la somme des coefficients avant d'appliquer la formule.

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $3 - 1 = 2 \neq 0$: le barycentre G existe.

Affixe. D'après la formule de l'affixe du barycentre :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{3a - b}{2} \\ &= \frac{3(1 + 2i) - (5 + 4i)}{2} \\ &= \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i. \end{aligned}$$

2.

Soit M un point d'affixe z. Montre que le vecteur $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ a pour affixe $2(z_G - z)$.

INDICE

Écris l'affixe de chaque vecteur, puis utilise $2z_G = 3a - b$.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont pour affixes $a - z$ et $b - z$. D'après la question 1, $2z_G = 3a - b$. Donc $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ a pour affixe :

$$\begin{aligned} &3(a - z) - (b - z) \\ &= 3a - b - 2z \\ &= 2z_G - 2z = 2(z_G - z). \end{aligned}$$

3.

Déduis-en l'ensemble Γ des points M tels que $\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 4$.

INDICE

La norme d'un vecteur est le module de son affixe.

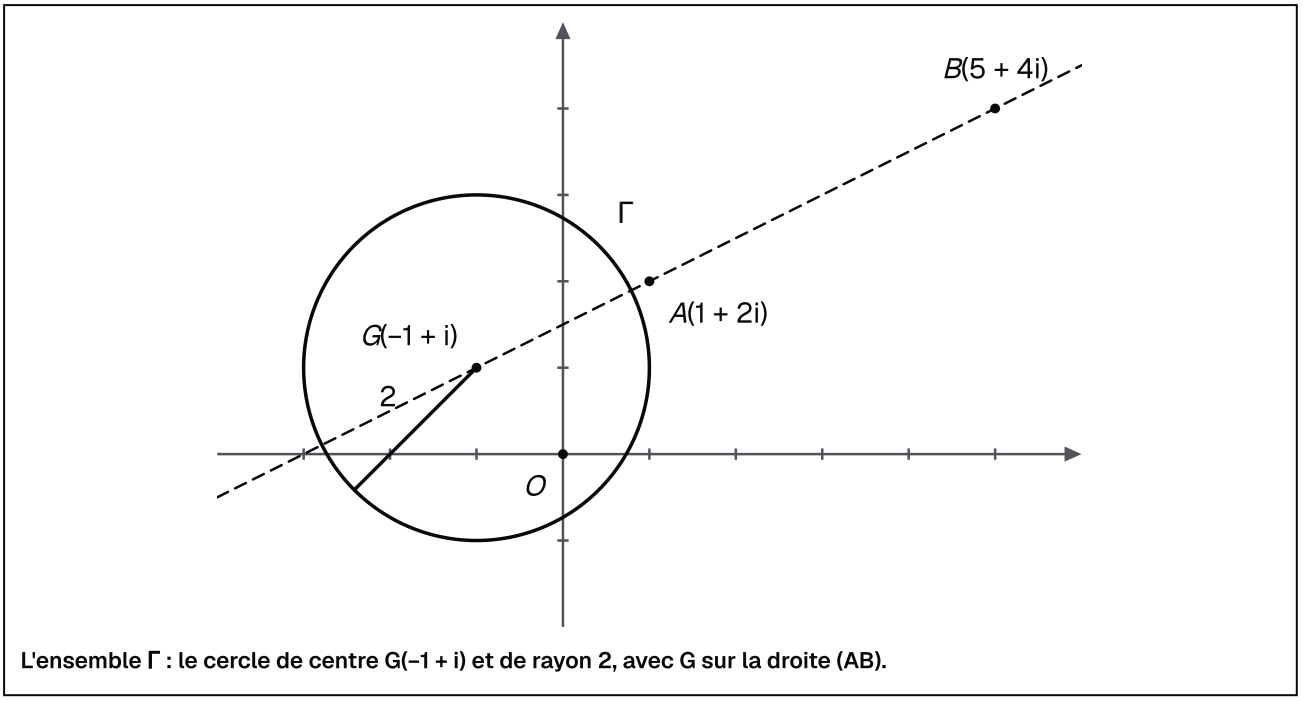
CORRIGÉ

Soit M un point d'affixe z. La norme d'un vecteur est le module de son affixe ; d'après la question 2 :

$$\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 2|z_G - z| = 2GM.$$

La condition s'écrit donc $2GM = 4$, c'est-à-dire $GM = 2$.

Conclusion. Γ est le cercle de centre G et de rayon 2.



L'ensemble Γ : le cercle de centre G(−1 + i) et de rayon 2, avec G sur la droite (AB).

4.

Le point O appartient-il à Γ ? Et le point L d'affixe $1 + i$?

INDICE

Calcule la distance de chaque point à G.

CORRIGÉ

Le point O. $GO = |-1 + i| = \sqrt{2} \neq 2$: $O \notin \Gamma$.

Le point L. $GL = |1 + i - (-1 + i)| = |2| = 2$: $L \in \Gamma$.

Conclusion. O n'appartient pas à Γ ; L lui appartient.