BURHAN

Nombres complexes : géométrie et transformations : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes-et-geometrie/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : géométrie et transformations	Application	9

Exercice 1

Les six racines sixièmes de l'unité

1.

Écris les éléments de $\mathbb{U}_6$ sous forme exponentielle.

INDICE

Applique le théorème des racines de l'unité avec $n = 6$: l'entier k prend six valeurs.

2.

Donne la forme algébrique de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et de $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

INDICE

Utilise $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et les valeurs remarquables en $\frac{\pi}{3}$.

3.

Montre que $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ appartient à $\mathbb{U}_6$.

INDICE

Cherche la forme exponentielle de u : son module, puis un argument.

4.

Calcule la somme des six éléments de $\mathbb{U}_6$.

INDICE

Une propriété des racines de l'unité donne directement cette somme.

Exercice 2

Les racines cubiques de 8i

1.

Écris $8i$ sous forme exponentielle.

INDICE

Calcule le module de $8i$, puis repère un argument de i.

2.

Vérifie que $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ est solution de $z^3 = 8i$, puis écris w_0 sous forme algébrique.

INDICE

Élève w_0 au cube avec la formule de Moivre.

3.

Donne les trois solutions de $z^3 = 8i$ sous forme algébrique.

INDICE

Ajoute $\dfrac{2k\pi}{3}$ à l'argument de w_0, pour k entier de 0 à 2.

4.

Quelle figure forment les images de ces trois solutions ?

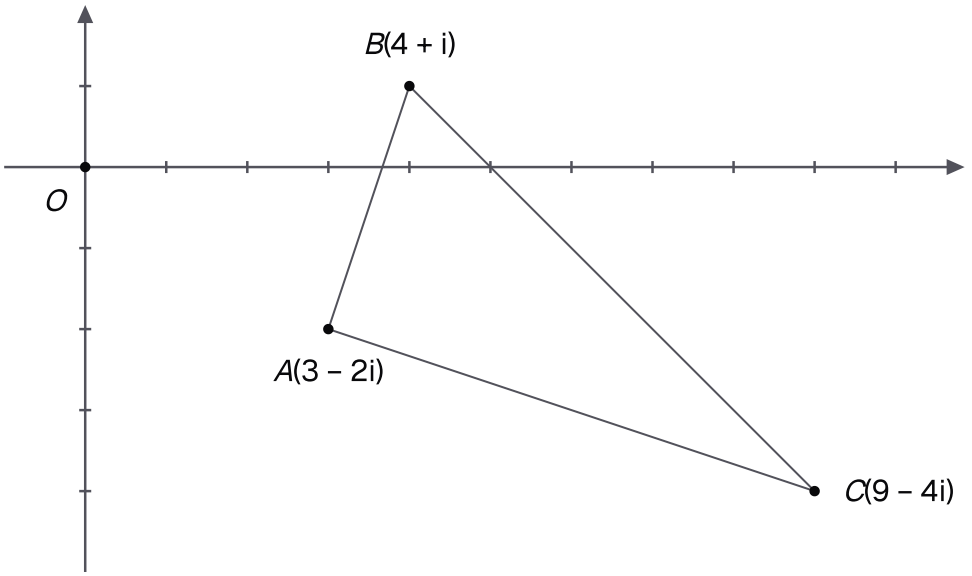
INDICE

Le théorème décrit la position de ces images pour $n \geq 3$.

Exercice 3

Un angle droit lu sur un quotient

On considère les points A, B, C d'affixes $a = 3 - 2i$, $b = 4 + i$ et $c = 9 - 4i$.



Le triangle ABC de l'exercice dans le plan complexe.

1.

Justifie que $A \neq B$ et $A \neq C$, puis calcule $q = \dfrac{c - a}{b - a}$ sous forme algébrique.

INDICE

Calcule d'abord $b - a$ et $c - a$, puis multiplie par le conjugué du dénominateur.

2.

Déduis-en le rapport $\dfrac{AC}{AB}$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

INDICE

Le module du quotient donne un rapport de distances, son argument donne un angle.

3.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

INDICE

Regarde l'angle en A, puis compare les longueurs des trois côtés.

Exercice 4

Alignés ou perpendiculaires

On considère les points A, B, C, D d'affixes $a = 2 - i$, $b = 5 + i$, $c = -4 - 5i$ et $d = 2i$.

1.

Montre que les points A, B, C sont alignés.

INDICE

Vérifie que les points sont distincts, puis calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$.

2.

Montre que les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

INDICE

Vérifie que $A \neq D$, puis calcule $\dfrac{d-a}{b-a}$ en multipliant par le conjugué du dénominateur.

3.

Déduis du quotient de la question 1 le rapport $\dfrac{AC}{AB}$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

INDICE

Le module du quotient donne le rapport, son argument donne l'angle.

Exercice 5

Trois barycentres, dont un impossible

On considère les points A, B, C d'affixes $a = 3 + i$, $b = -1 + 2i$ et $c = 2 - 4i$.

1.

Calcule l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$.

INDICE

Vérifie d'abord la somme des coefficients, puis applique la formule de l'affixe du barycentre.

2.

Calcule l'affixe de l'isobarycentre K de A, B, C.

INDICE

L'isobarycentre est le barycentre avec trois coefficients égaux à 1.

3.

Peut-on définir le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, -2)$?

INDICE

Relis l'hypothèse de la formule du barycentre.

Exercice 6

Écrire trois transformations

1.

Écris l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $3 - i$.

INDICE

Une translation ajoute l'affixe de son vecteur.

2.

Écris l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe $2 + i$ et de rapport -3, sous la forme $z' = \alpha z + \beta$.

INDICE

Pars de $z' - \omega = k(z - \omega)$, puis développe.

3.

Écris l'écriture complexe de la rotation r de centre P d'affixe i et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, sous la forme $z' = \alpha z + \beta$.

INDICE

Pars de $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, avec $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

4.

Calcule l'affixe de l'image du point M d'affixe 2 par r.

INDICE

Remplace z par 2 dans l'écriture de la question 3.

Exercice 7

Reconnaître trois transformations

On considère les transformations f_1, f_2, f_3 du plan qui, au point d'affixe z, associent le point d'affixe z' donnée ci-dessous.

1.

Nature et éléments caractéristiques de f_1 : $z' = -2z + 3i$.

INDICE

Repère α : est-il égal à 1, réel, de module 1 ?

2.

Nature et éléments caractéristiques de f_2 : $z' = z - 4 + i$.

INDICE

Compare α à 1.

3.

Nature et éléments caractéristiques de f_3 : $z' = -iz + 2$.

INDICE

Calcule le module de $\alpha = -i$, puis le centre par $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

Exercice 8

Un cercle et une médiatrice

1.

Détermine l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|z - 2 + i| = 3$.

INDICE

Écris $z - 2 + i$ sous la forme $z - a$.

2.

Détermine l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $|z + 1| = |z - 3i|$.

INDICE

Écris $z + 1$ sous la forme $z - a$ et interprète chaque module comme une distance.

3.

Vérifie que le point K d'affixe $1 + i$ appartient à E_2, et que O n'y appartient pas.

INDICE

Calcule les deux modules pour chaque point.

Exercice 9

Une translation et une homothétie composées

Soient t la translation de vecteur d'affixe $2i$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.

1.

Écris les écritures complexes de t et de h.

INDICE

Le centre de h a pour affixe 0.

2.

Écris l'écriture complexe de $h \circ t$.

INDICE

Dans $h \circ t$, la translation t agit en premier.

3.

Reconnais la transformation $h \circ t$.

INDICE

Repère α, puis calcule le centre.

4.

Écris l'écriture complexe de $t \circ h$. Est-ce la même transformation que $h \circ t$?

INDICE

Cette fois, h agit en premier.