BURHAN

Nombres complexes : géométrie et transformations : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes-et-geometrie/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes : géométrie et transformations	Application	9

Exercice 1

Les six racines sixièmes de l'unité

1.

Écris les éléments de $\mathbb{U}_6$ sous forme exponentielle.

INDICE

Applique le théorème des racines de l'unité avec $n = 6$: l'entier k prend six valeurs.

CORRIGÉ

D'après le théorème des racines de l'unité, avec $n = 6$, les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont les nombres $e^{\frac{2ik\pi}{6}}$, pour $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.

Pour tout entier k, $\dfrac{2k\pi}{6} = \dfrac{k\pi}{3}$.

Conclusion. $\mathbb{U}_6$ compte exactement six éléments :

$$1, \quad e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{2\pi}{3}},$$
$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{4\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

2.

Donne la forme algébrique de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et de $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

INDICE

Utilise $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et les valeurs remarquables en $\dfrac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Le nombre $e^{i\frac{\pi}{3}}$. Pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Donc :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{3}} &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Le nombre $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Comme $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$ et $e^{i\pi} = -1$:

$$\begin{aligned} e^{i\frac{4\pi}{3}} &= -e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Conclusion. $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

3.

Montre que $u = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ appartient à $\mathbb{U}_6$.

INDICE

Cherche la forme exponentielle de u : son module, puis un argument.

CORRIGÉ

Module. $|u|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$, donc $|u| = 1$.

Argument. On a $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc :

$$u = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Conclusion. u est l'élément de $\mathbb{U}_6$ obtenu pour $k = 2$: $u \in \mathbb{U}_6$.

Contrôle par la formule de Moivre : $u^6 = e^{4i\pi} = 1$.

4.

Calcule la somme des six éléments de $\mathbb{U}_6$.

INDICE

Une propriété des racines de l'unité donne directement cette somme.

CORRIGÉ

D'après les propriétés des racines de l'unité, pour tout entier $n \geq 2$, la somme des n éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

Conclusion. Pour $n = 6$, la somme vaut 0.

Contrôle : $-1 \in \mathbb{U}_6$. Pour tout $w \in \mathbb{U}_6$, le nombre $-w = (-1) \times w$ est donc aussi dans $\mathbb{U}_6$, et $-w \neq w$. Les six éléments se regroupent en trois paires $\{w, -w\}$, de somme nulle chacune.

Exercice 2

Les racines cubiques de 8i

1.

Écris $8i$ sous forme exponentielle.

INDICE

Calcule le module de $8i$, puis repère un argument de i.

CORRIGÉ

Module. $|8i| = 8|i| = 8$.

Argument. Comme $8 > 0$, le nombre $8i$ a les mêmes arguments que i : $\arg(8i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion.

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2.

Vérifie que $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ est solution de $z^3 = 8i$, puis écris w_0 sous forme algébrique.

INDICE

Élève w_0 au cube avec la formule de Moivre.

CORRIGÉ

Vérification. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} w_0^3 &= 2^3 e^{3i\frac{\pi}{6}} \\ &= 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i. \end{aligned}$$

Donc w_0 est solution de $z^3 = 8i$; son module 2 est bien $\sqrt[3]{8}$.

Forme algébrique.

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

Conclusion. w_0 est solution de $z^3 = 8i$, et $w_0 = \sqrt{3} + i$.

3.

Donne les trois solutions de $z^3 = 8i$ sous forme algébrique.

INDICE

Ajoute $\dfrac{2k\pi}{3}$ à l'argument de w_0, pour k entier de 0 à 2.

CORRIGÉ

Forme des solutions. Comme $8i \neq 0$, le théorème des racines n-ièmes, avec $n = 3$ et la solution w_0, donne exactement trois solutions : les nombres w_k définis pour $k \in \{0, 1, 2\}$ par

$$w_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}.$$

Formes algébriques.

- $k = 0$: $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$;
- $k = 1$: $w_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$;
- $k = 2$: $w_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$.

Conclusion. Les solutions de $z^3 = 8i$ sont $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$ et $-2i$.

4.

Quelle figure forment les images de ces trois solutions ?

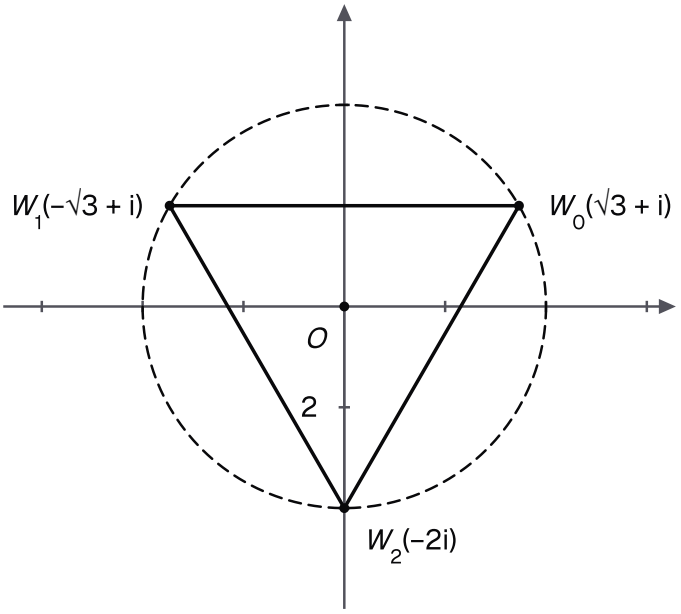
INDICE

Le théorème décrit la position de ces images pour $n \geq 3$.

CORRIGÉ

D'après le théorème des racines n-ièmes, avec $n = 3$, les images des solutions sont les sommets d'un polygone régulier à trois côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[3]{8} = 2$.

Conclusion. Les images des trois solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral, de centre O, dont les sommets sont à la distance 2 de O.

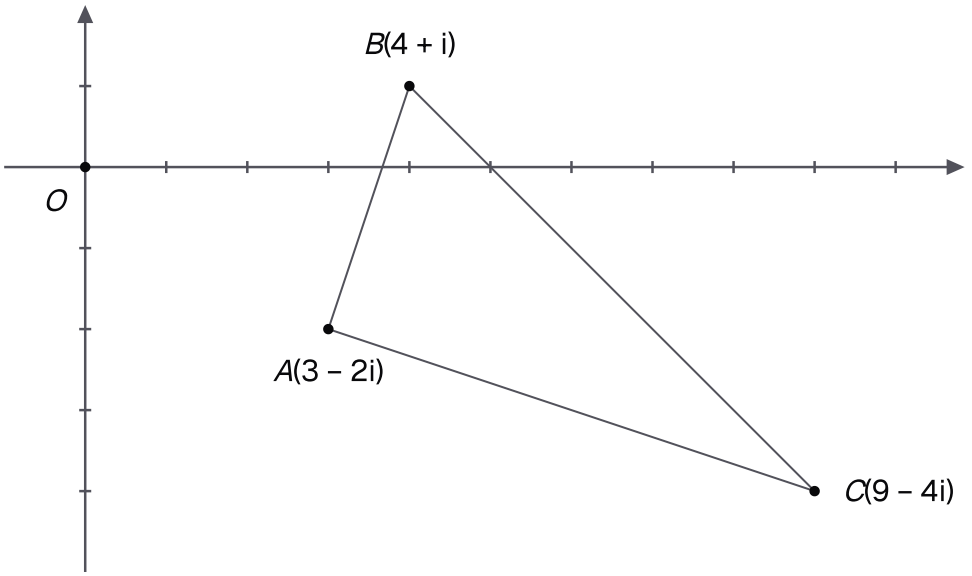


Les trois solutions de z³ = 8i et le triangle équilatéral qu'elles forment dans le cercle de rayon 2.

Exercice 3

Un angle droit lu sur un quotient

On considère les points A, B, C d'affixes $a = 3 - 2i$, $b = 4 + i$ et $c = 9 - 4i$.



Le triangle ABC de l'exercice dans le plan complexe.

1.

Justifie que $A \neq B$ et $A \neq C$, puis calcule $q = \dfrac{c - a}{b - a}$ sous forme algébrique.

INDICE

Calcule d'abord $b - a$ et $c - a$, puis multiplie par le conjugué du dénominateur.

CORRIGÉ

Points distincts. On a $b - a = 1 + 3i$ et $c - a = 6 - 2i$. Ces nombres sont non nuls, donc $A \neq B$ et $A \neq C$.

Calcul de q. On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned} q &= \frac{(6 - 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} \\ &= \frac{6 - 18i - 2i - 6}{10} \\ &= \frac{-20i}{10} = -2i. \end{aligned}$$

Conclusion. $A \neq B$, $A \neq C$ et $q = -2i$.

2.

Déduis-en le rapport $\dfrac{AC}{AB}$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

INDICE

Le module du quotient donne un rapport de distances, son argument donne un angle.

CORRIGÉ

Comme $A \neq B$ et $A \neq C$, la propriété du quotient d'affixes s'applique à $q = -2i$.

Rapport.

$$\frac{AC}{AB} = |-2i| = 2.$$

Angle.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &\equiv \arg(-2i) \\ &\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{AC}{AB} = 2$, et $-\dfrac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

3.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

INDICE

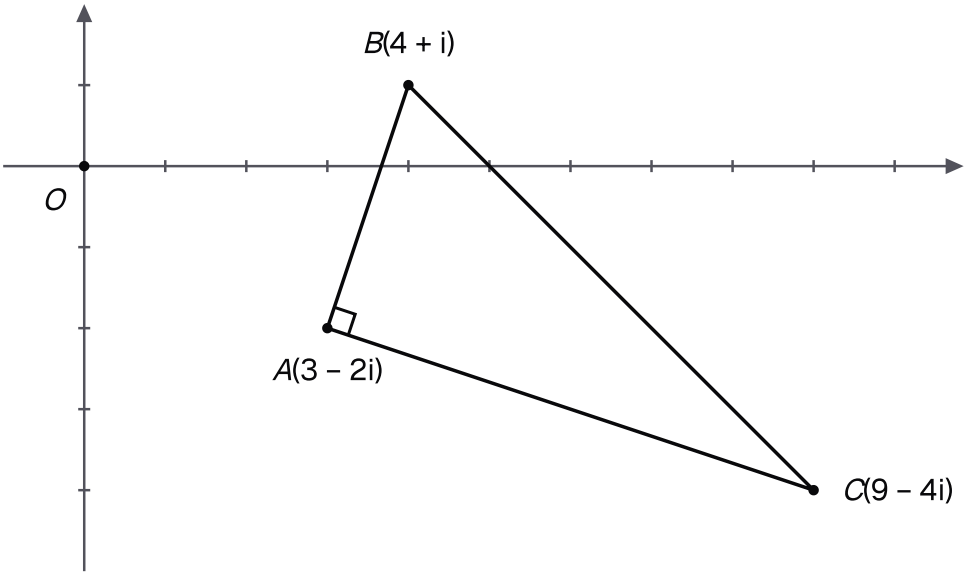
Regarde l'angle en A, puis compare les longueurs des trois côtés.

CORRIGÉ

Angle en A. D'après la question 2, l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ mesure $-\frac{\pi}{2}$: le triangle ABC est rectangle en A.

Le triangle n'est pas isocèle. Son hypoténuse $[BC]$ est strictement plus longue que $[AB]$ et que $[AC]$: le triangle ne pourrait être isocèle qu'en A. Or $AC = 2AB \neq AB$, car $AB \neq 0$.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en A, sans être isocèle.



Un angle droit en A et un côté AC deux fois plus long que AB : rectangle en A, pas isocèle.

Exercice 4

Alignés ou perpendiculaires

On considère les points A, B, C, D d'affixes $a = 2 - i$, $b = 5 + i$, $c = -4 - 5i$ et $d = 2i$.

1.

Montre que les points A, B, C sont alignés.

INDICE

Vérifie que les points sont distincts, puis calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$.

CORRIGÉ

Points distincts. $b - a = 3 + 2i \neq 0$ et $c - a = -6 - 4i \neq 0$, donc $A \neq B$ et $A \neq C$.

Quotient. Comme $-6 - 4i = -2(3 + 2i)$:

$$\frac{c-a}{b-a} = -2.$$

Ce quotient est réel.

Conclusion. D'après la caractérisation de l'alignement, les points A, B, C sont alignés.

2.

Montre que les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

INDICE

Vérifie que $A \neq D$, puis calcule $\dfrac{d-a}{b-a}$ en multipliant par le conjugué du dénominateur.

CORRIGÉ

Points distincts. $d - a = -2 + 3i \neq 0$, donc $A \neq D$; on sait déjà que $A \neq B$.

Quotient. Comme $i(3 + 2i) = 3i - 2 = -2 + 3i$:

$$\frac{d-a}{b-a} = i.$$

Ce quotient est imaginaire pur et non nul.

Conclusion. D'après la caractérisation de l'orthogonalité, les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

3.

Déduis du quotient de la question 1 le rapport $\dfrac{AC}{AB}$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

INDICE

Le module du quotient donne le rapport, son argument donne l'angle.

CORRIGÉ

Comme $A \neq B$ et $A \neq C$, la propriété du quotient d'affixes s'applique au quotient $\dfrac{c-a}{b-a} = -2$ de la question 1.

Rapport.

$$\frac{AC}{AB} = |-2| = 2.$$

Angle.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &\equiv \arg(-2) \\ &\equiv \pi \ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{AC}{AB} = 2$, et π est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice 5

Trois barycentres, dont un impossible

On considère les points A, B, C d'affixes $a = 3 + i$, $b = -1 + 2i$ et $c = 2 - 4i$.

1.

Calcule l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$.

INDICE

Vérifie d'abord la somme des coefficients, puis applique la formule de l'affixe du barycentre.

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $2 - 1 + 1 = 2 \neq 0$: le barycentre G existe.

Affixe. D'après la formule de l'affixe du barycentre, $z_G = \dfrac{2a - b + c}{2}$. Or $2a = 6 + 2i$, $-b = 1 - 2i$ et $c = 2 - 4i$, donc $2a - b + c = 9 - 4i$.

Conclusion.

$$z_G = \frac{9 - 4i}{2} = \frac{9}{2} - 2i.$$

2.

Calcule l'affixe de l'isobarycentre K de A, B, C.

INDICE

L'isobarycentre est le barycentre avec trois coefficients égaux à 1.

CORRIGÉ

Existence. Les trois coefficients valent 1, de somme $3 \neq 0$: l'isobarycentre K existe.

Affixe. On a $a + b + c = 4 - i$. D'après la formule de l'affixe du barycentre :

$$\begin{aligned} z_K &= \frac{a + b + c}{3} = \frac{4 - i}{3} \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}i. \end{aligned}$$

3.

Peut-on définir le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, -2)$?

INDICE

Relis l'hypothèse de la formule du barycentre.

CORRIGÉ

Non. La somme des coefficients vaut $1 + 1 - 2 = 0$.

Or un système de points pondérés n'admet de barycentre que si la somme de ses coefficients est non nulle : la formule de l'affixe diviserait ici par 0.

Conclusion. Le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, -2)$ n'existe pas.

Exercice 6

Écrire trois transformations

1.

Écris l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $3 - i$.

INDICE

Une translation ajoute l'affixe de son vecteur.

CORRIGÉ

D'après les écritures complexes des transformations usuelles, une translation ajoute l'affixe de son vecteur.

Conclusion. La translation de vecteur d'affixe $3 - i$ a pour écriture complexe :

$$z' = z + 3 - i.$$

2.

Écris l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe $2 + i$ et de rapport -3, sous la forme $z' = \alpha z + \beta$.

INDICE

Pars de $z' - \omega = k(z - \omega)$, puis développe.

CORRIGÉ

Soit $\omega = 2 + i$ l'affixe de Ω. Le rapport -3 est un réel non nul, et l'homothétie s'écrit $z' - \omega = -3(z - \omega)$, soit $z' = -3z + 3\omega + \omega$. Donc :

$$\begin{aligned} z' &= -3z + 3(2 + i) \\ &\quad + 2 + i \\ &= -3z + 8 + 4i. \end{aligned}$$

Conclusion. L'homothétie a pour écriture complexe $z' = -3z + 8 + 4i$.

3.

Écris l'écriture complexe de la rotation r de centre P d'affixe i et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, sous la forme $z' = \alpha z + \beta$.

INDICE

Pars de $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, avec $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

CORRIGÉ

Le centre P a pour affixe i, et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. La rotation r s'écrit :

$$\begin{aligned} z' - i &= e^{i\frac{\pi}{2}}(z - i) \\ &= i(z - i) = iz + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. La rotation r a pour écriture complexe $z' = iz + 1 + i$.

4.

Calcule l'affixe de l'image du point M d'affixe 2 par r.

INDICE

Remplace z par 2 dans l'écriture de la question 3.

CORRIGÉ

On remplace z par 2 dans l'écriture de r :

$$z' = 2i + 1 + i = 1 + 3i.$$

Contrôle : $z' - i = 1 + 2i$ et $i(2 - i) = 2i + 1$; on a bien $z' - i = i(2 - i)$.

Conclusion. L'image de M par r a pour affixe $1 + 3i$.

Exercice 7

Reconnaître trois transformations

On considère les transformations f_1, f_2, f_3 du plan qui, au point d'affixe z, associent le point d'affixe z' donnée ci-dessous.

1.

Nature et éléments caractéristiques de f_1 : $z' = -2z + 3i$.

INDICE

Repère α : est-il égal à 1, réel, de module 1 ?

CORRIGÉ

Nature. Ici $\alpha = -2$: c'est un réel différent de 1. D'après la reconnaissance des écritures $z' = \alpha z + \beta$, f_1 est une homothétie de rapport -2.

Centre. C'est l'unique point invariant Ω_1, d'affixe :

$$\frac{3i}{1-(-2)} = i.$$

Contrôle : $-2i + 3i = i$.

Conclusion. f_1 est l'homothétie de rapport -2 et de centre le point Ω_1 d'affixe i.

2.

Nature et éléments caractéristiques de f_2 : $z' = z - 4 + i$.

INDICE

Compare α à 1.

CORRIGÉ

Ici $\alpha = 1$: f_2 est la translation de vecteur d'affixe $-4 + i$.

Ce vecteur est non nul : f_2 n'a aucun point invariant.

Conclusion. f_2 est la translation de vecteur d'affixe $-4 + i$.

3.

Nature et éléments caractéristiques de f_3 : $z' = -iz + 2$.

INDICE

Calcule le module de $\alpha = -i$, puis le centre par $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

CORRIGÉ

Nature. Ici $\alpha = -i$, avec $\alpha \neq 1$ et $|\alpha| = 1$: f_3 est une rotation, d'angle

$$\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Centre. Avec $\beta = 2$ et $1 - \alpha = 1 + i$, le centre a pour affixe :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1-\alpha} &= \frac{2}{1+i} \\ &= \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i. \end{aligned}$$

Contrôle : $-i(1-i) + 2 = -i - 1 + 2 = 1 - i$.

Conclusion. f_3 est la rotation de centre le point d'affixe $1 - i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 8

Un cercle et une médiatrice

1.

Détermine l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|z-2+i|=3$.

INDICE

Écris $z-2+i$ sous la forme $z-a$.

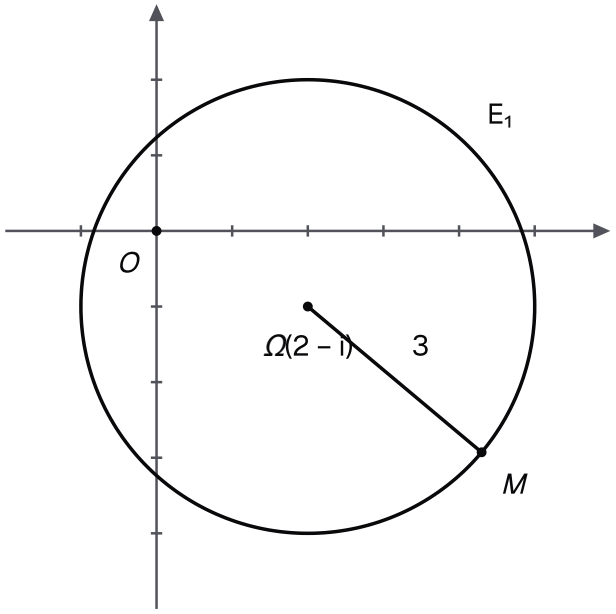
CORRIGÉ

Soit M un point d'affixe z. On a $z-2+i=z-(2-i)$. Soit Ω le point d'affixe $2-i$: la condition s'écrit

$$\Omega M=3.$$

Le rayon 3 est strictement positif.

Conclusion. E_1 est le cercle de centre Ω et de rayon 3.



L'ensemble E_1 : le cercle de centre Ω(2 – i) et de rayon 3.

2.

Détermine l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $|z+1| = |z-3i|$.

INDICE

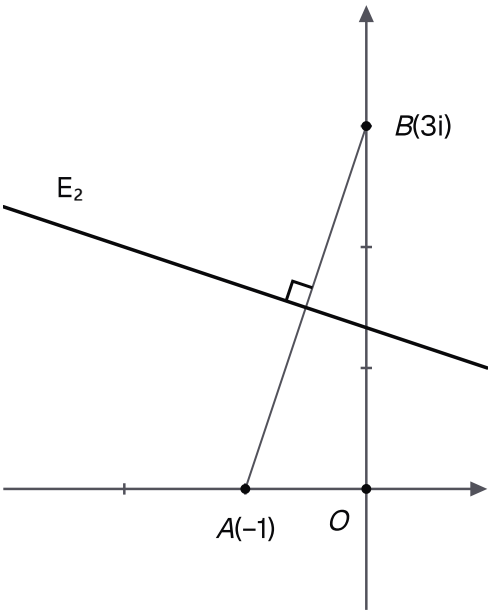
Écris $z+1$ sous la forme $z-a$ et interprète chaque module comme une distance.

CORRIGÉ

Soient A et B les points d'affixes -1 et $3i$; ils sont distincts. Soit M un point d'affixe z. Comme $z+1 = z-(-1)$, la condition s'écrit

$$AM = BM.$$

Conclusion. E_2 est la médiatrice du segment $[AB]$.



L'ensemble E₂ : la médiatrice du segment qui joint A(–1) et B(3i).

3.

Vérifie que le point K d'affixe $1+i$ appartient à E_2, et que O n'y appartient pas.

INDICE

Calcule les deux modules pour chaque point.

CORRIGÉ

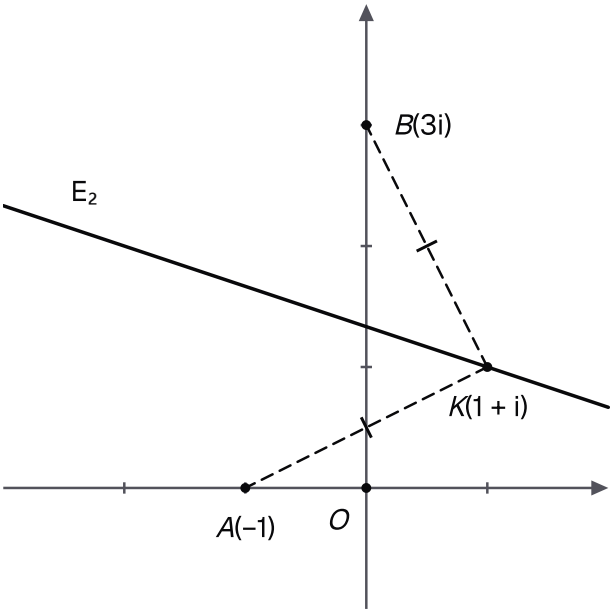
Le point K.

$$|1+i+1| = |2+i| = \sqrt{5},$$
$$|1+i-3i| = |1-2i| = \sqrt{5}.$$

Les deux modules sont égaux : $K \in E_2$.

Le point O. $|0+1| = 1$ et $|0-3i| = 3$. Les deux modules diffèrent : $O \notin E_2$.

Conclusion. K appartient à E_2, O n'y appartient pas.



Le point K(1 + i) est à égale distance de A et de B ; l'origine O, elle, est plus près de A.

Exercice 9

Une translation et une homothétie composées

Soient t la translation de vecteur d'affixe $2i$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.

1.

Écris les écritures complexes de t et de h.

INDICE

Le centre de h a pour affixe 0.

CORRIGÉ

Translation. t ajoute $2i$: $t : z' = z + 2i$.

Homothétie. Le centre O a pour affixe 0 : $z' - 0 = 3(z - 0)$, soit $h : z' = 3z$.

2.

Écris l'écriture complexe de $h \circ t$.

INDICE

Dans $h \circ t$, la translation t agit en premier.

CORRIGÉ

Soit M un point d'affixe z. Dans $h \circ t$, la translation t agit en premier : $t(M)$ a pour affixe $z_1 = z + 2i$.
Puis h donne :

$$z' = 3z_1 = 3z + 6i.$$

Conclusion. $h \circ t$ a pour écriture complexe $z' = 3z + 6i$.

3.

Reconnais la transformation $h \circ t$.

INDICE

Repère α, puis calcule le centre.

CORRIGÉ

Ici $\alpha = 3$, réel et différent de 1 : $h \circ t$ est une homothétie de rapport 3. Son centre a pour affixe :

$$\frac{6i}{1 - 3} = -3i.$$

Conclusion. $h \circ t$ est l'homothétie de rapport 3 et de centre le point d'affixe $-3i$.

4.

Écris l'écriture complexe de $t \circ h$. Est-ce la même transformation que $h \circ t$?

INDICE

Cette fois, h agit en premier.

CORRIGÉ

Écriture. Cette fois, h agit en premier : $z_1 = 3z$. Puis t ajoute $2i$:

$$z' = 3z + 2i.$$

Nature. Ici $\alpha = 3$, réel et différent de 1 : $t \circ h$ est l'homothétie de rapport 3 et de centre le point d'affixe

$$\frac{2i}{1-3} = -i.$$

Conclusion. Les centres d'affixes $-3i$ et $-i$ diffèrent : $t \circ h \neq h \circ t$.