BURHAN

Nombres complexes : géométrie et transformations

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/nombres-complexes-et-geometrie/cours

Chapitre	Semestre
Nombres complexes : géométrie et transformations	Semestre 2

Racines n-ièmes de l'unité

Un cube égal à un

Tu sais résoudre $z^2 = 1$: deux solutions, 1 et -1.

Passons au cube. L'équation $z^3 = 1$ a une solution évidente, 1. Parmi les réels, c'est la seule.

Mais le plan complexe en cache d'autres. Ce chapitre commence par les trouver toutes, puis par les placer sur un cercle.

Devine : Un cube égal à un

Un seul de ces nombres a pour cube 1. Lequel ?

A. -1

Faux.

Le cube d'un réel négatif est négatif : $(-1)^3 = -1$.

B. i

Faux.

On a $i^3 = i^2 \times i = -i$, et non 1.

C. $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Faux.

Ce nombre vaut $e^{i\frac{\pi}{3}}$. Par la formule de Moivre, son cube vaut $e^{i\pi} = -1$.

D. $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Juste.

Ce nombre vaut $e^{i\frac{2\pi}{3}}$: son cube vaut $e^{2i\pi} = 1$.

Indice 1

Écris chaque nombre sous forme exponentielle.

Indice 2

Par la formule de Moivre, le cube de $e^{i\varphi}$ est $e^{3i\varphi}$.

Correction

Le nombre $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour module 1 et pour argument $\dfrac{2\pi}{3}$. Il s'écrit donc $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Par la formule de Moivre :

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

Tu le retrouveras bientôt sous le nom j.

Le vocabulaire

Définition : Racine n-ième d'un nombre complexe ; racines n-ièmes de l'unité

Soient n un entier naturel, $n \geq 2$, et a un nombre complexe. On appelle **racine n-ième** de a tout nombre complexe w tel que $w^n = a$. Les racines n-ièmes de 1 sont appelées **racines n-ièmes de l'unité** ; on note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble.

Exemple

Le nombre $-i$ est une racine quatrième de l'unité. En effet, $(-i)^2 = -1$, donc :

$$(-i)^4 = (-1)^2 = 1.$$

Ainsi $-i \in \mathbb{U}_4$.

De même, $1+i$ est une racine quatrième de -4. En effet, $(1+i)^2 = 2i$, donc :

$$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4.$$

Combien de racines

Pourquoi y a-t-il exactement n racines n-ièmes de l'unité ?

Si $w^n = 1$, le module de w a pour puissance n-ième 1. Ce module est un réel positif : il vaut donc 1.

Reste l'argument. La formule de Moivre transforme l'équation en une condition sur n fois cet argument.

Théorème : Les n racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \geq 2$ un entier. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ a exactement n éléments : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, notons M_k l'image de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$: ces points sont sur le cercle de centre O et de rayon 1. Pour $n \geq 3$, la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ envoie M_k sur M_{k+1} pour $0 \leq k \leq n-2$, et M_{n-1} sur M_0 : les points $M_0, \ldots, M_{n-1}$ sont les sommets d'un **polygone régulier** à n côtés inscrit dans ce cercle.

Démonstration

Soit w un nombre complexe. **Étape 1.** Si $w^n = 1$, alors $|w|^n = |w^n| = 1$; le réel positif $|w|$ vaut donc 1, et $w = e^{i\varphi}$ pour un argument φ choisi dans $[0, 2\pi[$. **Étape 2.** Par la formule de Moivre, $w^n = e^{in\varphi}$. Comme $e^{ia} = e^{ib}$ équivaut à $a \equiv b\ [2\pi]$, l'égalité $w^n = 1$ équivaut à $n\varphi = 2k\pi$ avec k entier ; et

$0 \leq \varphi < 2\pi$ donne $0 \leq k \leq n-1$. Réciproquement, $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1$. **Étape 3.** Si $0 \leq k < k' \leq n-1$, alors $0 < \dfrac{2(k'-k)\pi}{n} < 2\pi$: ces deux réels ne sont pas congrus modulo 2π, donc les deux nombres sont distincts. Il y a exactement n éléments. **Étape 4.** Soit $n \geq 3$. Tous les M_k sont à la distance 1 de O et, par la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) \equiv \dfrac{2(k+1)\pi}{n} - \dfrac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$, de même $\left(\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_0}\right) \equiv -\dfrac{2(n-1)\pi}{n} \equiv \dfrac{2\pi}{n}\ [2\pi]$. Par définition de la rotation (rappel de 1BAC), la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ envoie chaque sommet sur le suivant. Elle conserve les distances et les angles : les côtés sont égaux, les angles aussi, et le polygone est régulier.

Vérifie : L'étape 3 de la preuve

À l'étape 3, pourquoi deux entiers $k < k'$ de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ donnent-ils deux nombres différents ?

A. Parce que les entiers k et k' sont différents.

Faux.

Insuffisant : $k = 0$ et $k = n$ sont différents, et donnent pourtant le même nombre 1.

B. Parce que l'écart des arguments est strictement entre 0 et 2π.

Juste.

Deux arguments qui diffèrent d'un réel de $]0, 2\pi[$ ne sont pas congrus modulo 2π.

C. Parce que les deux nombres ont des modules différents.

Faux.

Tous les éléments de $\mathbb{U}_n$ ont pour module 1.

Correction

Les arguments $\dfrac{2k\pi}{n}$ et $\dfrac{2k'\pi}{n}$ diffèrent de :

$$\frac{2(k'-k)\pi}{n}.$$

Comme $1 \leq k'-k \leq n-1$, cet écart est strictement compris entre 0 et 2π. Ce n'est donc pas un multiple de 2π.

Conclusion. Les deux nombres sont distincts.

Ce que dit la preuve

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On sépare le module et l'argument. Le module est forcé : il vaut 1.

On prend l'argument φ dans $[0, 2\pi[$. La condition $n\varphi = 2k\pi$ ne laisse alors que les entiers k de 0 à $n-1$.

Il reste à vérifier que ces n valeurs donnent des nombres distincts.

Enfin, la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ fait passer d'un sommet au suivant.

Exemple

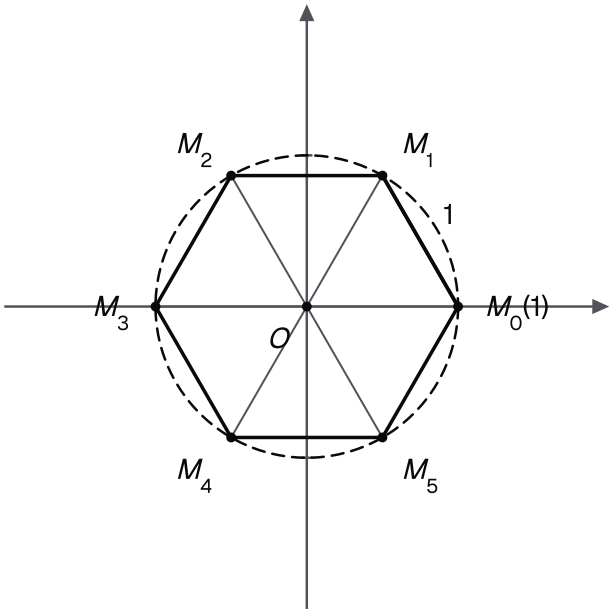
Prenons $n = 6$. Les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont les nombres $e^{\frac{ik\pi}{3}}$, pour k entier de 0 à 5 :

- 1, $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- -1, $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Leurs images forment un hexagone régulier, de côté :

$$\left|e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right| = 1.$$

Pour $n = 2$, en revanche, on obtient seulement 1 et -1. Deux points ne forment pas de polygone : le polygone n'est annoncé que pour $n \geq 3$.



Les six éléments de U_6, sommets d'un hexagone régulier de côté 1 inscrit dans le cercle unité.

Le nombre j

Pourquoi la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est-elle nulle ?

Dans l'hexagone, chaque sommet w a son opposé $-w$, et les paires s'annulent. Pour n impair, ces paires n'existent pas.

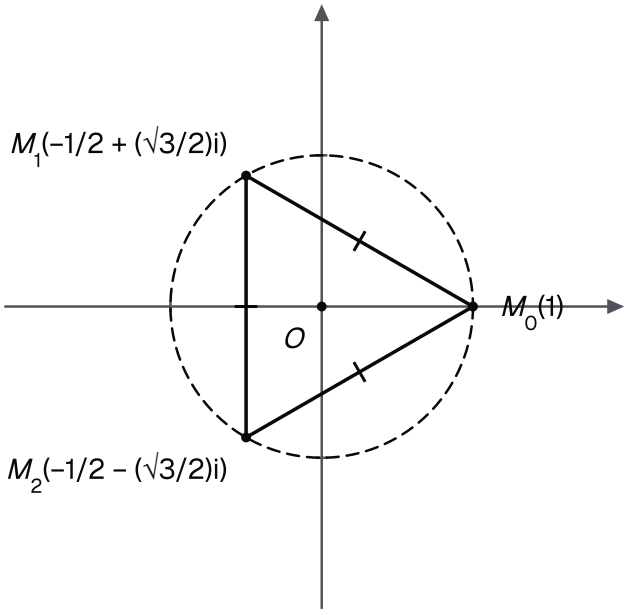
La preuve emploie donc une autre idée : multiplier la somme par $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ne la change pas.

Propriété : Propriétés de $\mathbb{U}_n$; le nombre j

Soit $n \geq 2$ un entier. On a $1 \in \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. Pour tous w et w' de $\mathbb{U}_n$: $ww' \in \mathbb{U}_n$, et $\dfrac{1}{w} = \overline{w}$, qui appartient à $\mathbb{U}_n$. La somme des n éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle. Pour $n = 3$, on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$: $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, $j^3 = 1$, $\overline{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Démonstration

Étape 1. $1^n = 1$, donc $1 \in \mathbb{U}_n$. Par F02, tout élément de $\mathbb{U}_n$ s'écrit $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$; il est donc de module 1, et $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. **Étape 2.** Si $w^n = w'^n = 1$, alors $(ww')^n = w^n w'^n = 1$. **Étape 3.** Comme $|w| = 1$, on a $\dfrac{1}{w} = \overline{w}$ (nombres de module 1), et $(\overline{w})^n = \overline{w^n} = 1$. **Étape 4.** Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Par F02 et la formule de Moivre, les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les ω^k, $0 \leq k \leq n-1$; ils sont distincts, donc $\omega \neq \omega^0 = 1$. Soit $S = 1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1}$. Alors $\omega S = \omega + \cdots + \omega^n = S - 1 + \omega^n = S$, donc $(\omega - 1)S = 0$; comme $\omega - 1 \neq 0$, $S = 0$. **Étape 5.** Pour $n = 3$, $j = \omega$: $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ et $j^3 = 1$. Comme $j \times j^2 = 1$, l'étape 3 donne $\overline{j} = \dfrac{1}{j} = j^2$; l'étape 4 donne $1 + j + j^2 = 0$.



Les images de 1, j et j² partagent le cercle de rayon 1 en trois arcs égaux.

Vérifie : Une condition de la preuve

Dans la preuve de la somme nulle, pourquoi faut-il établir que $\omega \neq 1$?

A. Pour que ω soit de module 1.

Faux.

Le nombre $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est de module 1 dans tous les cas.

B. Pour avoir l'égalité $\omega^n = 1$.

Faux.

Cette égalité vient de la formule de Moivre, sans condition.

C. Pour diviser $(\omega - 1)S = 0$ par $\omega - 1$.

Juste.
On ne divise jamais par un nombre sans savoir qu'il est non nul.

Correction
L'égalité $(\omega - 1)S = 0$ ne donne $S = 0$ que si $\omega - 1 \neq 0$.

Or ω et $\omega^0 = 1$ sont deux éléments distincts de $\mathbb{U}_n$, d'après le théorème sur les n racines n-ièmes de l'unité.

Calculer avec j

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'une somme S est nulle, on cherche un nombre $\omega \neq 1$ tel que $\omega S = S$.

Alors $(\omega - 1)S = 0$, et on divise par $\omega - 1$, qui est non nul.

Cette idée évite toute formule de somme.

Exemple

Calculs avec j. Comme $1 + j + j^2 = 0$, on a $1 + j = -j^2$. Donc :

$$\begin{aligned}(1+j)^6 &= j^{12} \\ &= \left(j^3\right)^4 = 1.\end{aligned}$$

De même, $2026 = 3 \times 675 + 1$, donc :

$$\begin{aligned}j^{2026} &= \left(j^3\right)^{675} \times j \\ &= j.\end{aligned}$$

L'hypothèse $n \geq 2$. Pour $n = 1$, la seule racine de 1 serait 1 lui-même. La somme vaudrait 1, et non 0.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Combien de solutions

Devine : Combien de solutions

Combien de nombres complexes z vérifient $z^3 = 8i$?

A. 1

Faux.
Diviser l'argument par 3 ne fournit qu'une solution.

B. 2

Faux.

Deux solutions, c'est le cas des racines carrées, pas des racines cubiques.

C. 3

Juste.

Une équation $z^3 = a$ avec $a \neq 0$ a trois solutions.

D. Une infinité

Faux.

Les arguments $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ne donnent que trois points distincts du cercle.

Correction

Le nombre $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ convient :

$$\begin{aligned}\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 &= 8e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 8i.\end{aligned}$$

Multiplier cette solution par j ou par j^2 donne encore une solution, car $j^3 = 1$. On obtient trois solutions distinctes.

La section montre que ce sont les seules.

Remarque : Petit rappel : racine n-ième d'un réel positif

Pour un entier $n \geq 2$ et un réel $r > 0$, on note $\sqrt[n]{r}$ l'unique réel positif dont la puissance n-ième vaut r.

Par exemple, $\sqrt[3]{125} = 5$ et $\sqrt[4]{16} = 2$.

Ce symbole ne s'écrit que devant un réel positif, jamais devant un nombre complexe non réel.

Le théorème

Pourquoi encore n solutions ? Suppose qu'on connaisse une solution w_0.

Pour toute autre solution w, le quotient $\frac{w}{w_0}$ a pour puissance n-ième $\frac{a}{a} = 1$. C'est donc une racine n-ième de l'unité.

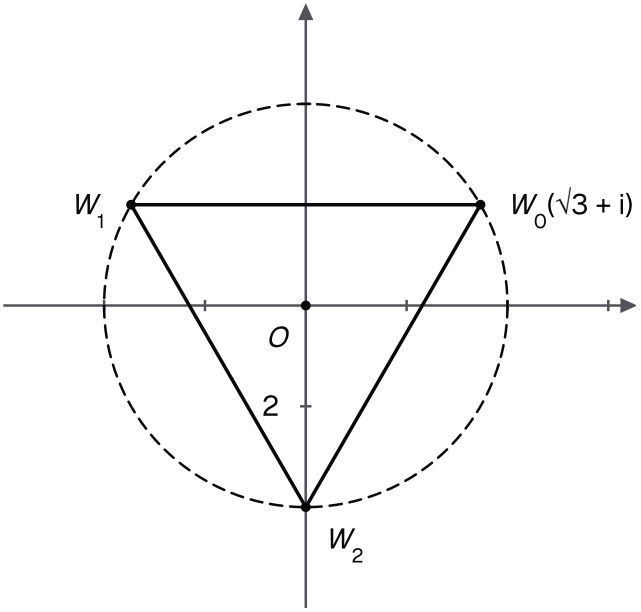
Et tu sais déjà qu'il y en a n.

Théorème : Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Soient $n \geq 2$ un entier et $a = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul, avec r réel strictement positif et θ réel. Posons $w_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$. Alors a a exactement n racines n-ièmes : les nombres $w_0 u$, $u \in \mathbb{U}_n$, c'est-à-dire les nombres $\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Pour $n \geq 3$, leurs images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Démonstration

Étape 1. Comme $(\sqrt[n]{r})^n = r$ et, par la formule de Moivre, $\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = e^{i\theta}$, on a $w_0^n = re^{i\theta} = a$; de plus $w_0 \neq 0$. **Étape 2.** Soit w un nombre complexe ; posons $u = \dfrac{w}{w_0}$, de sorte que $w = w_0 u$. Alors $w^n = w_0^n u^n = au^n$. Comme $a \neq 0$, $w^n = a$ équivaut à $u^n = 1$, c'est-à-dire à $u \in \mathbb{U}_n$. **Étape 3.** Les racines n-ièmes de a sont donc les nombres $w_0 u$, $u \in \mathbb{U}_n$. Par F02, $\mathbb{U}_n$ a n éléments $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, et deux nombres $u \neq u'$ donnent $w_0 u \neq w_0 u'$ car $w_0 \neq 0$: il y a exactement n racines, $w_0\, e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$. **Étape 4.** Soit $n \geq 3$. Leurs images sont à la distance $\sqrt[n]{r}$ de O. Par la règle sur l'argument d'un produit et la relation de Chasles, deux images consécutives, ainsi que la dernière et la première, font en O l'angle $\dfrac{2\pi}{n}$: la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ (rappel de 1BAC) envoie chaque sommet sur le suivant. Elle conserve les distances et les angles : le polygone est régulier.



Les trois racines cubiques de 8i : un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 2.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On ramène une équation nouvelle à une équation déjà résolue, par le changement d'inconnue $u = \dfrac{w}{w_0}$. Ce changement est permis car $w_0 \neq 0$.

Les solutions de $z^n = a$ sont donc celles de $z^n = 1$, multipliées par w_0.

Le rôle des hypothèses

Vérifie : L'étape 2

À l'étape 2, quelle hypothèse permet de passer de $au^n = a$ à $u^n = 1$?

A. $n \geq 2$

Faux.

Cette hypothèse fixe le sens de « racine n-ième ». Elle ne permet aucune simplification.

B. $a \neq 0$

Juste.

On simplifie par a, ce qui exige $a \neq 0$.

C. $|w| = 1$

Faux.

Rien n'impose $|w| = 1$: les solutions ont pour module $\sqrt[n]{r}$.

Correction

On simplifie l'égalité $au^n = a$ par a.

C'est permis parce que $a \neq 0$, hypothèse du théorème.

Exemple : Contre-exemple d'hypothèse

Avec $a = 0$, l'équation $z^5 = 0$ n'a qu'une solution : $z = 0$.

En effet, un produit de nombres complexes n'est nul que si l'un des facteurs est nul.

Le théorème annonce n solutions seulement pour $a \neq 0$.

La méthode

Méthode : trouver les n racines n-ièmes d'un nombre

1. **Forme exponentielle.** Vérifie que $a \neq 0$, puis écris $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$.
2. **Une solution.** Pose $w_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$ et vérifie que $w_0^n = a$.
3. **Toutes les solutions.** Écris les n nombres $\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, pour k de 0 à $n-1$.
4. **Géométrie.** Pour $n \geq 3$, leurs images sont les sommets d'un polygone régulier, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Rédaction attendue : « On a $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. D'après le théorème des racines n-ièmes, l'équation a exactement n solutions : les nombres … pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. »

Exemple : Exemple rédigé

Résolvons $z^4 = a$, avec $a = -8 + 8\sqrt{3}\, i$.

Forme exponentielle. On a $a \neq 0$ et :

$$|a| = \sqrt{64 + 192} = 16.$$

Donc :

$$\begin{aligned} a &= 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 16e^{i\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned}$$

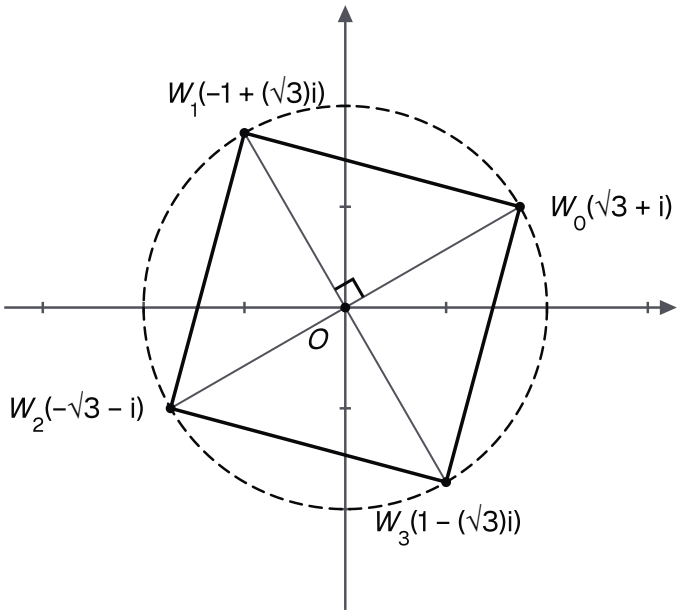
Une solution. On pose :

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[4]{16}\, e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

Les quatre solutions. Ce sont les nombres $2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}$, pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$:

- $\sqrt{3} + i$ et $-1 + i\sqrt{3}$;
- $-\sqrt{3} - i$ et $1 - i\sqrt{3}$.

Géométrie. Leurs images sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2.



Les quatre solutions de z⁴ = –8 + 8√3 i aux sommets d'un carré inscrit dans le cercle de rayon 2.

Le piège

Attention : n solutions, pas une

Diviser l'argument par n fournit une seule solution, w_0. Si tu t'arrêtes là, il en manque $n - 1$.

Les autres s'obtiennent en ajoutant $\dfrac{2k\pi}{n}$ à l'argument de w_0, pour k entier de 1 à $n - 1$.

À toi : Une équation à second membre négatif

Résous $z^3 = -27$ et décris les images des solutions.

Indice 1

Écris -27 sous forme exponentielle : son argument est π.

Indice 2

Une solution est $3e^{i\frac{\pi}{3}}$; ajoute deux fois $\dfrac{2\pi}{3}$ à son argument.

Réponse

On a $-27 = 27e^{i\pi}$, avec $27 > 0$, et $\sqrt[3]{27} = 3$.

D'après le théorème des racines n-ièmes, les solutions sont les nombres $3e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, pour $k \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} 3e^{i\frac{\pi}{3}} &= \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ 3e^{i\pi} &= -3, \\ 3e^{i\frac{5\pi}{3}} &= \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Leurs images forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 3.

La solution réelle -3 n'est que l'une des trois.

Angles, alignement et orthogonalité

Un quotient qui parle

Devine : Un quotient d'affixes

Les points A, B, C ont pour affixes $a = 1 + i$, $b = 3 + 2i$ et $c = -1 + 5i$. Que vaut $\dfrac{c - a}{b - a}$?

A. $2i$

Juste.

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $2 + i$.

B. $-1 + 4i$

Faux.

Tu as divisé partie réelle par partie réelle, puis partie imaginaire par partie imaginaire. Un quotient ne se calcule pas ainsi.

C. $-\dfrac{1}{2}i$

Faux.

C'est le quotient inverse, $\dfrac{b - a}{c - a}$.

D. $-2i$

Faux.

Erreur de signe : refais le produit $(-2+4i)(2-i)$.

Correction

On a $c-a=-2+4i$ et $b-a=2+i$. On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{-2+4i}{2+i} &= \frac{(-2+4i)(2-i)}{5}\\ &= \frac{10i}{5}=2i.\end{aligned}$$

Ce nombre est imaginaire pur, de module 2.

Garde-le en tête : la section va y lire un angle droit et un rapport de longueurs.

Remarque : Petit rappel : angles orientés et relation de Chasles

Un angle orienté $(\vec{v},\vec{w})$ n'existe que pour deux vecteurs non nuls.

Pour trois vecteurs non nuls $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{s}$, la relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned}&(\vec{v},\vec{w})+(\vec{w},\vec{s})\\ &\equiv(\vec{v},\vec{s})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Échanger les deux vecteurs change le signe :

$$(\vec{w},\vec{v})\equiv-(\vec{v},\vec{w})\ [2\pi].$$

Angle et quotient

Pourquoi un quotient mesure-t-il un angle ?

L'argument de $b-a$ repère la direction de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à $\vec{u}$. Celui de $d-c$ repère la direction de $\overrightarrow{CD}$.

L'angle des deux vecteurs est la différence de ces repérages. Et une différence d'arguments est l'argument d'un quotient.

Propriété : Angle orienté et quotient d'affixes

Soient A, B, C, D des points d'affixes a, b, c, d, avec $A\neq B$ et $C\neq D$. Alors $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi]$ et $\left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|=\dfrac{CD}{AB}$. En particulier, si $A\neq B$ et $A\neq C$: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$ et $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=\dfrac{AC}{AB}$.

Démonstration

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{CD}$; leurs affixes $b-a$ et $d-c$ sont non nulles, car $A\neq B$ et $C\neq D$. **Étape 1.** Par définition de l'argument, comme $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$, $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\arg(b-a)\ [2\pi]$; de même, $\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg(d-c)\ [2\pi]$. **Étape 2.** Par la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right)-$

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(d-c) - \arg(b-a)\ [2\pi]$. **Étape 3.** Par la règle sur l'argument d'un quotient de nombres non nuls, cette différence est un argument de $\dfrac{d-c}{b-a}$. **Étape 4.** Par le module d'un quotient et la distance de deux points, $\left|\dfrac{d-c}{b-a}\right| = \dfrac{|d-c|}{|b-a|} = \dfrac{CD}{AB}$. Le cas particulier s'obtient en prenant le point A à la place de C, et C à la place de D.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On passe par le vecteur $\vec{u}$: chaque vecteur y est repéré par un argument, et la relation de Chasles fait la différence.

Les conditions $A \neq B$ et $C \neq D$ garantissent que les deux affixes $b-a$ et $d-c$ ont un argument.

Vérifie la preuve

Vérifie : Une règle de la preuve

Quelle règle justifie l'étape 3 de la preuve ?

A. La relation de Chasles
Faux.
Elle sert à l'étape 2, pour écrire l'angle comme une différence.

B. L'argument d'un quotient
Juste.
Cette règle transforme la différence de deux arguments en argument du quotient.

C. Le module d'un quotient
Faux.
Il sert à l'étape 4, pour le rapport des distances.

D. La formule de Moivre
Faux.
Aucune puissance n'intervient dans cette preuve.

Correction
L'étape 2 donne l'angle sous la forme $\arg(d-c) - \arg(b-a)$.

La règle sur l'argument d'un quotient de nombres non nuls dit que cette différence est un argument de $\dfrac{d-c}{b-a}$.

Exemple : Exemple et contre-exemple

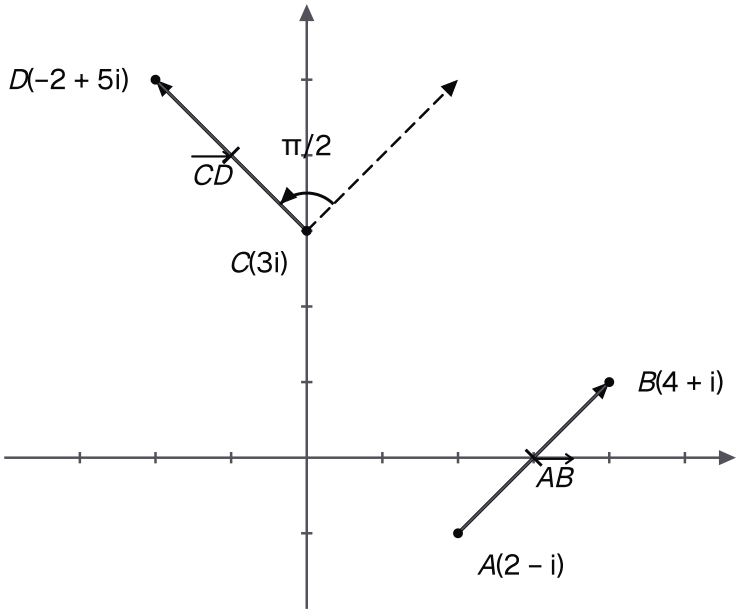
Exemple. Soient $a = 2 - i, b = 4 + i, c = 3i$ et $d = -2 + 5i$. Alors :

$$\frac{d-c}{b-a} = \frac{-2+2i}{2+2i} = i.$$

Ce quotient a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$. Donc $CD = AB$ et :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Contre-exemple d'hypothèse. Si $A = B$, le dénominateur $b - a$ est nul : le quotient n'existe pas. L'angle non plus, car $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul.



Le quotient vaut i : de AB à CD, on tourne d'un quart de tour, et les deux longueurs sont égales.

Alignement et angle droit

Pourquoi un quotient réel traduit-il un alignement ?

Un réel non nul a pour argument 0 ou π, modulo 2π. L'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ vaut alors 0 ou π : les deux vecteurs ont la même direction.

De même, un imaginaire pur non nul a pour argument $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Cela donne un angle droit.

Propriété : Alignement et orthogonalité

Soient A, B, C des points d'affixes a, b, c, avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est réel. Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

Démonstration

Posons $q = \dfrac{c-a}{b-a}$; comme $A \neq C$, $q \neq 0$. **Étape 1.** Par F05, $\arg q \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\ [2\pi]$. **Étape 2.** Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0\ [\pi]$, soit $\arg q \equiv 0\ [\pi]$. Or un nombre non nul est réel si et seulement si l'un de ses arguments est congru à 0 modulo π : d'où la première équivalence. **Étape 3.** Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, soit $\arg q \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Or un nombre non nul est imaginaire pur si et seulement si l'un de ses arguments est congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π : d'où la seconde équivalence.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Réel et imaginaire pur se lisent sur l'argument, modulo π : 0 pour un réel, $\dfrac{\pi}{2}$ pour un imaginaire pur.

L'alignement et l'orthogonalité se ramènent ainsi à la lecture d'un argument.

Le quotient doit être non nul pour avoir un argument : c'est le rôle de $A \neq C$.

Trouve l'erreur : Un calcul d'alignement

Avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = 2 + 3i$, un élève veut savoir si A, B, C sont alignés. Il calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$. Que penser de sa démarche ?

A. Le quotient vaut 0 : les points sont alignés.

Faux.

Le dénominateur $b - a$ est nul : le quotient n'existe pas.

B. Le quotient n'existe pas, car $A = B$.

Juste.

Le résultat exige $A \neq B$. Ici, la conclusion se lit sans calcul.

C. Le quotient n'est pas réel : les points ne sont pas alignés.

Faux.

Aucun quotient n'a été calculé : on ne peut rien en lire.

Correction

Ici $b - a = 0$: le quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$ n'est pas défini, et le résultat ne s'applique pas. Vérifie toujours $A \neq B$ et $A \neq C$ avant de calculer.

Comme $A = B$, les trois points sont sur la droite (AC) : ils sont alignés.

La méthode

Méthode : alignement, orthogonalité, nature d'un triangle

1. **Points distincts.** Vérifie que $A \neq B$ et $A \neq C$.
2. **Quotient.** Calcule $q = \dfrac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique ou exponentielle.
3. **Lecture.** Conclus d'après la valeur de q, selon la liste ci-dessous.

Lecture du quotient q :

- si q est réel, A, B, C sont alignés ;
- si q est imaginaire pur, (AB) et (AC) sont perpendiculaires ;
- si $|q| = 1$, le triangle est isocèle en A ;
- si $q = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $q = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, il est équilatéral ;
- si $q = i$ ou $q = -i$, il est rectangle et isocèle en A.

Rédaction attendue : « Comme $A \neq B$ et $A \neq C$, on calcule $\dfrac{c-a}{b-a} = \ldots$. Son module donne $\dfrac{AC}{AB} = \ldots$ et son argument donne $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \ldots \ [2\pi]$. Donc le triangle ABC est … »

Exemple **: Exemple rédigé**

Soient $a = 2 + i$, $b = 4 + i$ et $c = 3 + \left(1 + \sqrt{3}\right) i$.

Points distincts. On a $b - a = 2 \neq 0$ et $c - a = 1 + i\sqrt{3} \neq 0$.

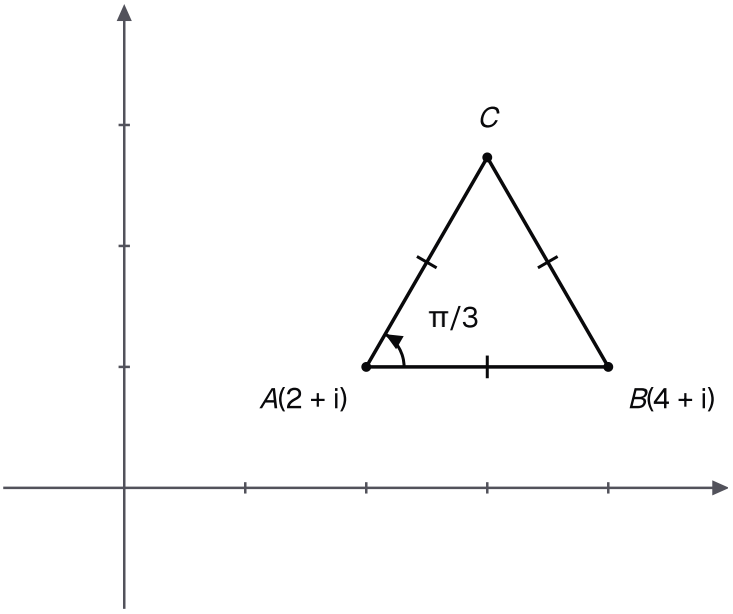
Quotient.

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Lecture. Le module vaut 1, donc $AC = AB$. L'argument donne :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

Conclusion. Le triangle ABC est isocèle en A, avec un angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ au sommet : il est équilatéral.



Le triangle de l'exemple rédigé : AC = AB et un angle orienté de π/3 en A, donc trois côtés égaux.

À toi : Nature d'un triangle

Soient $a = -1 + i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 1 - 2i$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Indice 1

Calcule $b - a$ et $c - a$: aucun des deux n'est nul.

Indice 2

Multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $3 + 2i$.

Réponse

Points distincts. On a $b - a = 3 + 2i \neq 0$ et $c - a = 2 - 3i \neq 0$.

Quotient.

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{13} = \frac{-13i}{13} = -i.$$

Lecture. On a $\dfrac{AC}{AB} = |-i| = 1$ et :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

Piège et examen

Attention : Attention à l'ordre des points

L'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ mesure l'angle qui part de $\overrightarrow{AB}$ et arrive sur $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur du dénominateur est le premier vecteur de l'angle.

Inverser le quotient change l'angle en son opposé : $\dfrac{\pi}{3}$ deviendrait $-\dfrac{\pi}{3}$.

Remarque : Coin examen

La nature d'un triangle est demandée dans 5 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). Le quotient d'affixes est la voie la plus directe.

Voici une rédaction type, en trois temps : hypothèses, quotient, conclusion.

« On a $A \neq B$, $A \neq C$ et $\dfrac{c-a}{b-a} = i$. Donc $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A. »

Ensembles de points

Un cercle caché

Devine : Un cercle caché

Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3+2i| = 4$?

A. Le cercle de centre le point d'affixe $3-2i$, de rayon 4

Juste.

On écrit $z-3+2i = z-(3-2i)$: c'est la distance au point d'affixe $3-2i$.

B. Le cercle de centre le point d'affixe $-3+2i$, de rayon 4

Faux.

Erreur de signe : $|z-w|$ est la distance au point d'affixe w, et ici $w = 3-2i$.

C. Le cercle de centre le point d'affixe $3-2i$, de rayon 16

Faux.

Le rayon est le module lui-même. La condition ne contient aucun carré.

D. Le disque de centre le point d'affixe $3-2i$, de rayon 4

Faux.

Une égalité de distances décrit un cercle. Un disque viendrait d'une inégalité.

Correction

Soit Ω le point d'affixe $3-2i$. Pour tout point M d'affixe z :

$$\begin{aligned} &|z-3+2i| \\ &= |z-(3-2i)| = \Omega M. \end{aligned}$$

La condition s'écrit $\Omega M = 4$: c'est le cercle de centre Ω et de rayon 4.

Pourquoi des modules décrivent-ils des cercles et des droites ?

Le module $|z-a|$ est la distance AM. Une condition sur des modules est donc une condition sur des distances.

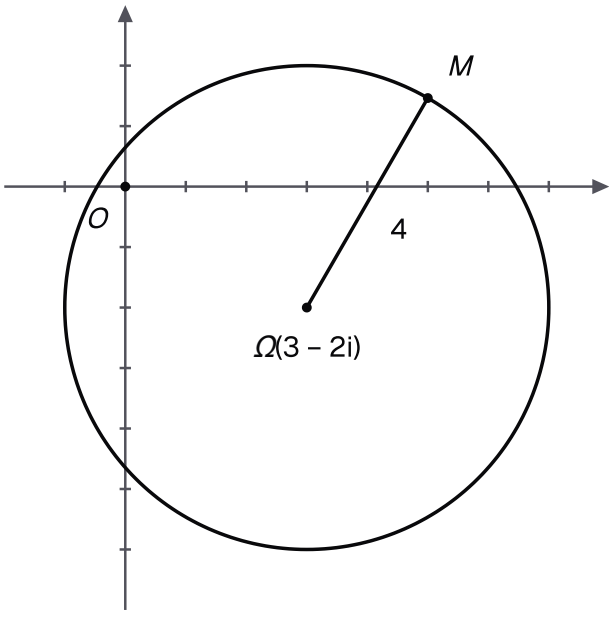
Or tu connais déjà les ensembles de points définis par des distances.

Propriété : Cercle et médiatrice décrits par des modules

Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b, et R un réel strictement positif. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-a|=R$ est le cercle de centre A et de rayon R. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-a|=|z-b|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Démonstration

Soit M un point d'affixe z. **Étape 1.** Par la distance de deux points, $|z-a|=AM$. Donc $|z-a|=R$ équivaut à $AM=R$, c'est-à-dire à : M appartient au cercle de centre A et de rayon R. **Étape 2.** De même, $|z-b|=BM$. Donc $|z-a|=|z-b|$ équivaut à $AM=BM$, c'est-à-dire à : M est équidistant de A et de B. Comme $A\neq B$, c'est la caractérisation de la médiatrice du segment $[AB]$.



La condition |z − 3 + 2i| = 4 de l'activité : le cercle de centre Ω(3 − 2i) et de rayon 4.

Ce que dit la preuve

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Toute la preuve tient en une traduction : le module d'une différence est une distance.

Avant de conclure, écris toujours la condition sous la forme $|z - w|$. Par exemple, pour tout nombre complexe z :

$$|z + 1 - i| = |z - (-1 + i)|.$$

Vérifie : L'hypothèse sur les deux points

Où la preuve emploie-t-elle l'hypothèse $A \neq B$?

A. Pour que $|z - a|$ soit défini

Faux.
Le module de $z - a$ existe pour tout z, même nul.

B. Pour que le rayon R soit positif

Faux.
La positivité de R est une autre hypothèse, $R > 0$.

C. Pour parler de la médiatrice de $[AB]$

Juste.
La médiatrice d'un segment n'existe que si ses extrémités sont distinctes.

Correction
À l'étape 2, l'ensemble des points équidistants de A et de B n'est la médiatrice de $[AB]$ que si $A \neq B$.

Si $A = B$, la condition $|z - a| = |z - b|$ est vraie pour tout z : l'ensemble est le plan entier.

La méthode

Méthode : déterminer un ensemble de points

1. **Traduire.** Écris la condition avec des distances, $|z - a| = AM$, ou avec un angle, l'argument d'un quotient.
2. **Reconnaître.** Cherche un cercle, une médiatrice ou une droite.
3. **Exclure.** Retire les points où un dénominateur s'annule, et ceux où un nombre nul devrait avoir un argument.
4. **À défaut.** Pose $z = x + iy$, avec x et y réels, et cherche une équation cartésienne.

Rédaction attendue : « M appartient à l'ensemble si et seulement si … ; l'ensemble est donc … privé de … »

Exemple : Exemple rédigé

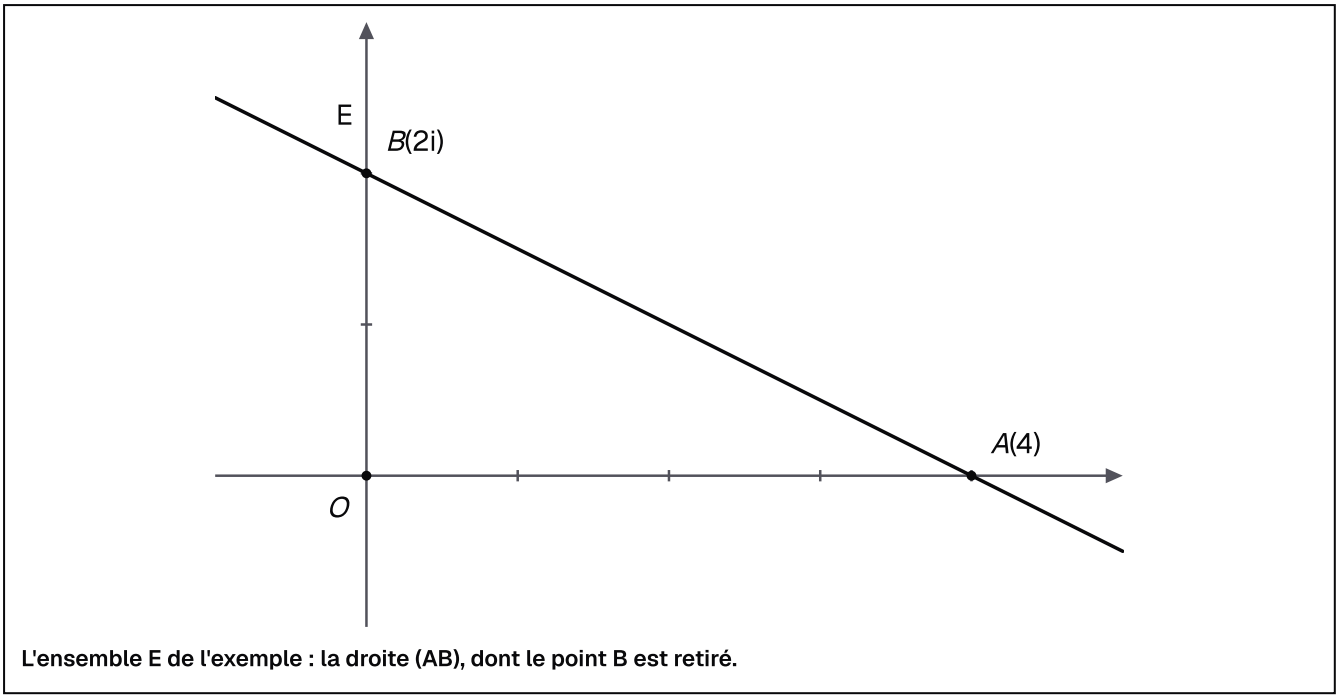
Soit E l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 2i$ tels que $\dfrac{z-4}{z-2i}$ soit réel. On note A et B les points d'affixes 4 et $2i$.

Point exclu. Pour $z = 2i$, le dénominateur est nul : $B \notin E$.

Cas $M = A$. Le quotient vaut 0, qui est réel : $A \in E$.

Cas $M \neq A$ et $M \neq B$. Le quotient est non nul, et son argument mesure $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$. Il est réel si et seulement si cet angle vaut 0 modulo π, c'est-à-dire si M, A, B sont alignés.

Conclusion. E est la droite (AB) privée du point B.



L'ensemble E de l'exemple : la droite (AB), dont le point B est retiré.

À toi

À toi : Deux distances égales

Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1-3i| = |z+3+i|$.

Indice 1
Écris chaque module sous la forme $|z-w|$.

Indice 2
Les deux points obtenus sont distincts : pense à la médiatrice.

Réponse
Soient A et B les points d'affixes $1+3i$ et $-3-i$: ils sont distincts. Pour tout point M d'affixe z :

- $|z-1-3i| = |z-(1+3i)| = AM$;
- $|z+3+i| = |z-(-3-i)| = BM$.

La condition s'écrit $AM = BM$: l'ensemble est la médiatrice de $[AB]$.

Elle passe par le milieu de $[AB]$, d'affixe :

$$\frac{(1+3i)+(-3-i)}{2} = -1+i.$$

En posant $z = x+iy$, avec x et y réels, on trouve l'équation $y = -x$.

Remarque : Coin examen

Point important : une question d'ensemble de points se termine par une phrase géométrique complète, points exclus compris.

Trois temps à faire apparaître :

1. la traduction par des distances ou par un angle ;
2. la reconnaissance de l'ensemble ;
3. les points exclus.

Affixe d'un barycentre

Le milieu

Devine : Le milieu de deux points

Avec $a = 3-2i$ et $b = -1+6i$, quelle est l'affixe du milieu I de $[AB]$?

A. $2+4i$

Faux.

C'est $a+b$: il manque la division par 2.

B. $-2+4i$

Faux.

C'est $\dfrac{b-a}{2}$, l'affixe de $\overrightarrow{AI}$, et non celle de I.

C. $1+2i$

Juste.

C'est la moyenne des deux affixes.

Correction

On a :

$$z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i.$$

Le milieu est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$: cette section généralise ce calcul.

Remarque : Petit rappel : barycentre

Soient des points $A_1,\dots,A_n$ et des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ de somme non nulle.

Le barycentre des points pondérés (A_k,α_k) est le seul point G vérifiant :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}.$$

Le milieu de $[AB]$ est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$.

La formule

Pourquoi une moyenne pondérée des affixes ?

Une égalité de vecteurs se traduit en égalité d'affixes, terme à terme. Il reste alors à isoler z_G.

Propriété : Affixe du barycentre

Soient $n\geq 2$ un entier, $A_1,\dots,A_n$ des points d'affixes $z_1,\dots,z_n$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\neq 0$. Le barycentre G des points pondérés $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ a pour affixe $z_G=\dfrac{\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_n z_n}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$.

Démonstration

Étape 1. Par définition du barycentre (rappel de 1BAC), G est l'unique point tel que $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$. **Étape 2.** Le vecteur $\overrightarrow{GA_k}$ a pour affixe z_k-z_G. L'affixe d'une somme de vecteurs est la somme des affixes, celle de $\lambda\vec{w}$, pour λ réel, est $\lambda z_{\vec{w}}$, et le vecteur nul a pour affixe 0. L'égalité vectorielle donne donc $\alpha_1(z_1-z_G)+\cdots+\alpha_n(z_n-z_G)=0$. **Étape 3.** On regroupe : $(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\,z_G=\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_n z_n$. Comme $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\neq 0$, on divise par ce réel, d'où l'expression de z_G.

Vérifie : Une division de la preuve

Pourquoi la formule exige-t-elle $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\neq 0$?

A. Pour que les points A_k soient distincts

Faux.

La formule reste vraie avec des points confondus.

B. Parce que la preuve divise par cette somme

Juste.

Sans cette hypothèse, on ne peut pas isoler z_G.

C. Pour que l'affixe z_G soit un réel

Faux.
L'affixe z_G est un nombre complexe quelconque.

Correction
À l'étape 3, on isole z_G en divisant par $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$: cette somme doit être non nulle.

Avec $(A, 1)$ et $(B, -1)$, où $A \neq B$, la somme est nulle. Pour tout point G, on aurait :

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BA}.$$

Ce vecteur est non nul : aucun barycentre n'existe.

Retenir et appliquer

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On traduit une relation vectorielle en relation entre affixes. On résout ensuite une équation du premier degré d'inconnue z_G.

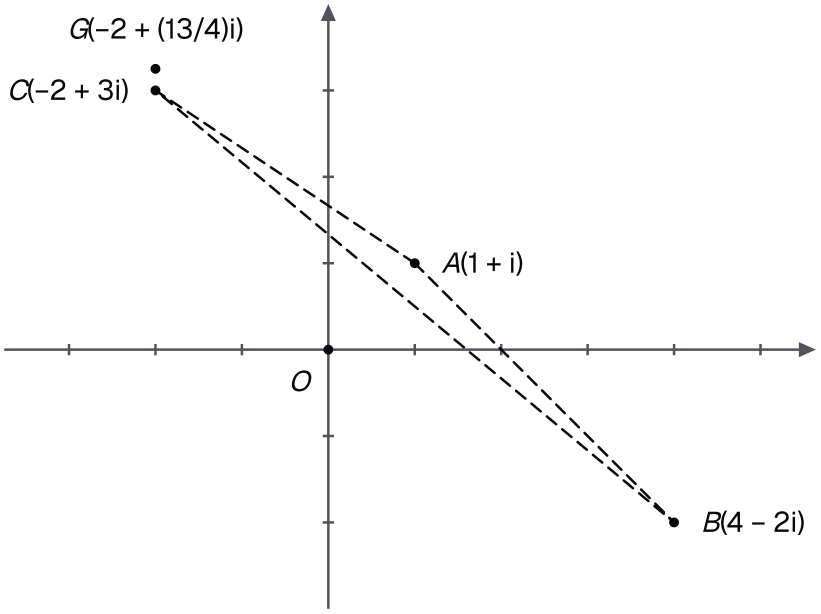
La division finale explique l'hypothèse : la somme des coefficients doit être non nulle.

Exemple

Soit G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, 3)$, avec $a = 1 + i$, $b = 4 - 2i$ et $c = -2 + 3i$.

La somme des coefficients vaut $2 - 1 + 3 = 4$: elle est non nulle. L'affixe z_G de G vaut donc :

$$\begin{aligned} &\frac{2(1+i) - (4-2i) + 3(-2+3i)}{4} \\ &= \frac{-8 + 13i}{4} \\ &= -2 + \frac{13}{4}i. \end{aligned}$$



Le barycentre G de (A, 2), (B, −1) et (C, 3), placé à l'affixe −2 + 13/4 i.

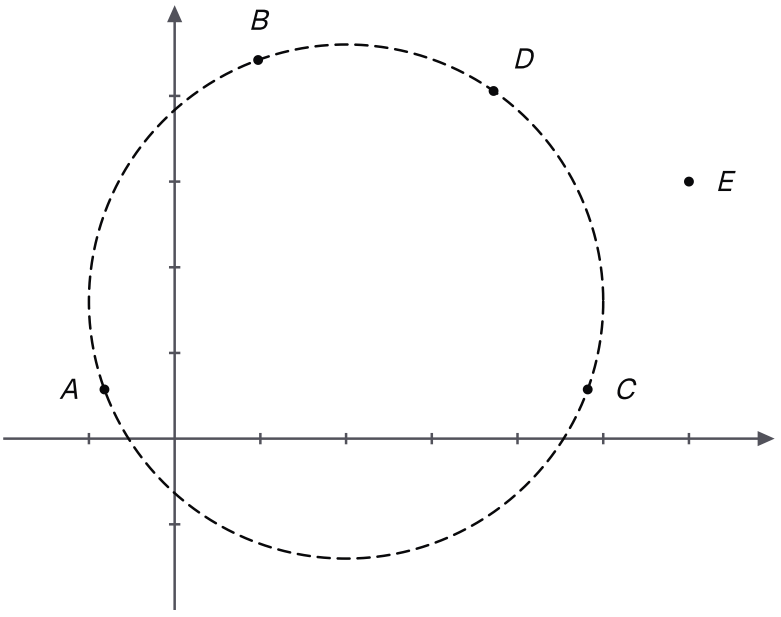
Quatre points sur un cercle

Un quatrième point

Quatre points sont **cocycliques** s'ils appartiennent à un même cercle.

Trois points non alignés déterminent toujours un cercle. Un quatrième point, pris au hasard, n'a aucune raison d'y être.

Le quotient d'affixes va permettre de le tester par un calcul.



Par trois points non alignés passe un seul cercle ; un quatrième point peut s'y trouver ou non.

Devine : Un quatrième point

Les points d'affixes 5, $5i$ et -5 sont sur le cercle de centre O et de rayon 5. Lequel de ces points est aussi sur ce cercle ?

A. $4+4i$

Faux.
On a $|4+4i| = 4\sqrt{2}$, qui n'est pas 5.

B. $3-4i$

Juste.
Son module vaut 5.

C. $5+5i$

Faux.
On a $|5+5i| = 5\sqrt{2}$: le point est hors du cercle.

D. $1-5i$

Faux.
On a $|1-5i| = \sqrt{26}$, un peu plus que 5.

Correction
Un point est sur ce cercle si et seulement si son affixe a pour module 5. Seul $3-4i$ convient :

$$|3-4i| = \sqrt{9+16} = 5.$$

Ici, le centre était connu. La suite donne un test qui n'a pas besoin du cercle.

Le théorème

Pourquoi un quotient réel ?

Le quotient du théorème a pour argument une somme de deux angles orientés : l'un vu de B, l'autre vu de D.

Il est réel exactement quand $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right)$ sont égaux modulo π.

Le cercle vient ensuite d'un théorème de géométrie sur ces angles.

Théorème : Cocyclicité de quatre points

Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts, d'affixes a, b, c, d, tels que A, B, C ne soient pas alignés. Les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle si et seulement si le nombre $\dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d}$ est réel.

Démonstration

Idée de la preuve. **Étape 1.** Les points étant deux à deux distincts, $Q = \dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d}$ est défini et non nul. Par F05 et la règle sur l'argument d'un produit, $\arg Q \equiv \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right)\ [2\pi]$. **Étape 2.** Comme $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right)\ [2\pi]$, le nombre Q est réel si et seulement si $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right)\ [\pi]$. **Étape omise.** Lorsque A, B, C ne sont pas alignés, ils sont sur un unique cercle Γ, et A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si D appartient à Γ. Or l'égalité d'angles de l'étape 2 caractérise les points D de Γ distincts de A et de C : c'est la forme orientée du théorème de l'angle inscrit. Ce théorème est admis ici, sans démonstration.

Vérifie : Démontré ou admis

Dans l'esquisse de preuve, qu'est-ce qui est démontré, et qu'est-ce qui est admis ?

A. Tout est démontré, étape par étape.

Faux.

L'étape omise est annoncée : elle n'est pas démontrée ici.

B. Démontré : le cercle. Admis : le calcul de l'argument du quotient.

Faux.

C'est l'inverse : le calcul d'argument est complet.

C. Démontré : le lien quotient-angles. Admis : le lien angles-cercle.

Juste.

C'est exactement le partage de l'esquisse.

Correction

Les étapes 1 et 2 sont complètes. Elles établissent que Q est réel si et seulement si :

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right)\ [\pi].$$

Le passage de cette égalité d'angles au cercle est la forme orientée du théorème de l'angle inscrit. Ce passage est admis dans ce cours.

Lire l'esquisse

Remarque : Ce qui est admis

Cette preuve est une **esquisse**. Les étapes 1 et 2 sont complètes : elles traduisent le quotient en angles.

L'étape omise part d'un fait connu : trois points non alignés sont sur un unique cercle Γ. Elle relie ensuite l'égalité des angles modulo π aux points de Γ distincts de A et de C.

C'est la forme orientée du théorème de l'angle inscrit. Ce théorème est admis ici, sans démonstration.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de l'esquisse

Un produit de deux quotients additionne deux angles.

Pour la cocyclicité, on compare les angles sous lesquels on voit le segment $[AC]$ depuis B et depuis D.

Exemple : Contre-exemple d'hypothèse

Prends quatre points alignés : $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ et $d = 3$. Alors :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{c-b}{a-b} \times \frac{a-d}{c-d} \\ &= \frac{1}{-1} \times \frac{-3}{-1} = -3. \end{aligned}$$

Le quotient est réel, et pourtant aucun cercle ne passe par trois points alignés. D'où l'hypothèse « A, B, C non alignés ».

La méthode

Méthode : prouver que quatre points sont cocycliques

1. **Points distincts.** Vérifie que A, B, C, D sont deux à deux distincts.
2. **Non-alignement.** Montre que $\dfrac{c-a}{b-a}$ n'est pas réel : A, B, C ne sont pas alignés.
3. **Quotient.** Calcule $Q = \dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d}$ et montre qu'il est réel, par sa forme algébrique.
4. **Conclusion.** Cite le théorème de cocyclicité et ses deux hypothèses.

Rédaction attendue : « Les points sont deux à deux distincts. De plus, $\dfrac{c-a}{b-a} = \ldots$ n'est pas réel, donc A, B, C ne sont pas alignés. Enfin, $Q = \ldots$ est réel. Donc A, B, C, D sont cocycliques. »

Exemple : Exemple rédigé

Soient $a = 6 + i$, $b = 1 + 6i$, $c = 4 + 5i$ et $d = -3 - 2i$, deux à deux distincts.

Non-alignement. On a :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2+4i}{-5+5i} = \frac{3-i}{5}.$$

Ce nombre n'est pas réel : A, B, C ne sont pas alignés.

Quotient. On calcule les deux facteurs :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{3-i}{5-5i} = \frac{2+i}{5},$$
$$\frac{a-d}{c-d} = \frac{9+3i}{7+7i} = \frac{6-3i}{7}.$$

Leur produit est un réel :

$$Q = \frac{(2+i)(6-3i)}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

Conclusion. D'après le théorème de cocyclicité, les quatre points A, B, C, D sont cocycliques.

Piège et examen

Attention : un quotient réel ne suffit pas

Quatre points d'une même droite donnent aussi un quotient réel. Un quotient réel ne prouve donc rien tant que trois des points peuvent être alignés.

Commence toujours par montrer que A, B, C ne sont pas alignés.

À toi : Quatre points

Les points $A(1)$, $B(i)$, $C(-1)$ et $D(1+2i)$ sont-ils cocycliques ?

Indice 1
Vérifie d'abord que A, B, C ne sont pas alignés.
Indice 2
Calcule séparément $\frac{c-b}{a-b}$ et $\frac{a-d}{c-d}$.

Réponse
Points distincts. Les quatre points sont deux à deux distincts.

Non-alignement. On a :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2}{-1+i} = 1+i.$$

Ce nombre n'est pas réel : A, B, C ne sont pas alignés.

Quotient. On calcule les deux facteurs :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-1-i}{1-i} = -i,$$
$$\frac{a-d}{c-d} = \frac{-2i}{-2-2i} = \frac{1+i}{2}.$$

Leur produit vaut $\frac{1-i}{2}$, qui n'est pas réel.

Conclusion. D'après le théorème de cocyclicité, les quatre points ne sont pas cocycliques.

Contrôle : le cercle passant par A, B, C a pour centre O et pour rayon 1, et $|1+2i| = \sqrt{5}$.

Remarque : Coin examen

La cocyclicité de quatre points par un quotient réel figure dans 7 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), pour 0,25 à 0,75 point.

Rédaction attendue : « Les quatre points sont deux à deux distincts, et A, B, C ne sont pas alignés. Le nombre $\dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d}$ est réel. Donc A, B, C, D sont cocycliques. »

Écritures complexes des transformations

Une transformation déguisée

Devine : Une écriture à reconnaître

La transformation qui, au point d'affixe z, associe le point d'affixe $z+3-i$, est :

A. la translation de vecteur d'affixe $3-i$

Juste.
Chaque point est déplacé du même vecteur, d'affixe $3-i$.

B. l'homothétie de centre O et de rapport 3

Faux.
Une homothétie de rapport 3 multiplierait z par 3.

C. la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

Faux.
Cette rotation multiplierait z par $-i$.

Correction
Soit M un point d'affixe z, d'image M' d'affixe z'. L'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est :

$$z' - z = 3 - i.$$

Elle est la même pour tout point M : c'est la translation de vecteur d'affixe $3-i$.

Remarque : Petit rappel : rotation

Soient Ω un point et θ un réel. La rotation de centre Ω et d'angle θ laisse Ω fixe.

Un point M distinct de Ω a pour image le point M' vérifiant deux conditions :

- $\Omega M' = \Omega M$;

- $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Les écritures

Pourquoi ces écritures ? Chaque transformation est définie par une égalité de vecteurs, ou par une distance et un angle.

On traduit chaque condition en affixes. Une égalité de vecteurs devient une égalité de nombres. La distance et l'angle se réunissent dans un seul facteur, $e^{i\theta}$.

Propriété : Écritures complexes des transformations usuelles

Soit M', d'affixe z', l'image du point M d'affixe z. Par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b : $z' = z + b$. Par l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k, réel non nul : $z' - \omega = k(z - \omega)$. Par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. La symétrie de centre Ω est l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 : $z' - \omega = -(z - \omega)$.

Démonstration

Étape 1 (translation). M' est l'image de M si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$, c'est-à-dire, par égalité des affixes, $z' - z = b$. **Étape 2 (homothétie).** M' est l'image de M si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$, soit $z' - \omega = k(z - \omega)$. **Étape 3 (rotation).** Rappel de 1BAC : Ω est sa propre image et, pour $M \neq \Omega$, M' est l'image de M si et seulement si $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$. Pour $M = \Omega$: l'image est Ω, et l'écriture donne $z' - \omega = e^{i\theta} \times 0 = 0$, c'est-à-dire $z' = \omega$; les deux descriptions coïncident. Pour $M \neq \Omega$, chacune des deux descriptions donne $M' \neq \Omega$; par F05, la description géométrique équivaut à : $q = \dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et pour argument θ, c'est-à-dire $q = e^{i\theta}$.
Étape 4. La symétrie de centre Ω est l'homothétie de rapport -1 : l'étape 2 s'applique.

Vérifie : Un cas à part

Pourquoi la preuve traite-t-elle à part le cas $M = \Omega$?

A. Le quotient $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ n'existe pas si $z = \omega$.
Juste.
On ne divise pas par $z - \omega$ lorsqu'il est nul.

B. La rotation ne transforme pas le point Ω.
Faux.
Le point Ω a une image : lui-même.

C. Le nombre $e^{i\theta}$ peut être nul.
Faux.
Le nombre $e^{i\theta}$ est de module 1 : il n'est jamais nul.

Correction

Pour $M \neq \Omega$, la preuve lit l'écriture sur le quotient $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$. Pour $z = \omega$, ce quotient n'existe pas.

La preuve compare donc directement les deux descriptions. L'image de Ω est Ω, et l'écriture donne :

$$z' - \omega = e^{i\theta} \times 0 = 0,$$

soit $z' = \omega$. Les deux descriptions coïncident.

Retenir et appliquer

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour la rotation, la preuve réunit deux conditions géométriques, une distance et un angle, en une seule égalité : le quotient $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ vaut $e^{i\theta}$.

Le cas $M = \Omega$ se traite à part, car ce quotient n'y existe pas.

Exemple

Rotation. Soit r la rotation de centre $\Omega(1 - 2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Son écriture complexe est $z' - \omega = i(z - \omega)$, avec $\omega = 1 - 2i$.

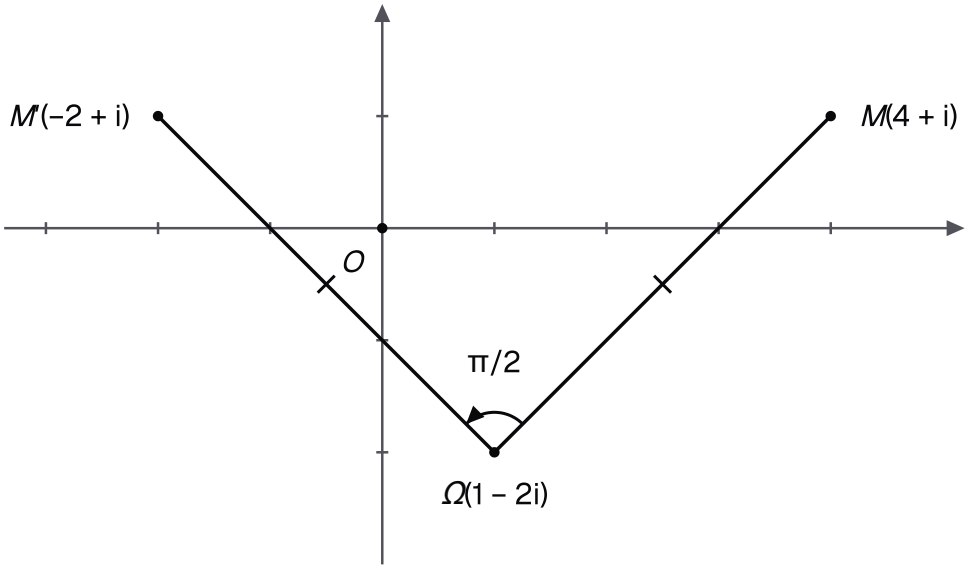
L'image de $M(4 + i)$ a pour affixe :

$$\begin{aligned} z' &= 1 - 2i + i(3 + 3i) \\ &= -2 + i. \end{aligned}$$

Homothétie. L'homothétie de centre le point d'affixe 2 et de rapport -3 envoie $M(1 + i)$ sur le point d'affixe :

$$2 - 3(-1 + i) = 5 - 3i.$$

Hypothèse $k \neq 0$. Avec $k = 0$, l'écriture devient $z' - \omega = 0$: tout le plan est envoyé sur Ω. Ce n'est pas une transformation du plan.



La rotation de centre Ω(1 − 2i) et d'angle π/2 envoie M(4 + i) sur M'(−2 + i).

Reconnaître

Pourquoi chercher un point invariant ? Une rotation ou une homothétie se décrit autour de son centre, et le centre est le seul point qui ne bouge pas.

On cherche donc d'abord ce point, puis on réécrit la transformation autour de lui.

Propriété : Transformation d'écriture z' = αz + β

Soient α et β des nombres complexes avec $\alpha \neq 0$, et f la transformation du plan qui, au point d'affixe z, associe le point d'affixe $z' = \alpha z + \beta$. Si $\alpha = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe β. Si $\alpha \neq 1$, f a un unique point invariant Ω, d'affixe $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, et $z' - \omega = \alpha(z - \omega)$ pour tout z ; si de plus α est réel, f est l'homothétie de centre Ω et de rapport α ; si $|\alpha| = 1$, f est la rotation de centre Ω et d'angle $\arg \alpha$.

Démonstration

Étape 1. Si $\alpha = 1$, alors $z' = z + \beta$: par F10, f est la translation de vecteur d'affixe β. **Étape 2.** Supposons $\alpha \neq 1$. Le point d'affixe z est invariant si et seulement si $z = \alpha z + \beta$, soit $(1-\alpha)z = \beta$, c'est-à-dire $z = \omega$, avec $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$: ce point est unique. **Étape 3.** Comme $\beta = (1-\alpha)\omega$, pour tout z : $z' - \omega = \alpha z + (1-\alpha)\omega - \omega = \alpha(z - \omega)$. **Étape 4.** Si α est réel, il est non nul : par F10, f a l'écriture de l'homothétie de centre Ω et de rapport α, donc lui est égale. Si $|\alpha| = 1$, alors $\alpha = e^{i \arg \alpha}$: par F10, f est la rotation de centre Ω et d'angle $\arg \alpha$. Pour $\alpha = -1$, les deux cas s'appliquent : l'homothétie de rapport -1 et la rotation d'angle π de centre Ω sont la même transformation, la symétrie de centre Ω (F10).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le centre s'obtient en résolvant l'équation $z = \alpha z + \beta$.

Ensuite, on retranche membre à membre les égalités $z' = \alpha z + \beta$ et $\omega = \alpha\omega + \beta$. On obtient la forme centrée :

$$z' - \omega = \alpha(z - \omega).$$

Trouve l'erreur : Un centre introuvable

Pour f : $z' = z + 2i$, un élève cherche le centre avec $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$. Qu'obtient-il ?

A. Le centre est le point d'affixe 0.

Faux.
L'origine n'est pas invariante : son image a pour affixe $2i$.

B. Le centre est « à l'infini » : f est une rotation.

Faux.
Une rotation a un centre. Ici, aucun point n'est invariant.

C. Aucun centre : ici $\alpha = 1$.

Juste.
La formule divise par $1 - \alpha = 0$: elle ne s'applique pas.

Correction

Ici $\alpha = 1$ et $\beta = 2i$. La formule $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ exige $\alpha \neq 1$: elle ne s'applique pas.

L'équation $z = z + 2i$ n'a aucune solution : f n'a pas de point invariant. C'est la translation de vecteur d'affixe $2i$.

La méthode

Méthode : reconnaître une transformation et calculer une image

1. **Forme.** Écris la transformation sous la forme $z' = \alpha z + \beta$.
2. **Translation.** Si $\alpha = 1$, c'est la translation de vecteur d'affixe β.
3. **Centre.** Sinon, calcule $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, puis lis la nature sur α, selon la liste ci-dessous.
4. **Image d'un point.** Pour une rotation donnée, pars de $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Nature, lorsque $\alpha \neq 1$:

- si α est réel, c'est l'homothétie de centre Ω et de rapport α ;
- si $|\alpha| = 1$, c'est la rotation de centre Ω et d'angle $\arg\alpha$;

- pour $\alpha = -1$, les deux cas s'appliquent : c'est la **symétrie de centre** Ω, homothétie de rapport -1 et rotation d'angle π.

Rédaction attendue : « L'écriture est de la forme $z' = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \ldots$, $\alpha \neq 1$ et $|\alpha| = 1$. Son point invariant a pour affixe $\omega = \ldots$. Donc f est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\ldots$. »

Exemple : Exemple rédigé

Soit f la transformation d'écriture $z' = iz + 3 + i$.

Forme. On a $\alpha = i$ et $\beta = 3 + i$, avec $\alpha \neq 1$ et $|\alpha| = 1$.

Centre. Le point invariant a pour affixe :

$$\omega = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i.$$

Contrôle. On a $i(1+2i) + 3 + i = 1 + 2i$: le point d'affixe $1+2i$ est bien invariant.

Conclusion. Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, f est la rotation de centre $\Omega(1+2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

À toi : Deux écritures

Reconnais la transformation g : $z' = -iz + 2$, puis la transformation h : $z' = -2z + 6i$.

Indice 1

Pour chacune, repère α et β, puis compare α à 1.

Indice 2

Le centre a pour affixe $\dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

Réponse

Pour g. On a $\alpha = -i$, différent de 1, et $|-i| = 1$. Le centre a pour affixe :

$$\frac{2}{1-(-i)} = \frac{2}{1+i} = 1 - i.$$

Comme $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, g est la rotation de centre $\Omega(1-i)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Pour h. On a $\alpha = -2$, réel et différent de 1. Le centre a pour affixe :

$$\frac{6i}{1-(-2)} = \frac{6i}{3} = 2i.$$

Donc h est l'homothétie de centre le point d'affixe $2i$ et de rapport -2.

Piège et examen

Attention : le centre des deux côtés

Pour une rotation de centre Ω, le nombre ω se retranche des deux côtés.

L'écriture $z' = e^{i\theta}(z - \omega)$ est fausse dès que $\omega \neq 0$: elle n'envoie même pas Ω sur lui-même.

Écris $z' - \omega$ à gauche et $z - \omega$ à droite.

Remarque : Coin examen

Une rotation explicite (image d'un point, centre) figure dans 10 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), pour 0,25 à 0,5 point.

Rédaction attendue : « r est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ, donc $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. Pour $z = \ldots$, on obtient $z' = \ldots$. »

Par exemple, avec $\Omega(2i)$, l'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et $M(2 + 2i)$:

$$\begin{aligned} z' &= 2i + 2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right) i. \end{aligned}$$

Composer des transformations

Deux transformations à la suite

Devine : Deux transformations à la suite

On applique d'abord la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, puis la translation t de vecteur d'affixe 1. Où arrive le point d'affixe 2 ?

A. En $3i$

Faux.
C'est le résultat dans l'autre ordre : translation d'abord, rotation ensuite.

B. En $1 + 2i$

Juste.
La rotation donne $2i$, puis la translation ajoute 1.

C. En 3

Faux.
La rotation a été oubliée.

D. En $2i$

Faux.
C'est l'image par la rotation seule ; il reste la translation.

Correction

La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ multiplie l'affixe par i : 2 devient $2i$. La translation ajoute 1 : on arrive en $1+2i$.

Dans l'autre ordre, on trouverait $i(2+1)=3i$. L'ordre compte.

Pourquoi les angles s'additionnent-ils ? Chaque rotation multiplie l'affixe par un nombre de module 1, puis ajoute une constante.

Enchaîner les deux revient à multiplier par $e^{i\theta_1}$, puis par $e^{i\theta_2}$. Le coefficient obtenu est $e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Propriété : Composée de deux rotations

Soient r_1 la rotation de centre Ω_1 et d'angle θ_1, et r_2 la rotation de centre Ω_2 et d'angle θ_2. Si $\theta_1+\theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, la composée $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$. Si $\theta_1+\theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ est une translation.

Démonstration

Notons ω_1 et ω_2 les affixes de Ω_1 et Ω_2. **Étape 1.** Par F10, r_1 s'écrit $z_1 = e^{i\theta_1}z+\beta_1$ et r_2 s'écrit $z' = e^{i\theta_2}z_1+\beta_2$, avec $\beta_1=\left(1-e^{i\theta_1}\right)\omega_1$ et $\beta_2=\left(1-e^{i\theta_2}\right)\omega_2$. **Étape 2.** Dans $r_2\circ r_1$, on applique r_1, puis r_2 : $z' = e^{i\theta_2}\left(e^{i\theta_1}z+\beta_1\right)+\beta_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}z+\beta$, avec $\beta = e^{i\theta_2}\beta_1+\beta_2$. **Étape 3.** Posons $\alpha = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$: $|\alpha|=1$ et $\arg\alpha \equiv \theta_1+\theta_2\ [2\pi]$. Si $\theta_1+\theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $\alpha \neq 1$ et, par F11, $r_2\circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$. Sinon, $\alpha = 1$ et, par F11, $r_2\circ r_1$ est une translation.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Composer, c'est substituer : dans l'écriture de la seconde transformation, on remplace la variable par l'écriture de la première.

On lit ensuite le coefficient de z. La reconnaissance des écritures $z' = \alpha z+\beta$ conclut.

Vérifie la preuve

Vérifie : Une condition sur les angles

Dans la preuve, à quoi sert la condition $\theta_1+\theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$?

A. À garantir que le coefficient de z est différent de 1
Juste.
Avec $\alpha \neq 1$, la composée a un point invariant : c'est une rotation.

B. À garantir que le coefficient de z est de module 1
Faux.
Le module vaut 1 dans tous les cas, produit de deux nombres de module 1.

C. À garantir que les deux centres sont distincts

Faux.

Les centres n'interviennent pas dans cette condition.

Correction

Le coefficient de z dans l'écriture de $r_2 \circ r_1$ est $\alpha = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Il vaut 1 exactement quand $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$.

La condition donne donc $\alpha \neq 1$: la composée est une rotation, et non une translation.

Exemple **: Exemple et contre-exemple**

Exemple. Soient r_1 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, d'écriture $z_1 = iz$, et r_2 la rotation de centre $\Omega_2(2)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, d'écriture $z' = iz_1 + 2 - 2i$.

La composée $r_2 \circ r_1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} z' &= i(iz) + 2 - 2i \\ &= -z + 2 - 2i. \end{aligned}$$

Son centre a pour affixe :

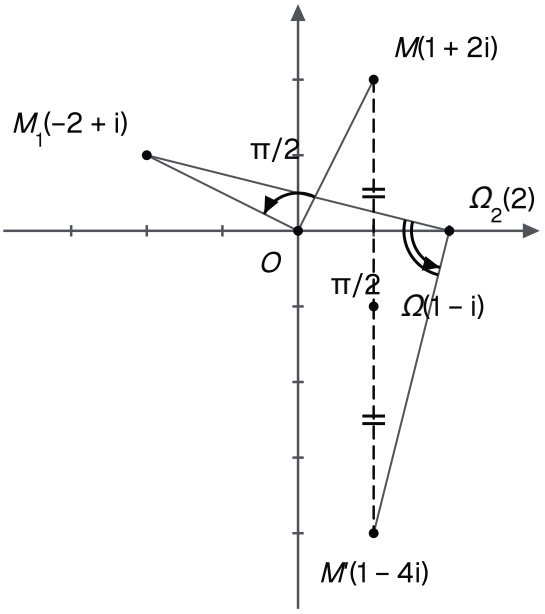
$$\frac{2 - 2i}{1 - (-1)} = 1 - i.$$

Son angle mesure π, car $-1 = e^{i\pi}$.

Contre-exemple. Remplaçons r_2 par la rotation de centre Ω_2 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, d'écriture $z' = -iz_1 + 2 + 2i$. La composée devient :

$$z' = z + 2 + 2i,$$

c'est-à-dire une translation, sans point invariant.



Deux quarts de tour de centres O puis Ω_2 : un demi-tour de centre Ω, d'affixe 1 – i, pour un point M choisi.

Avec une translation

Pourquoi le rapport ou l'angle ne change-t-il pas ? Une translation ajoute une constante sans toucher au coefficient de z.

Le coefficient de la composée reste donc celui de la rotation, ou celui de l'homothétie.

Propriété : Composée d'une translation et d'une rotation ou d'une homothétie

Soit t une translation. Si r est une rotation d'angle θ, avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, les composées $t \circ r$ et $r \circ t$ sont des rotations d'angle θ. Si h est une homothétie de rapport k, avec $k \neq 1$, les composées $t \circ h$ et $h \circ t$ sont des homothéties de rapport k.

Démonstration

Soit b l'affixe du vecteur de t. **Étape 1.** Par F10, t s'écrit $z' = z + b$, et r s'écrit $z' = \alpha z + \gamma$, avec $\alpha = e^{i\theta}$ et γ complexe. **Étape 2.** On applique r, puis t : $t \circ r$ s'écrit $z' = \alpha z + (\gamma + b)$. On applique t, puis r : $r \circ t$ s'écrit $z' = \alpha(z + b) + \gamma = \alpha z + (\alpha b + \gamma)$. **Étape 3.** Comme $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, on a $\alpha \neq 1$, et $|\alpha| = 1$: par F11, les deux composées sont des rotations d'angle θ. **Étape 4.** Pour h, le même calcul s'applique avec $\alpha = k$, réel, non nul et différent de 1 : par F11, $t \circ h$ et $h \circ t$ sont des homothéties de rapport k.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Dans les deux ordres, seul le terme constant change : $\gamma + b$ d'un côté, $\alpha b + \gamma$ de l'autre.

Le coefficient α décide de la nature de la composée. Le terme constant ne décide que du centre.

À toi : Homothétie et translation

Soient h l'homothétie de centre O et de rapport 3, d'écriture $z' = 3z$, et t la translation de vecteur d'affixe $4i$. Écris $t \circ h$ et $h \circ t$, puis donne le centre de chacune.

Indice 1

Dans $t \circ h$, on applique h d'abord.

Indice 2

Le centre de $z' = 3z + \beta$ a pour affixe $\dfrac{\beta}{1-3}$.

Réponse

Pour $t \circ h$. On applique h, puis t : $z' = 3z + 4i$. C'est l'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe :

$$\frac{4i}{1-3} = -2i.$$

Pour $h \circ t$. On applique t, puis h :

$$z' = 3(z + 4i) = 3z + 12i.$$

C'est l'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe :

$$\frac{12i}{1-3} = -6i.$$

Même rapport, centres différents.

L'hypothèse $k \neq 1$. Avec $k = 1$, l'homothétie est l'identité, et la composée est la translation t elle-même.

Un centre commun

Pourquoi l'ordre ne compte-t-il pas ici ? Les deux transformations ont le même centre.

Autour de ce centre, l'une multiplie par k et l'autre par $e^{i\theta}$. Or deux multiplications s'échangent.

Propriété : Composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre

Soient r la rotation de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle θ, et h l'homothétie de même centre Ω et de rapport k, réel non nul. Alors $h \circ r = r \circ h$, et cette transformation a pour écriture complexe $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$. Elle laisse Ω invariant et, pour tout point M d'image M', $\Omega M' = |k|\,\Omega M$.

Démonstration

Étape 1. Par F10, r s'écrit $z_1 - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ et h s'écrit $z' - \omega = k(z_1 - \omega)$. **Étape 2.** On applique r , puis h : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$. Dans l'autre ordre, notons z_2 l'affixe de l'image de M par h : $z_2 - \omega = k(z - \omega)$, puis $z' - \omega = e^{i\theta}(z_2 - \omega) = ke^{i\theta}(z - \omega)$. Les deux composées ont la même écriture, donc $h \circ r = r \circ h$. **Étape 3.** Pour $z = \omega$, on obtient $z' = \omega$: Ω est invariant. Par la distance de deux points et le module d'un produit, $\Omega M' = |z' - \omega| = |k| \times \left|e^{i\theta}\right| \times |z - \omega| = |k|\,\Omega M$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Avec un centre commun, on travaille directement sur $z - \omega$. Chaque transformation multiplie ce nombre par un facteur.

Un produit de nombres ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

Vérifie : Une écriture à choisir

Soient r la rotation de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et h l'homothétie de même centre et de rapport -2. Quelle est l'écriture complexe de $h \circ r$?

A. $z' - (1 + i) = (-2 + i)\,(z - (1 + i))$

Faux.
Les deux facteurs se multiplient, ils ne s'additionnent pas.

B. $z' = -2iz$

Faux.
Le centre a disparu : c'est l'écriture d'une transformation de centre O.

C. $z' - (1 + i) = -2i\,(z - (1 + i))$

Juste.
Les facteurs i et -2 se multiplient autour du centre commun.

Correction
Deux transformations de même centre multiplient $z - \omega$ par le produit de leurs facteurs, ici i et -2. Donc $h \circ r$ s'écrit :

$$\begin{aligned} &z' - (1 + i) \\ &= -2 \times i \times (z - (1 + i)) \\ &= -2i\,(z - (1 + i))\,. \end{aligned}$$

Elle laisse Ω invariant, et $\Omega M' = 2\,\Omega M$ pour tout point M d'image M'.

Dans l'autre ordre, $r \circ h$ a la même écriture.

La méthode

Méthode : composer deux transformations

1. **Écrire.** Pour la transformation appliquée en premier, $z_1 = \alpha_1 z + \beta_1$; pour la seconde, $z' = \alpha_2 z_1 + \beta_2$.
2. **Substituer.** Dans $g \circ f$, f agit d'abord : on remplace z_1 par l'écriture de f dans celle de g.
3. **Lire.** On obtient $z' = \alpha_1\alpha_2 z + \alpha_2\beta_1 + \beta_2$.
4. **Reconnaître.** On identifie la composée par la méthode de reconnaissance des écritures $z' = \alpha z + \beta$.

Rédaction attendue : « f s'écrit $z_1 = \ldots$ et g s'écrit $z' = \ldots$. Pour $g \circ f$, on applique f, puis g : $z' = \ldots$. Le coefficient de z vaut …, donc $g \circ f$ est … »

Exemple : Exemple rédigé

Soient f la rotation de centre $\Omega(1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, d'écriture $z_1 = iz + 1 - i$, et g la translation de vecteur d'affixe 2.

Pour $g \circ f$. On applique f, puis g :

$$\begin{aligned} z' &= (iz + 1 - i) + 2 \\ &= iz + 3 - i. \end{aligned}$$

Le centre a pour affixe $\dfrac{3 - i}{1 - i} = 2 + i$.

Pour $f \circ g$. On applique g, puis f :

$$\begin{aligned} z' &= i(z + 2) + 1 - i \\ &= iz + 1 + i. \end{aligned}$$

Le centre a pour affixe $\dfrac{1 + i}{1 - i} = i$.

Conclusion. Les deux composées sont des rotations d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, mais leurs centres diffèrent : $g \circ f \neq f \circ g$.

Attention : Attention à l'ordre d'une composée

Dans $g \circ f$, la lettre de droite agit la première.

Les écritures de $g \circ f$ et de $f \circ g$ diffèrent en général, même quand leurs coefficients de z sont égaux. Substitue toujours dans l'ordre écrit.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Nombres complexes : géométrie et transformations » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)